

文章编号: 1001- 2486(2008) 03- 0128- 03

带任意泛函约束的多项式再生核的计算*

张新建, 卢世荣

(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 讨论多项式再生核的构造与计算, 指出了带任意泛函约束的多项式再生核可由带初值约束的再生核取两次投影余项而得到, 并建立了具体的计算方法。

关键词: 多项式再生核; 约束泛函; Green 函数; 投影余项

中图分类号: O177 文献标识码: A

Computing Polynomial Reproducing Kernels with Arbitrary Functional Constrains

ZHANG Xin-jian, LU Shi-rong

(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In this paper, the structure properties and computational methods for Polynomial Reproducing Kernels are discussed. It is proved that polynomial reproducing kernels with arbitrary functional constraints can be obtained via the projective remainders of reproducing kernels with initial value constraints. Specific algorithms for computing polynomial reproducing kernels are given.

Key words: polynomial reproducing kernel; functional constrain; Green function; projective remainders

文献[1]研究了 $W_2^m[a, b]$ 空间带初值约束的多项式再生核。设 λ_i 为初值泛函: $\lambda_i f = f^{(i-1)}(a)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 则对 $f \in W_2^m[a, b]$ 有

$$f(t) = \sum_{i=1}^m (\lambda_i f) \Psi_i(t) + \int_a^b g(t, s) [D^m f(s)] ds, \quad \Psi_i(t) = \frac{(t-a)^{m-1}}{(m-1)!} \quad (1)$$

其中, $g(t, s)$ 是算子 D^m 的对 λ_i ($1 \leq i \leq m$) 满足齐次插值条件的 Green 函数, 即

$$g(t, s) = (t-s)^{m-1}/(m-1)!, \quad D^m g(\cdot, s) = \delta(\cdot - s), \quad \lambda_i g(\cdot, s) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$W_2^m[a, b]$ 赋予内积 $\langle f, h \rangle = \sum_{i=1}^m (\lambda_i f)(\lambda_i h) + \int_a^b [D^m f(t)][D^m h(t)] dt$ 后为再生核 Hilbert 空间, 再生核为

$$K_m(t, s) = \sum_{i=1}^m \Psi_i(t) \Psi_i(s) + \int_a^b g(t, \tau) g(s, \tau) d\tau \triangleq \sum_{i=1}^m \Psi_i(t) \Psi_i(s) + E_m(t, s) \quad (3)$$

文献[1]给出了 $E_m(t, s)$ 的递推关系。本文讨论当 λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 为 $W_2^m[a, b]$ 上的任意线性泛函或一般插值型泛函时, 如何构造再生核及再生核与 $E_m(t, s)$ 的关系。

1 再生核的计算

设 l_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 是 $W_2^m[a, b]$ 上任意一组线性无关的泛函, 且与积分可交换次序。

引理 1 每个 $f \in W_2^m[a, b]$ 可以表示为

$$f(t) = \sum_{i=1}^m (l_i f) \varphi_i(t) + \int_a^b G(t, s) [D^m f(s)] ds \quad (4)$$

* 收稿日期: 2007- 10- 25

基金项目: 国防科技大学基础研究项目资助

作者简介: 张新建(1956—), 男, 副教授。

其中, $\varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ 是 $\text{Ker}D^m$ 的与 l_i 对偶的基底, 即

$$D^m \varphi_i(t) = 0, \quad l_i \varphi_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

$G(t, s)$ 是 D^m 的对 l_i 满足齐次条件的 Green 函数, 它满足

$$G(t, s) = g(t, s) - \sum_{i=1}^m [l_i g(\cdot, s)] \varphi_i(t) \quad (6)$$

$$D^m G(\cdot, s) = \delta(\cdot - s), \quad l_i G(\cdot, s) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

引理 2 对于 $u(t) \in L^2[a, b]$, 问题 $D^m f(t) = u(t), l_i f = 0 (1 \leq i \leq m)$ 的解为

$$f(t) = \int_a^b G(t, s) u(s) ds$$

引理 1 与引理 2 的证明从略。

有了引理 1, 类似于文献[1], 可以知道在内积

$$\langle f, h \rangle = \sum_{i=1}^m (l_i f)(l_i h) + \int_a^b [D^m f(t)][D^m h(t)] dt \quad (8)$$

下, $W_2^m[a, b]$ 是再生核 Hilbert 空间, 其再生核为

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) \varphi_i(s) + \int_a^b G(t, \tau) G(s, \tau) d\tau \quad (9)$$

定理 1 设 $l_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 是 $W_2^m[a, b]$ 上一组线性无关的与积分可交换次序的泛函, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ 是 $\text{Ker}D^m$ 的与 $l_i (1 \leq i \leq m)$ 对偶的基底(即满足式(5)), 设 $E_m(t, s)$ 如式(3)。则式(9)的再生核为

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) \varphi_i(s) + E_m(t, s) - \sum_{i=1}^m \{ [l_i E_m(\cdot, t)] \varphi_i(s) + [l_i E_m(\cdot, s)] \varphi_i(t) \} \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [l_i l_j E_m(\cdot, \cdot)] \varphi_i(t) \varphi_j(s) \end{aligned} \quad (10)$$

证明 由式(6), 有

$$\begin{aligned} \int_a^b G(t, \tau) G(s, \tau) d\tau &= \int_a^b g(t, \tau) g(s, \tau) d\tau - \sum_{i=1}^m \varphi_i(s) \int_a^b [\lambda_i g(\cdot, \tau)] g(t, \tau) d\tau \\ &\quad - \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) \int_a^b [\lambda_i g(\cdot, \tau)] g(s, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \varphi_i(t) \varphi_j(s) \int_a^b [\lambda_i g(\cdot, \tau)] [\lambda_j g(\cdot, \tau)] d\tau \end{aligned}$$

再由 $E_m(t, s) = \int_a^b g(t, \tau) g(s, \tau) d\tau$ 知定理成立。□

如果引入投影算子, 则定理 1 的结论可以有更简洁的形式。设 $P: W_2^m[a, b] \rightarrow \text{Ker}L$ 为投影算子

$$(Pf)(t) = \sum_{i=1}^m (l_i f) \varphi_i(t), \quad f \in W_2^m[a, b] \quad (11)$$

再设 I 为恒等算子, 则 $R = I - P$ 为投影余项算子。

定理 2 在定理 1 的条件下, 再生核(9)为

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t) \varphi_i(s) + R_i R_s E_m(t, s) \quad (12)$$

证明 由式(6)知, $G(t, s) = (I - P)_i g(t, s) = R_i g(t, s)$, 于是

$$\int_a^b G(t, \tau) G(s, \tau) d\tau = \int_a^b R_i g(t, \tau) \cdot R_s g(s, \tau) d\tau = R_i R_s E_m(t, s) \quad \square$$

以上两个定理中的 $E_m(t, s)$ 可以按文献[1]的递推方法计算。我们知道 $E_m(t, s)$ 是初值约束下再生核的主要部分, 因此定理 1 和定理 2 表明, 可以利用初值约束的再生核计算任意泛函约束的再生核。

设 $z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)$ 是 $\text{Ker}D^m$ 的一组基, 以 $(z_1^{(i-1)}(t), \dots, z_m^{(i-1)}(t))$ 为第 i 行的 m 阶 Wronskian 矩阵记为 $\mathbf{W}(z_1, \dots, z_m)(t)$, 其逆矩阵记为 $\mathbf{W}^{-1}(z_1, \dots, z_m)(t)$ 。

定义 1^[2] 设 $W^{-1}(z_1, \dots, z_m)(t)$ 最后一列的元素依次为 $\tilde{z}_1(t), \dots, \tilde{z}_m(t)$, 则称它们为 $z_1(t), \dots, z_m(t)$ 的伴随函数。

易知下述引理 3 成立。

引理 3 对 $\text{Ker}D^m$ 的任意两组基 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ 和 $z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)$, 其伴随函数记为 $\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \dots, \tilde{y}_m(t)$ 和 $\tilde{z}_1(t), \tilde{z}_2(t), \dots, \tilde{z}_m(t)$, 则有

$$\sum_{i=1}^m y_i(t) \tilde{y}_i(s) = \sum_{i=1}^m z_i(t) \tilde{z}_i(s) \triangleq h(t, s) \quad (13)$$

引理 4^[2] $h(t, s)(t-s)_+^0$ 是 D^m 的 Green 函数, 即 $D^m[h(\cdot, s)(\cdot-s)_+^0] = \delta(\cdot-s)$ 。

又易知对于初值约束泛函 $\lambda_i: \lambda_i f = f^{(i-1)}(a)$, 有 $\lambda_i[h(\cdot, s)(\cdot-s)_+^0] = 0 (1 \leq i \leq m)$, 故由引理 2 知 $h(t, s)(t-s)_+^0 = \int_a^b g(t, \tau) \delta(\tau-s) d\tau = g(t, s)$, 即

$$g(t, s) = \sum_{i=1}^m z_i(t) \tilde{z}_i(s)(t-s)_+^0 = \frac{1}{(m-1)!} (t-s)_+^{m-1} \quad (14)$$

定理 3 在定理 1 的条件下, 有

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(s) [\varphi_i(t) + u_i(t)] \quad (15)$$

其中, $u_i(t)$ 满足 ($\tilde{\varphi}_i(t)$ 是 $\varphi_i(t)$ 的伴随函数)

$$D^m u_i(t) = \tilde{\varphi}_i(t)(s-t)_+^0 - l_i g(\cdot, t), \quad l_j u_i(t) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

证明 由式(6)、(14), 有

$$\begin{aligned} \int_a^b G(t, \tau) G(s, \tau) d\tau &= \int_a^b G(t, \tau) \left\{ \sum_{i=1}^m \varphi_i(s) \tilde{\varphi}_i(\tau)(s-\tau)_+^0 - \sum_{i=1}^m [l_i g(\cdot, \tau)] \varphi_i(s) \right\} d\tau \\ &= \sum_{i=1}^m \varphi_i(s) \int_a^b G(t, \tau) [\tilde{\varphi}_i(\tau)(s-\tau)_+^0 - l_i g(\cdot, \tau)] d\tau \end{aligned}$$

记 $u_i(t) = \int_a^b G(t, \tau) [\tilde{\varphi}_i(\tau)(s-\tau)_+^0 - l_i g(\cdot, \tau)] d\tau$, 得式(15)。由引理 2 知 $u_i(t)$ 是问题(16)的解。□

设 $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq b$ 为 $[a, b]$ 上的节点, $l_i (i=1, 2, \dots, m)$ 为插值型泛函, 即 $l_i f$ 的值只与 $f(t)$ 及其导数在 t_i 处的值有关。最简单的插值型泛函是 $l_i f = f(t_i)$ 。

推论 1 当 $l_i (i=1, 2, \dots, m)$ 是插值型泛函时, 公式(15)中的 $u_i(t)$ 满足

$$D^m u_i(t) = \tilde{\varphi}_i(t) [(s-t)_+^0 - (t_i-t)_+^0], \quad l_j u_i(t) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (17)$$

推论 2 当 $l_i (i=1, 2, \dots, m)$ 是单重节点插值泛函, 即 $l_i f = f(t_i)$ 时, 公式(16)中的 $u_i(t)$ 满足

$$D^m u_i(t) = \frac{(t_i-t)^{m-1}}{(m-1)!} [(s-t)_+^0 - (t_i-t)_+^0], \quad l_j u_i(t) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (18)$$

2 举例

例 取微分算子 D^2 , 区间 $[0, 1]$, l_1, l_2 为插值泛函: $l_1 f = f(0), l_2 f = f(1)$ 。

在此例中 $t_1 = 0, t_2 = 1$ 。 $\varphi_1(t) = 1-t, \varphi_2(t) = t, g(t, \tau) = (t-\tau)_+$ 。由文献[1]中 $K_2(t, s)$ 的表达式可得 $E_2(t, s) = \begin{cases} t^2(3s-t)/6, & t \leq s \\ s^2(3t-s)/6, & t > s \end{cases}$ 。则 $E_2(0, s) = E_2(t, 0) = 0, E_2(1, s) = s^2(3-s)/6, E_2(t, 1) = t^2(3-t)/6$ 。则由式(11)得

$$R_s E_2(t, s) = E_2(t, s) - [E_2(t, 0) \varphi_1(s) + E_2(t, 1) \varphi_2(s)] = E_2(t, s) - [0 + t^2(3-t)s/6]$$

(下转第 135 页)

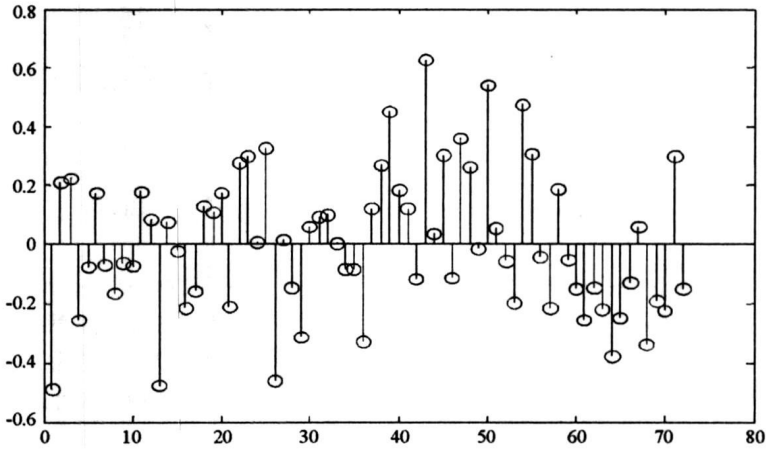


图 5 误差匹配图

Fig. 5 Errors matching

参考文献:

- [1] Kobayashi K, Cheok K C. Estimation of Absolute Vehicle Speed Using Fuzzy Logic Rule-based Kalman Filter [C]// Proceedings of the American Control Conference Seattle, Washington, June, 1995: 3086- 3090.
- [2] Hernandez W. Improving the Response of a Wheel Speed Sensor by Using Frequency-domain Adaptive Filtering [J]. IEEE Sensor Journal, 2003, 3 (4): 404- 413.
- [3] Schwarz R, Nelles O, Scheerer P. Increasing Signal Accuracy of Automotive Wheel-speed Sensors by On-line Learning [J]. Processing of the American Control Conference, Albuquerque, New Mexico, 1997: 1131- 1135.
- [4] Persson N. Event Based Sampling with Application to Spectral Estimation [D]. Linköping Studies in Science and Technology, 2002.
- [5] 杨江, 李治. 基于神经网络的多传感器系统误差校正方法[J]. 传感器技术, 2002, 21: 37- 42.
- [6] 刘国福, 张王己. 防抱制动系统的基于最佳滑移率的滑模变结构[J]. 国防科技大学学报, 2004, 26: 70- 74.
- [7] 高隼. 神经网络原理及仿真实例[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003.

(上接第 130 页)

$$R_i R_s E_2(t, s) = R_s E_2(t, s) - R_t [t^2(3-t)s/6] = E_2(t, s) - s^2(3-s)t/6 - t^2(3-t)s/6 + st/3$$

$$= \begin{cases} -t^3/6 - ts^2/2 + t^3s/6 + t^3s/6 + ts/3, & t \leq s \\ -s^3/6 - t^2s/2 + t^3s/6 + t^3s/6 + ts/3, & t > s \end{cases}$$

由定理 2, 得空间 $W_2^2[0, 1]$ 在内积 $\langle f, h \rangle = f(0)h(0) + f(1)h(1) + \int_0^1 f^{(2)}(t) \cdot h^{(2)}(t) dt$ 下的再生核为

$$K(t, s) = \begin{cases} 1-t-s+2st - (1-s)(t^3+ts^2-2ts)/6, & t \leq s \\ 1-t-s+2st - (1-t)(s^3+t^2s-2ts)/6, & t > s \end{cases}$$

此例用定理 3 或推论 2 可得到同样的结果。

已有的用微分方程边值问题求再生核的方法^[3]求得的 $W_2^2[a, b]$ 在内积

$$\langle f, h \rangle = \int_a^b [f(t)h(t) + \mathcal{F}^{(1)}(t)h^{(1)}(t) + f^{(2)}(t)h^{(2)}(t)] dt$$

下的再生核表达式极其复杂。

参考文献:

- [1] 张新建, 姜悦. 再生核的一种新的算法及其递推性[J]. 国防科技大学学报, 2007, 29(1): 122- 125.
- [2] Schumaker L. Spline functions: Basic Theory[M]. New York: John Wiley & Sons, 1981.
- [3] 崔明根, 吴勃英. 再生核空间数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2004.