

文章编号: 1001- 2486(2008) 04- 0043- 04

圆锥薄壳热应力分析的分布参数传递函数方法*

孟祥贵, 陈棣湘, 潘孟春

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 为分析圆锥壳的热应力问题, 建立了圆锥壳热弹性问题的基本微分方程, 运用分布参数传递函数方法求解了受温度场作用圆锥壳的位移与热应力。计算结果表明, 解析解与有限元解吻合良好。该方法可以对不同边界条件下圆锥壳的热变形和热应力问题进行分析, 还可以推广到旋转壳母线形状为曲线的情况。

关键词: 温度场; 热应力; 传递函数方法; 解析解; 圆锥壳

中图分类号: O343.6 **文献标识码:** A

The Distributed Transfer Function Method for Analyzing Thermal Stress in Thin Conical Shells

MENG Xiang-gui, CHEN Di-xiang, PAN Meng-chun

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: To analyze the thermal stress problem of thin conical shells, the basic thermoelastic differential equations of thin conical shells are established; the displacement and thermal stress in conical shells under temperature field are analyzed, using the distributed transfer function method. The calculation results show that the solution obtained by the distributed transfer function method matches well with the solution of the finite element method. The proposed method is able to analyze the thermal stress in thin conical shells with arbitrary boundary conditions and other loads; besides it can be further extended to the case of revolution shells with curvilinear generatrix.

Key words: temperature field; thermal stress; transfer function method; analytical solution; conical shell

圆锥壳作为工程结构元件在航空航天、机械、石油化工、核电站安全壳等工程中得到了广泛应用, 这些圆锥壳常常受到热载荷的作用。过高的热载荷会使圆锥壳结构的力学性能发生改变, 进而导致壳体结构破坏, 引发严重的事故, 圆锥壳结构的热强度问题已成为工程实际中重点关注的问题之一。

国内外有许多学者对圆锥壳结构的热应力进行了研究。丁克伟、唐立民^[1-3]研究了任意厚度层合闭口柱壳的轴对称温度应力; 盛宏玉、高荣誉^[4]对非均匀变温时两端固支叠层闭口厚柱壳的热应力进行了分析研究; 滕晓青、顾永宁^[5]用简化解法和有限元数值方法, 分析了双壳型船体货舱区域在运载高温液货物时的稳态温度场, 根据船体结构的温度分布, 用有限元法计算了其温度应力; Huang 与 Taucher^[6]研究了双曲型复合材料层合壳的热应力。上述研究仅仅局限于轴对称温度场作用下结构热应力的研究, 而对非轴对称温度场作用下圆锥壳结构热应力的研究却极少涉及。

基于线弹性小变形理论, 建立了圆锥壳的热弹性基本微分方程, 结合 Fourier 级数展开, 采用分布参数传递函数方法求解了任意形式温度场作用下圆锥壳的变形与热应力分布。

1 圆锥薄壳的热弹性基本方程

考虑如图 1 所示的截锥壳单元, 建立局部坐标系 $ox\theta z$, 其中, x 沿母线方向, z 沿母线法线方向, θ 为母线位置角, φ 为截锥壳单元的锥度。设母线长度为 $2a$, 即有 $x \in [-a, a]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ 。薄壳的几何方程根据不同的近似可取多种形式, 本文利用科尔库诺夫给出的形式, 几何关系为

* 收稿日期: 2008- 01- 10

基金项目: 国家 863 高技术资助项目; 国家部委资助项目

作者简介: 孟祥贵(1969-), 女, 讲师, 硕士。

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{r} w \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r} v, & x_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ x_2 = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\cos \varphi}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ x_{12} = 2 \frac{\sin \varphi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - 2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} v + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

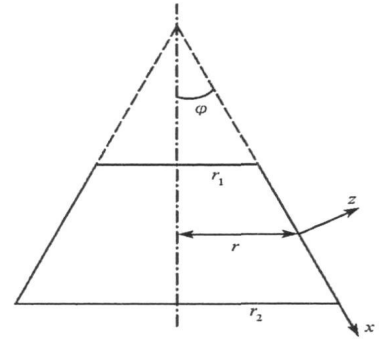


图1 截锥壳单元

Fig. 1 Conical shell element

在温度场 T 作用下,薄壳的物理方程可以表示为

$$N_1 = K \left(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2 \right) - \frac{N_T}{1 - \mu}$$

$$N_2 = K \left(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1 \right) - \frac{N_T}{1 - \mu}$$

$$N_{12} = N_{21} = \frac{K}{2} (1 - \mu) \varepsilon_{12}$$

弯矩与曲率改变量或梯度的关系为

$$M_1 = D \left(x_1 + \mu x_2 \right) - \frac{M_T}{1 - \mu}, \quad M_2 = D \left(x_2 + \mu x_1 \right) - \frac{M_T}{1 - \mu}, \quad M_{12} = M_{21} = \frac{D}{2} (1 - \mu) x_{12} \quad (2)$$

其中,拉伸刚度 $K = \frac{Eh}{1 - \mu^2}$, $N_T = \frac{\alpha E}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T dz$, 弯曲刚度 $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$, $M_T = \alpha E \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Tz dz$, α 为材料的线膨胀系数, u, v, w 分别为母线方向、环向、法线方向的位移分量, μ 为泊松比, E 为弹性模量, h 为壳的厚度,壳半径 $r = r_0 + x \sin \varphi$, r_0 为 $x = 0$ 时的半径。

截锥壳的平衡方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\sin \varphi}{r} (N_1 - N_2) + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{12}}{\partial \theta} + q_u = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + 2 \frac{\sin \varphi}{r} N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\cos \varphi}{r} Q_2 + q_v = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} Q_1 - \frac{\cos \varphi}{r} N_2 + q_w = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3)$$

其中剪力 Q_1, Q_2 分别表示为

$$Q_1 = \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + 2 \frac{\sin \varphi}{r} M_{12} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_2}{\partial \theta}, \quad Q_2 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\sin \varphi}{r} (M_1 - M_2) + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} \quad (4)$$

单元中面单位宽度上的总剪力 V_1, V_2 和总平错力 T_1, T_2 分别表示为

$$V_1 = Q_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta}, \quad T_1 = N_{12} + \frac{\cos \varphi}{r} M_{12}, \quad V_2 = Q_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x}, \quad T_2 = N_{12} \quad (5)$$

边界条件可写成

$$\begin{cases} u(x_i, \theta, t) = \bar{u}_i(\theta, t) & \text{或} & N_1(x_i, \theta, t) = \bar{N}_{1,i}(\theta, t) \\ v(x_i, \theta, t) = \bar{v}_i(\theta, t) & \text{或} & T_1(x_i, \theta, t) = \bar{T}_{1,i}(\theta, t) \\ w(x_i, \theta, t) = \bar{w}_i(\theta, t) & \text{或} & V_1(x_i, \theta, t) = \bar{V}_{1,i}(\theta, t) \\ w'(x_i, \theta, t) = \bar{\psi}_i(\theta, t) & \text{或} & M_1(x_i, \theta, t) = \bar{M}_{1,i}(\theta, t) \end{cases} \quad (6)$$

其中, x_i ($i = 1, 2$) 表示锥壳两端的 x 坐标值, $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{\psi}_i, \bar{N}_{1,i}, \bar{T}_{1,i}, \bar{V}_{1,i}, \bar{M}_{1,i}$ ($i = 1, 2$) 为边界上的已知函数。

2 热应力的传递函数解

不失一般性, 以下只考虑环向对称情况。将位移和外载荷沿环向坐标 θ 展开成 Fourier 级数形式有

$$[u, w, q_u, q_w, T] = \sum_n [u_n, w_n, q_{x,n}, q_{z,n}, T_n] \cos n\theta \quad (7a)$$

$$[v, q_\theta] = \sum_n [v_n, q_{\theta,n}] \sin n\theta \quad (7b)$$

边界条件也可以按照与(7)式类似的方式展开为 Fourier 级数的形式, 这里不再赘述。

将(7)式及边界条件的展开式代入基本方程(1)~(6), 利用三角函数系的正交、完备性, 可知展开项中下标不同的项之间没有耦合, 故可以对相同下标的各分量分别求解。

将(7)式代入(1)~(4)式后, 得到位移分量表示的平衡方程, 对其进行 Laplace 变换, 将时域 t 映射到复频域 s , 可得一组含复参数的变系数常微分方程组。通过定义状态向量

$$\boldsymbol{\eta} = \left\{ u \quad u' \quad v \quad v' \quad w \quad w' \quad w'' \quad w''' \right\}^T \quad (8)$$

可以把用位移分量表示的截锥壳平衡方程组写成状态空间的形式

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dx} = \mathbf{F}(x, s) \boldsymbol{\eta} + \mathbf{q}(x, s) \quad (9)$$

边界条件表示为

$$\mathbf{M}_b \boldsymbol{\eta}(-a, s) + \mathbf{N}_b \boldsymbol{\eta}(a, s) = \mathbf{y}_b \quad (10)$$

(9)、(10)式中的矩阵 \mathbf{F} , \mathbf{M}_b , \mathbf{N}_b 和向量 \mathbf{q} , \mathbf{y}_b 的详细内容从略。

方程(9)的解可由文献[7]中方法得出, 为如下形式:

$$\boldsymbol{\eta}(x, s) = \mathbf{H}(x, s) \mathbf{y}_b(s) + \mathbf{f}(x, s) \quad x \in (-a, a) \quad (11)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x, s) &= \int_{-a}^a \mathbf{G}(x, \xi, s) \mathbf{q}(\xi, s) d\xi \\ \mathbf{H}(x, s) &= \boldsymbol{\varphi}_F(x, x_0, s) \left[\mathbf{M}(s) \boldsymbol{\varphi}_F(-a, x_0, s) + \mathbf{N}(s) \boldsymbol{\varphi}_F(a, x_0, s) \right]^{-1} \\ \mathbf{G}(x, \xi, s) &= \begin{cases} \mathbf{H}(x, s) \mathbf{M}(s) \boldsymbol{\varphi}_F(-a, \xi, s) & \xi < x \\ -\mathbf{H}(x, s) \mathbf{N}(s) \boldsymbol{\varphi}_F(a, \xi, s) & \xi > x \end{cases} \end{aligned}$$

以上给出了截锥壳单元的基本分析, 如果只对一个简单的壳体如圆柱壳、圆锥壳进行分析, 只需要把(10)式中的系数 \mathbf{M}_b 、 \mathbf{N}_b 、 \mathbf{y}_b 略加修改, 引入边界条件(6)式即可。对于复杂的情况则需要划分多个单元求解, 然后对单元组集、拼接、求解^[7]。

3 数值算例

考虑一两端不可移固支圆柱壳, 其半径 $R = 100\text{mm}$, 母线长 $L = 400\text{mm}$, 壳厚 $h = 1\text{mm}$, 弹性模量 $E = 2.11 \times 10^5 \text{MPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 热膨胀系数 $\alpha = 12.76 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, 密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 。温度场分布为 $T = 200(1 + \cos \frac{\pi x}{L}) \cos \theta$ 。图2给出了壳体沿母线法向的位移 w , 图3给出了壳体沿母线方向上的弯矩, 图4给出了壳体沿母线方向上的薄膜内力分布曲线。所选母线方向为 $\theta = 0$ 处母线方向。图中实线为本文结果, 圆点为有限元解, 两者的计算结果非常接近。其中有限元解由 NASTRAN 软件采用 160×120 的 Quad4 单元计算得到。

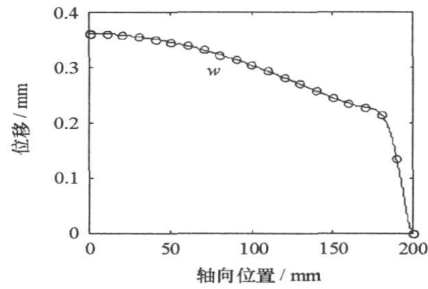


图2 圆柱壳沿母线的法向位移变化图

Fig. 2 The displacement of generatrix direction of column shell

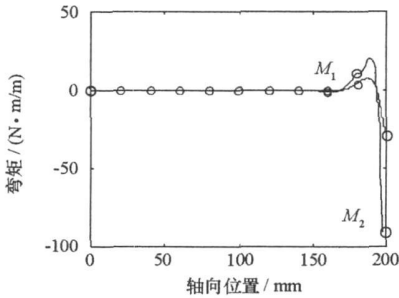


图3 圆柱壳沿母线方向弯矩变化图

Fig. 3 The moment along generatrix of column shell

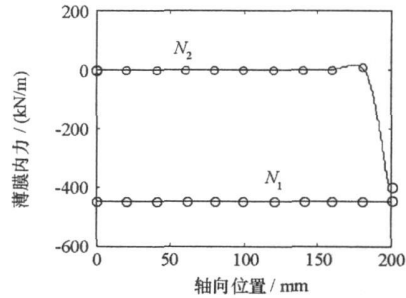


图4 圆柱壳沿母线方向薄膜内力变化图

Fig. 4 The film internal force along generatrix of column shell

4 结论

用分布参数传递函数方法研究了任意形式温度场作用下圆锥壳的位移与热应力。对于圆柱壳,本文得到的是问题的解析解,对于简单系统采用一个单元即可达到很高的精度,对于复杂系统可以采用组装技术,划分多个单元求解。与分布传递函数方法的渐近解法相比,本方法不需要特别复杂的推导,单元构造和编程的工作量都大为减轻,不需要寻找小参数,扩大了可解问题的范围。本文方法可以很方便地推广到变厚度圆锥壳的分析,对母线形状的假设改变后还可以建立精度更高的曲壳单元,通过映射还可以对非圆锥壳如椭圆壳、矩形壳等进行分析^[7]。

参考文献:

- [1] 丁克伟,唐立民. 叠层连续柱壳热应力问题的弱形式研究[J]. 计算力学学报, 2000, 17(1): 50- 55.
- [2] 丁克伟,唐立民. 复合材料连续柱壳轴对称问题的热应力研究[J]. 大连理工大学学报, 1999, 39(5): 607- 611.
- [3] 丁克伟,唐立民. 任意厚度层合闭口柱壳的轴对称温度应力[J]. 计算力学学报, 1998, 15(2): 161- 173.
- [4] 盛宏玉,高荣誉. 非均匀变温时两端固支叠层闭口厚柱壳的热应力分析[J]. 工程力学, 2000, 17(4): 117- 123.
- [5] 滕晓青,顾永宁. 双壳型船体结构稳态温度场和温度应力[J]. 中国造船, 2000, 41(2): 58- 65.
- [6] Huang N N, Tauchert T R. Thermal Stresses in Doubly-curved Cross-ply laminates[J]. Int J Solids Structures, 1992, 29: 991- 1000.
- [7] 李海阳. 数学物理问题的数值分布传递函数方法[D]. 长沙: 国防科技大学, 1999.