

文章编号: 1001- 2486(2008) 04- 0094- 04

复杂平面区域的三角网格生成算法*

陈欣^{1,2}, 熊岳山¹

(1. 国防科技大学 计算机学院, 湖南 长沙 410073; 2. 浙江师范大学 数理与信息工程学院, 浙江 金华 321004)

摘要: 为生成复杂平面区域的有限元网格, 提出了基于网格细化的三角网格生成算法。该算法首先采用耳尖移除法对区域边界做三角划分, 得到粗略的初始网格。提出 Delaunay 优化平分方法, 根据网格密度细化初始网格, 该网格细化方法结合最长边平分技术与 Delaunay 边交换技术, 可有效提高内点生成与单元细化的质量。实验表明, 基于 Delaunay 优化平分的三角网格生成算法可对任意平面域进行网格剖分, 生成符合有限元计算要求的高质量三角网格。

关键词: 三角网格; 网格生成; 网格细化; Delaunay 优化平分

中图分类号: TP391.9 文献标识码: B

Triangular Mesh Generation over Arbitrary Two-dimensional Domain

CHEN Xin^{1,2}, XIONG Yue-Shan¹

(1. College of Computer, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. School of Mathematics, Physics & Information Engineering, Zhejiang Normal Univ., Jinhua 321004, China)

Abstract: A refinement-based triangular meshing algorithm is proposed to generate finite element meshes of arbitrary two-dimensional domains. The boundary is triangulated by the ear-removal method, constructing an initial mesh with coarse elements. To meet the pre-specified sizing requirement by refining the initial mesh, a novel mesh refinement method, Delaunay-optimized bisection, is presented. By combining global-longest-edge bisection with Delaunay edge swapping, well-shaped triangular elements are constructed. Meshing examples are presented along with mesh statistics, showing that the presented algorithm is capable of generating quality finite element meshes for arbitrary 2D domains.

Key words: triangular mesh; mesh generation; mesh refinement; delaunay-optimized bisection

有限元方法计算效率在很大程度上受有限元网格质量的影响^[1]。近几十年来, 有限元网格生成技术的研究取得了很大进展, 并出现了大量网格生成算法^[1-2]。由于三角面片几何相容性好, 非结构化三角网格成为一种常用的二维有限元网格, 其生成技术分为二叉树、波前法和 Delaunay 等三大类^[1], 其中, Delaunay 方法^[3]是迄今为止研究最多、应用最广泛的一类方法。Delaunay 三角网格中各单元的外接圆内不包含任何节点, 具有最小角最大特性, 但实际应用中, Delaunay 方法必须解决边界恢复^[4]和内点生成^[5]等问题。

1 算法概述

为生成二维三角网格, 本文提出基于 Delaunay 优化平分网格细化的网格生成算法, 用于实现复杂平面域的网格初始化和网格内点的生成与插入。该算法包括以下步骤: (1) 准备工作: 输入平面区域内、外边界; 合并内、外边界为一个边界多边形; 生成边界节点。(2) 初始网格生成: 对边界多边形用耳尖移除法做三角划分, 生成仅包含边界节点的初始网格。(3) 网格细化: 采用 Delaunay 优化平分方法在初始网格内部生成和插入新节点, 得到新的三角面片。(4) 网格优化: 用 Laplacian 光滑技术调整内部节点位置,

* 收稿日期: 2007- 12- 29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60773022); 国家 863 计划资助项目(2007AA01Z313); 北京市自然科学基金资助项目(4062034)

作者简介: 陈欣(1976-), 女, 博士生。

提高网格总体质量。

网格生成过程中,需根据预定义的网格密度生成边界节点和内部节点。网格密度采用节点间距(Node Spacing)^[10]。设线段两端 n_1 、 n_2 的节点间距分别为 h_1 、 h_2 ,则该线段中点 m 的节点间距为 $N_s(m) = \sqrt{h_1 h_2}$ 。若网格中某边的长度大于 $\sqrt{2h_1 h_2}$,则认为与这条边相邻的三角单元需要细分。

2 初始网格生成

连通区域边界可用简单多边形近似,根据网格密度离散该近似多边形,并做三角划分,得到一个包含所有边界节点和边界边的粗略初始网格。本算法采用耳尖移除法^[7]实现边界多边形的三角划分。如果多边形上的某顶点的前后相邻顶点的连线完全位于多边形内部,称该顶点为耳尖;耳尖与相邻两顶点形成一个耳尖三角形。三角划分过程如图1所示:在多边形上选择一个耳尖,切除该耳尖及对应的耳尖三角形;递归处理多边形剩余部分,直到多边形仅含三个顶点。为使划分结果尽可能符合最小角最大特性,引入一个启发式——每次选择的耳尖为当前内角最小者。



图1 耳尖移除法生成初始网格

Fig. 1 Construction of initial mesh by ear removal

在后期网格细化中,新的节点与单元均位于多边形内部,不会生成域外节点或域外单元,因而网格具有良好的几何相容性;细化阶段边界边保持不变,保证了网格边界的完整性,因此无需考虑边界恢复问题。

3 网格细化方法

给定初始网格与网格密度,生成内部节点,连接新的三角单元,在满足网格密度要求的同时,考虑网格单元的形状质量。各类细化技术^[8-10]对网格整体或局部进行加密,使网格更符合有限元方法的要求。

3.1 最长边平分

边平分^[9-10]是一类广泛使用的网格细化方法。对于初始网格中一个尺寸过大的单元(图2(a)),最长边平分方法找出该单元的最长边;连接最长边的中点与对顶点,共享该边的相邻单元同时被一分为二(图2(b))。这种方法以三角单元为基本检查单位,特点是简单易实现,且本单元细化质量较好。

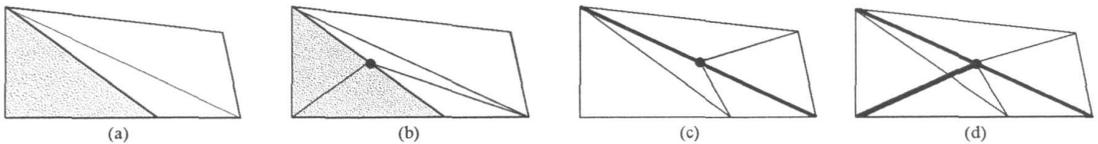


图2 边平分细化方法

Fig. 2 Edge bisections

从图2可发现,一个单元的最长边不一定是其相邻单元的最长边,将导致相邻单元的细化质量较差。为此,Lo^[10]提出全局最长边平分方法(如图2(c)所示):找出网格中所有待细化的边并按长度排序,平分其中的最长边。若输入的初始网格质量较好,全局最长边平分方法可获得高质量的网格细化结果^[10],但如果初始网格质量较差,则后续生成内点的位置不合理,导致最终网格质量不高。

3.2 Delaunay 优化平分

Delaunay 边交换^[4]是一种简单的拓扑变换,通过更改局部的节点连接方式提高网格质量。如图3所示,如果两个相邻三角单元违反 Delaunay 空圆准则,则把当前对角线 AB 变换为另一条对角线 CD 。

为优化内边连接方式, 本文结合 Delaunay 边交换与全局最长边平分方法, 提出 Delaunay 优化平分方法。一方面可在网格局部消除非 Delaunay 三角化, 提高新单元的质量; 另一方面, 可降低初始网格质量对内点生成的影响, 使内点分布更合理。Delaunay 优化平分方法如图 2(c)、(d) 所示: 首先平分全局最长边, 然后检查相邻单元的其余四条边, 若某条边的相邻单元违反 Delaunay 准则, 对其进行 Delaunay 边交换。

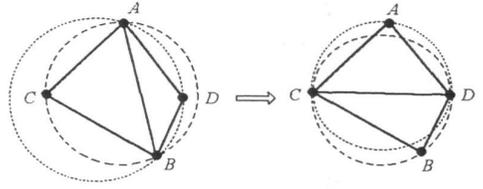


图 3 Delaunay 边交换
Fig. 3 Delaunay swapping

3.3 优先列表

网格细化开始前, 将网格中所有待细化的内部边根据长度按降序组成一个优先列表, 表头就是全局最长边。在细化处理过程中, 每平分一条全局最长边, 都及时更新优先列表, 以删除列表中已满足密度要求的边, 或增加未满足密度要求的新边。列表为空时, 表示当前网格已满足密度要求, 细化过程结束。

4 实验与结果

图 4 给出例 1(第一行)和例 2(第二行)用于比较全局最长边平分方法与 Delaunay 优化平分方法, 均生成均匀网格, 节点间距统一取值 2。图 4 的第一列为区域边界, 第二列为初始化网格, 第三、四列分别是用全局最长边平分方法和 Delaunay 优化平分方法得到的网格细化结果。表 1 和图 5 给出了相关的网格特征参数, 包括单元形状质量:

$$\alpha = 2\sqrt{3} \frac{\|AB \times AC\|}{\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|AC\|^2} \quad (2)$$

其中, $2\sqrt{3}$ 为标准化因子, 使得等边三角面片的 α 指标取最大值 1。

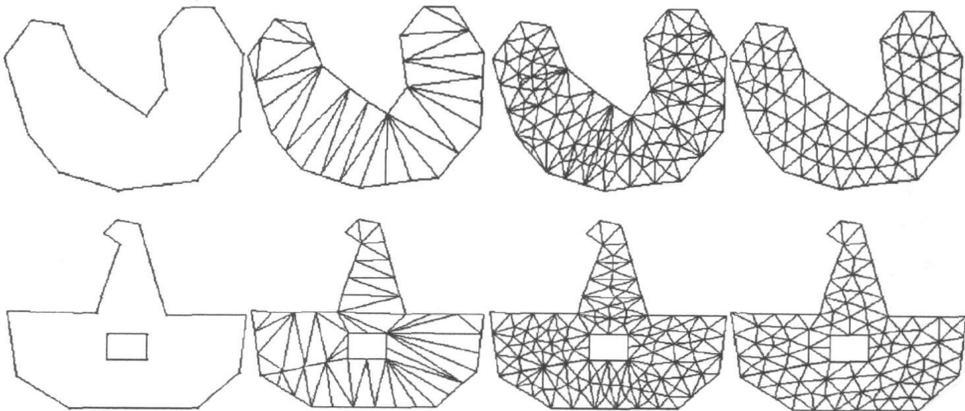


图 4 例 1、2: 全局最长边平分与 Delaunay 优化平分的比较

Fig. 4 Example 1, 2: Comparison of global longest edge bisection and Delaunay-optimized bisection

表 1 显示, Delaunay 优化平分方法细化结果所包含的内部节点和单元数量更少、单元形状质量更高。图 5 则显示, 全局最长边平分方法的细化结果的 α 指标主要分布在区间 $[0.3, 1.0]$ 上, 但 α 在 $[0.9, 1.0]$ 上的单元所占比例低于 50%; Delaunay 优化平分方法细化结果的 α 指标集中分布在 $[0.6, 1.0]$ 上, α 指标在 $[0.9, 1.0]$ 上的单元比例大于 75%。图表数据表明, 在给定的初始网格与网格密度相同的情况下, Delaunay 优化平分方法的细化结果均优于全局最长边平分方法。究其原因, 全局最长边平分方法对于在局部违反 Delaunay 准则的新单元不做连接调整, 导致新生成单元质量不高、内点分布不合理; 反之, Delaunay 优化平分方法及时消除局部非 Delaunay 三角化、修正内部边的连接方式, 从而使后续的内点生成与插入更为合理。

表 1 网格细化结果特征

Tab.1 Statistics of the final meshes

网格特征	例 1		例 2	
	方法 1	方法 2	方法 1	方法 2
边界点数	31	31	50	50
内节点数	87	49	80	53
单元数	203	127	211	154
平均连接度	5.5001	5.7959	5.3171	5.8491
α _最大值	0.9993	0.9997	0.9991	0.9996
α _最小值	0.3215	0.6160	0.3810	0.6254
α _平均值	0.7917	0.9588	0.8172	0.9337

方法 1: 全局最长边平分方法; 方法 2: Delaunay 优化平分方法

例 3 是一个包含孔洞和多种材质的平面区域, 典型的如下水管道。图 6(a) 为该平面区域的初始边界, 材质 A、B、C 处分别指定节点间距为 1、2、4。采用基于 Delaunay 优化平分的三角网格生成算法得到的三角网格如图 6(b) 所示, 从图中可见, 不同材质之间的边界保持完整, 且单元尺寸过渡均匀。该网格节点数为 209, 三角单元数为 352, 统计单元质量为 α , 平均值为 0.8233, 最小值为 0.5012。

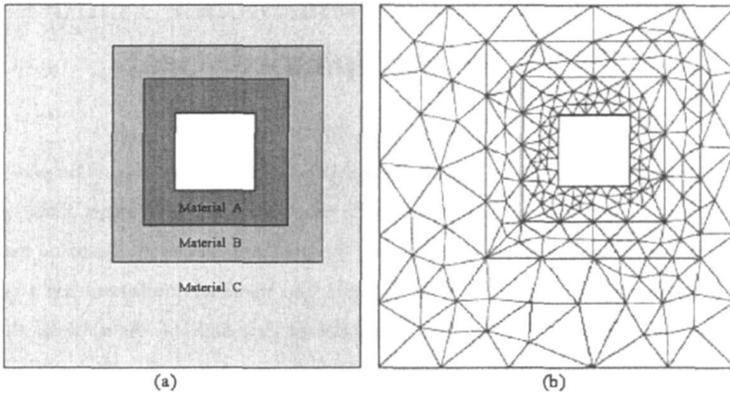


图 6 含孔洞、多材质平面区域的三角网格生成
Fig. 6 Triangular mesh of a multi-material domain with an opening

5 结论

提出基于 Delaunay 优化平分的二维有限元网格生成算法, 用于生成任意平面区域的三角网格。在初始网格生成方面, 算法用耳尖移除法对边界多边形进行三角划分, 得到的初始网格具有良好的几何相容性, 且无需考虑边界恢复。网格细化方面提出了 Delaunay 优化平分方法, 在每次全局最长边平分之后做 Delaunay 边交换, 以消除局部非 Delaunay 三角化情况, 使内点分布更合理。实验结果表明, 与传统的先细化、后优化的方法相比, 本文提出的算法更有利于生成高质量的二维有限元网格。

参考文献:

- [1] Owen S J. A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology [C]//Proc. 7th International Meshing Roundtable, Michigan, 1998: 239.
- [2] 关振群, 宋超, 顾元宪, 等. 有限元网格生成方法研究的新进展 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15: 1-14.
- [3] Lawson C L. Software for C1 Surface Interpolation [C]//Mathematical Software III, J. Rice (ed.), Academic Press, New York, 1977: 161-194.
- [4] Vigo M, Pla N. Computing Directional Constrained Delaunay Triangulations [J]. Computers & Graphics, 2000, 24: 181-190.
- [5] Baker T J. Triangulations, Mesh Generation and Point Placement Strategies [C]//Proc. Computing the Future, 1995: 61-75.
- [6] Shewchuk J R. What Is a Good Linear Element? Interpolation, Conditioning, and Quality Measures [C]//Proc. 11th International Meshing Roundtable, New York, 2002: 115-126.
- [7] 周培德. 计算几何: 算法分析与设计 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [8] Shewchuk J R. Delaunay Refinement Algorithms for Triangular Mesh Generation [J]. Computational Geometry: Theory and Application, 2002, 22: 86-95.
- [9] Rivara M C. New Longest-edge Algorithms for the Refinement and/or Improvement of Unstructured Triangulations [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40: 3313-34.
- [10] Lo S H. 3D Mesh Refinement in Compliance with a Specified Node Spacing Function [J]. Computational Mechanics, 1998, 21: 11-19.

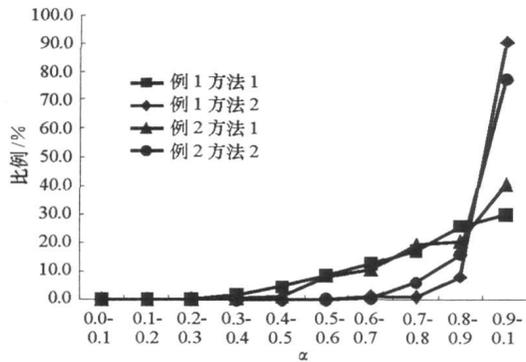


图 5 网格细化结果 α - 指标分布情况
Fig. 5 Distribution of α metrics of the final meshes