文章编号:1001-2486(2008)04-0107-04

线性系统测试矩阵优化*

杨拥民,黎　湘,庄钊文
(国防科技大学 机电工程与自动化学院,湖南 长沙　410073)

摘　要:研究了工程中常见的线性系统循环指数为 1(即其约当标准形不同的约当块不出现重根)的情况下测试矩阵优化的方法。通过将系统矩阵变换为约当标准型,能够简单地判定测试矩阵能否保持系统可观测。采用该方法可以在保持系统可观测的情况下,简单而直观地获取系统测试代价最小的测试策略。例子表明,该算法在工程上易于应用。

关键词:线性系统;可观测性;测试代价
中图分类号:TP13　　文献标识码:A

Measurement Matrix Optimization for Linear Systems

YANG Yong-min, LI Xiang, ZHUANG Zhao-wen
(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In this paper, the measurement matrix optimization approach is presented when the linear system's cycle index is 1, which is the case frequently occurring in the engineering application. The measurement matrix can be found when it can make the system observable by transferring the system matrix to Jordan canonical form. By this method, the best measurement setup to achieve the minimum cost can be obtained simply and with much intuition while the system keeps observable. An example shows that this algorithm can be easily applied in engineering.

Key words: linear system; observability; measurement cost

随着工程技术的不断发展,以及人类实践活动的不断复杂化,各种电子与机电系统的复杂度与规模越来越大,例如超大规模集成电路、大型雷达与航空航天器等等。这一趋势给了解系统的运行状态并进行可靠的控制与维护带来了很大的困难。

要了解系统的运行状态就需要通过传感器进行感知。从理论上说,在所有需要的地方配置相应的传感器,就可以尽可能详尽地了解设备的运行状态。实际上这样做是不现实的,一方面,大量传感器的购置、安装和维持的耗费巨大;另一方面,在许多局部区域不允许加装所需要的传感器。幸运的是,在工程上有许多手段解决这一类的问题。对于可以采用数学模型加以描述的动态系统,可以精心选择一些测试量,根据测试结果,采用系统状态观测的方法对不能直接检测的状态信息进行估计。近年来,基于模型的传感器优化配置研究已成为科学研究中一个热点的领域。

一类方法关注于应用卡尔曼滤波器的方差阵作为传感器位置优化的准则[1-4],主要是采用卡尔曼滤波器的方差阵的迹和行列式的值作为代价函数,以保证估计的精度。另一类方法则采用观测性矩阵与观测阵(observability gramian)作为传感器位置优化的依据。Muller 采用观测阵的最小奇值、行列式值以及逆矩阵的迹作为优化准则[5],Damak[6]和 Dochain[7]则采用观测性矩阵的条件数作为决策依据,van den Berg 则研究了应用观测阵的迹和谱范数作为依据的传感器位置优化问题。国内的吴俊伟[8]、黄翔宇[9]也研究了应用观测性矩阵的奇值来分析惯导系统的可观测性,王新龙[10]则研究了采用观测度的指标对观测集加以优化的问题。这一类方法主要是通过保证系统具有一定的可观测"裕度"以保证系统的可观测效果。

*　收稿日期:2008-02-27
基金项目:国家部委基金重点资助项目
作者简介:杨拥民(1966—),男,教授,在职博士生。

实际工程当中, 需要一种直观的方法研究系统本身的固有特性, 建立系统的可观测性与测试向量之间的直接联系, 为测试矩阵的配置提供一种简单实用的手段。文章讨论了保证系统具备可观测性的条件下, 求取测试矩阵使测试代价最小化的问题, 给出了一种工程上简易而有效的算法。

1 问题的描述

对于 n 维线性定常系统:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{h}_1 \quad \boldsymbol{h}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{h}_m]^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{h}_i \in \mathbf{R}^n$; 不失一般性, 设 $y_1 = \boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 是可以直接得到的系统输出值, $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 是为了监测系统的状态而取的测试点。将传感器及其检测通道的成本、可靠性等合并为"测试代价", 表示为 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = [0 \quad c_2 \quad c_3 \quad \cdots \quad c_m]$。问题是, 求传感器优化配置矩阵 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{I} \quad s_2\boldsymbol{I} \quad s_3\boldsymbol{I} \quad \cdots \quad s_m\boldsymbol{I}]$, 其中 $s_i = 1$ 或 0; $i = 2, 3, \cdots, m$, 并且 $\boldsymbol{I} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, 使得在保证系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{S} \odot \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{2}$$

可观测的条件下, 目标函数 $J_M = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$ 取最小值。其中⊙表示 Hadamard 积, 即

$$\boldsymbol{S} \odot \boldsymbol{H} = [s_1\boldsymbol{h}_1 \quad s_2\boldsymbol{h}_2 \quad \cdots \quad s_m\boldsymbol{h}_m]^{\mathrm{T}} P \tag{3}$$

2 线性系统可观测条件下代价最低的求解方法

针对这个问题, 有以下定理[11]:

定理 1 若存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 能够将系统(2)化为约当标准形, 即令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$, 能使得

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{S} \odot \boldsymbol{H}\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{J}$ 为约当标准形。若: (1) $\boldsymbol{J}$ 中没有两个约当块与同一特征值相关(即 $\boldsymbol{A}$ 的循环指数为 1), (2) $\boldsymbol{S} \odot \boldsymbol{H}\boldsymbol{P}$ 中与每个约当块第一行相对应的列, 没有一列元素全为零, (3) 对应于特征值互不相同的 $\boldsymbol{S} \odot \boldsymbol{H}\boldsymbol{P}$ 中没有一列包含的元素全为零, 则系统(2)可观测。

以下讨论两种不同的情况, 给出相应的传感器配置算法。

2.1 $\boldsymbol{A}$ 有 $\boldsymbol{n}$ 个相异特征值

此时, 设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$, P 为可逆矩阵, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 互不相同。并有

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{S} \odot \boldsymbol{H}\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]\boldsymbol{z} \tag{6}$$

根据定理 1 可以知道, 系统可观测的条件是矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的任何一列都不是零矩阵。

算法 1:

(1) 求 $\Sigma_s = \{\boldsymbol{S}_j \mid \boldsymbol{S}_j \odot \boldsymbol{H}\boldsymbol{P}$ 的任一列都不为零向量$\}$。这里 $\boldsymbol{S}_j$ 是式(2)中矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的一个实现;

(2) Σ_s 中若向量$(\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{S}_j)$所有的元都大于零, 则从 Σ_s 中剔除 $\boldsymbol{S}_i$;

(3) 取 Σ_s 中使 $\boldsymbol{S}_j\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 最小的 $\boldsymbol{S}_j$ 为最小代价解。

其中第(1)步是求取满足系统可观测条件的所有测试。第(2)步目的在于简化计算, 因为当测量 $\boldsymbol{S}_i$ 包含测量 $\boldsymbol{S}_j$ 时, 可以剔除后者而保持系统的可观测性。

2.2 系统能够化为特征值互不相同的约当标准型

设有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 经过 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$ 变换后, 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{J}_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{J}_{n_s}(\lambda_s) \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互不相同, 且 $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$。并有

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{S}\odot\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{z} \tag{8}$$

由定理 1 可知, 系统可观测的条件是 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量 $\boldsymbol{q}_j\neq\boldsymbol{0}$, $\forall j=1, n_1+1, \cdots, n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}+1$。

算法 2:

(1) 求 $\Sigma_s=\{\boldsymbol{S}_j \mid \boldsymbol{S}_j\odot\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}$ 的 $1, n_1+1, \cdots, n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}+1$ 的任一列都不为零向量$\}$;

(2) Σ_s 中若向量$(\boldsymbol{S}_i-\boldsymbol{S}_j)$所有的元都大于零, 则从 Σ_s 中剔除 $\boldsymbol{S}_i$;

(3) 取 Σ_s 中使 $\boldsymbol{S}_j\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 最小的 $\boldsymbol{S}_j$ 为最小代价解。

在实际工程中, 以上 2 种情况较为常见。但不排除在特殊情况下, 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有大于 1 的循环指数。这种情况下, 要进行较复杂的处理, 这里不再赘述。

从计算量上看, 2 类算法最多仅需要对 2^{n-1} 个测试配置进行计算, 针对每项测试的配置计算仅需要进行 1 次乘法和数次判别。算法相对观测性矩阵的计算具有相对的简单快捷的特点。

3 算 例

对于系统:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix} \tag{9}$$

已知第一项输出 y_1 为固定输出, $y_2\sim y_5$ 为可以附加的测试点。它们的测试代价相应为 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=[0 \quad 2.0 \quad 0.8 \quad 0.5 \quad 1.2]$。求保证系统可观测的条件下, 测试代价最低的测点配置。

通过矩阵变换:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 1.5 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}\boldsymbol{z} \tag{10}$$

得到

$$\begin{bmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \\ \dot z_3 \\ \dot z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{S} \odot \boldsymbol{H}) \boldsymbol{P} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{S} \odot (\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}) \boldsymbol{z} = \boldsymbol{S} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0.5 & 1 & 9.5 & -6 & 2.5 \\ 0.5 & 1 & 3.5 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 11 & -2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}$$

求取使得 $\boldsymbol{S} \odot \boldsymbol{HP}$ 满足第1列、第2列、第4列的元素不全为零的 Σ_s。经过简单计算与观察, 可以知道符合要求的2测点输入配置为 $\boldsymbol{S}$ 取[1 0 1 0 0]、[1 0 0 1 0]、[1 0 0 0 1] ($\boldsymbol{S}$ 取[1 1 0 0 0]时系统是不可观测的), 其他任何一个取2个以上测点的输入配置均包含上述配置。所以, 经过简化的 Σ_s 为{[1 0 1 0 0]、[1 0 0 1 0]、[1 0 0 0 1]}。由于相应 $y_2 \sim y_5$ 测试代价为2.0, 0.8, 0.5, 1.2, 可知当附加测点取 y_3 时, 测试代价最低。

对算例进行计算量评估可以发现, 系统输出配置可能性有16种。如果对这16种情况都进行计算, 传统的方法要进行64次矩阵乘积, 16次矩阵求秩和16次判定。而采用本文提出的方法, 仅需要进行1次约当标准形变换(一般的方法仅需要对矩阵进行4次向量加减运算和5个以下的不定方程求解), 然后进行1次矩阵乘积与16次判定。更重要的是, 在测试向量的配置具有很大选择性时, 可以方便地根据 $\boldsymbol{A}$ 的约当标准形的特点, 对测试向量进行设计。对于本算例, 仅需要选择第1、第2、第4列的测试向量不为零。

4 结 论

研究了保持系统可观测的情况下, 简单而直观地获取系统测试代价最小的测试策略。两种情况下的优化算法通过将系统矩阵变换为约当标准型, 能够简单地判定测试矩阵能否保持系统可观测。通过算例仿真研究可以发现, 提出的算法具有简单可靠、容易进行直观判断的特点。在系统循环指数大于1时, 情况较为复杂, 相应的算法还要进行进一步的研究。

参 考 文 献:

[1] Omatu S, Koide S, Soeda T. Optimal Sensor Location for a Linear Distributed Parameter System [J]. IEEE Trans. Autom. Control, 1978, 23.

[2] Kumar S, Seinfeld S H. Optimal Location of Measurements in Tubular Reactors [J]. Chem. Eng. Sci., 1978, 33.

[3] Colantuoni G, Padmanabhan L. Optimal Sensor Location or Tubular-flow Reactor Systems [J]. Chem. Eng. Sci., 1977, 32.

[4] Harris T J, Macgregor J F, Wright J D. Optimal Sensor Location with an Application to a Packed Bed Tubular Reactor [J]. AIChE J., 1980: 26.

[5] Muller P C, Weber H I. Analysis and Optimization of Certain Quantities of Controllability and Observability for Linear Dynamic System [J]. Automatica, 1972, 8: 237.

[6] Damak T, Babary J P, Nihtila M T. Observer Design and Sensor Location in Distributed Parameter Bioreactors [C]//Proceedings of DYCORD, 1992: 87.

[7] Dochain D, Tali-mammar N, Babary J P. On Modeling, Monitoring and Control of Fixed Bed Bioreactors [J]. Comput. Chem. Eng. 1997, 21.

[8] 吴俊伟, 孙国伟, 张如, 张媛. 基于SVD方法的INS传递对准的可观测性能分析[J]. 中国惯性技术学报, 2005, 13: 26-30.

[9] 黄翔宇, 崔平远, 崔祜涛. 深空自主导航系统的可观性分析[J]. 宇航学报, 2006, 27: 332-358.

[10] 王新龙. 惯导系统可观测性及最佳可观测子空间的定量研究[J]. 宇航学报, 2006, 27: 345-348.

[11] 绪方胜彦. 现代控制工程[M]. 北京: 科学出版社, 1984.