

文章编号: 1001- 2486(2008) 04- 0125- 04

一种改进的 MCM 算法*

姚 伟, 孙即祥, 谭志国

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 平均曲率运动模型(MCM)是基于偏微分方程的图像处理模型的一种, 具有明确的几何意义。提出了模型中退化扩散项的精确计算方法, 并采用了两种新的方向估计方法。实验证明了新方法所得的结果优于原方法。

关键词: 平均曲率运动模型; 退化扩散项; 方向估计; 张量

中图分类号: TP391 文献标识码: A

Improved Mean Curvature Motion

YAO Wei, SUN Ji-xiang, TAN Zhi-guo

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: One of the most important model in image processing based on partial difference equations is the mean curvature motion model, which has a geometric property. An accurate calculation method to the degenerating diffusion term in this model is proposed, adopting two new orientation estimation methods—one based on the Hessian matrix and one based on tensor—and then making a comparison between the two. The results of the experiments prove that these measurements are effective.

Key words: mean curvature motion; degenerate diffusion term; orientation estimation; tensor

从 20 世纪 80 年代末至今, 利用偏微分方程(PDE)理论进行图像处理的技术有了很大发展。1984 年 Koenderink^[1]注意到高斯滤波与常扩散率的扩散方程等价; 1987 年, Perona, Malik^[2]提出 PM 方程, 在很大程度上解决了高斯滤波存在的问题。PM 方程实质上是扩散率具有空间自适应性的扩散方程。之后出现了大量关于 PM 方程的分析、改进及应用, 其他基于 PDE、变分等原理的模型(如 MCM^[4]、张量扩散率的扩散模型^[6]、Shock 滤波器^[7]等)也与 PM 方程有着很大的联系。基于 PDE 的图像处理方法有如下优点:

(1) 基于 PDE 的算法在具有不同图像特征的区域产生不同的模板滤波, 而线性算法通常产生统一的滤波模板对整个图像进行滤波, 因而前者的处理效果要好。

(2) 由于 PDE 已经具有一套严密的理论, 使得算法便于理论分析。

(3) 已经有大量针对 PDE 的成熟的或先进的数值算法。

(4) 图像由二维图像扩展到多维时, 基于 PDE 的算法也可以很容易地进行扩展。

Alvarez^[4]等人提出了 MCM 方程, 阐述了其模型与 PM 方程的联系, 这种模型由于有很好的几何解释而备受关注; 随后他们^[5]进一步证明了满足一些条件的图像尺度空间都可以由相应的抛物形 PDE 导出, 并提出了具有仿射不变性的多尺度分析方程。Yu^[8]提出将 GVF(Gradient Vector Flow)与 PDE 相结合, 改写了 PM 方程、MCM 方程及 Shock 滤波器方程。Alvarez 对 MCM 方程中退化扩散项采用了近似计算的方式, 且采用梯度对方向进行估计, 这容易受到噪声影响^[11]。本文介绍的方法可以解决这些问题。

1 平均曲率运动模型

文献[4]中引入了如下的平均曲率运动(MCM)模型:

* 收稿日期: 2008- 01- 06

作者简介: 姚伟(1981-), 男, 博士生。

$$\begin{cases} u_t = g(|\Delta u_0|) u_{\xi\xi}, & (x, y, t) \in \Omega \times [0, +\infty) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ \partial u / \partial \alpha(n) |_{(x,y) \in \partial \Omega} = 0, & t \in (0, +\infty) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $u_0(x, y)$ 为原图像, $u = u(x, y, t)$ 为迭代产生的平滑图像, Ω 为图像定义域, $\alpha(n)$ 为 Ω 边界单位外法矢量 n 的方向, $u_{\eta\eta}$ 、 $u_{\xi\xi}$ 为梯度及轮廓方向的二阶方向导数(图 1), Δu_0 是被方差为 σ 的高斯函数平滑的梯度。MCM 模型主要依靠以下两点产生很好的滤波结果:

(1) $u_{\xi\xi} = |\Delta u| \operatorname{div}(\Delta u / |\Delta u|) = \Delta u - u_{\eta\eta}$ 是一个退化的扩散项, 它使得模型仅沿着图像的梯度垂直方向平滑, 而梯度方向则没有平滑。

(2) 函数 $g(\cdot)$ 负责控制滤波量, 梯度模值小的点上平滑量增加, 模值大则减少。

文献[4]对退化扩散项作了近似计算, $u_{\xi\xi} \cdot \sum_{j=1}^n f_j \left(\frac{\Delta u}{|\Delta u|} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, 即退化扩散项由 n 个固定方向的二阶方向导数的加权和来近似, 同时证明了只有当 n 趋近于无穷大并满足一定条件时, 上式才能成为等号; 否则, 上式只是近似。最后, 算法在数值实现时, 取 $n = 4$, 如图 2 所示。

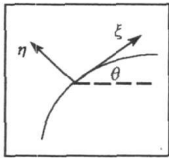


图 1 平滑方向示意图

Fig. 1 Direction of smoothing

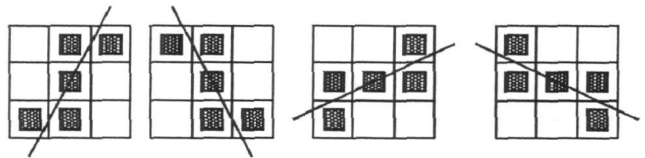


图 2 四个固定方向的二阶方向导数近似

Fig. 2 Approximation by four second order derivatives of fixed direction

即由相邻的两个便于计算二阶导数的方向来近似 $u_{\xi\xi}$, 最后采用的实现模型为

$$u_t = g(|\Delta u_0|) \left\{ [1 - h(|\Delta u|)] \Delta u + h(|\Delta u|) \sum_{j=1}^n f_j \left(\frac{\Delta u}{|\Delta u|} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right\} \quad (2)$$

其中, $h(\cdot)$ 为一不减函数, 实验中取为 $h(s) = 0, s < e; h(s) = (s/e - 1)^2, e \leq s < 2e; h(s) = 1, s \geq 2e, e$ 为阈值。这样, 在区域内部采用各向同性平滑, 在梯度模值较大处采用 MCM 模型。

文献[11]中指出了采用梯度来计算图像特征的方向是易受到噪声影响的。

2 改进的 MCM 算法

2.1 精确的退化扩散项计算方法

不妨设方向 ξ 的角度为 θ (如图 1 所示), 记 $u_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$, 则经过简单的推导可以得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

这样只要方向 θ 估计精确, 就可以在一个 3×3 的模板上精确地计算退化扩散项。

2.2 最大二阶方向导数法估计特征方向

文献[11]认为具有最大二阶方向导数的方向更适合于做图像特征的方向。将 Hessian 矩阵进行特征分解, 得到 $\begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{bmatrix} = \lambda_1 n_1 n_1^T + \lambda_2 n_2 n_2^T$, 其中 $\lambda (i = 1, 2)$ 为特征值, 不妨设 $\lambda_1 > \lambda_2, n_1 = [\cos \varphi \quad \sin \varphi]^T, n_2 = [-\sin \varphi \quad \cos \varphi]^T$, 代入式(3)计算得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \lambda_1 \cos^2(\theta - \varphi) + \lambda_2 \sin^2(\theta - \varphi) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cos^2(\theta - \varphi) + \lambda_2 \quad (4)$$

当 $\theta = \varphi$ 时, 二阶方向导数取得最大值 λ_1 , 即需计算 Hessian 矩阵最大特征值的特征方向。此时 $u_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \lambda_1$ 。需要指出的是, 这里得出的方向与梯度方向并不是完全一致的。

2.3 张量方法估计方向^[12]

张量估计方向的方法利用了简单邻域的假设,即对于图像的绝大部分点,存在邻域使得 $u(x, y) = f(x^T n)$, 其中 $x = [x, y]^T$ 为局部坐标, n 为一固定方向。这一假设主要是基于通常“图像梯度的变化与图像灰度的变化相比是很慢的”这一结论。利用正交滤波器组对图像进行滤波,通过其输出构造方向张量,得到的张量表示为 $T = Ann^T$, 从张量中可以恢复出方向信息,这里 A 为与滤波器响应有关的常数,不影响方向的估计。

3 实验结果及分析

首先进行方向估计结果对比实验,我们对梯度估计方法、最大二阶方向导数估计法及张量估计方法进行了对比,实验结果如图3。可以看出,梯度估计方法对阶跃型边缘与线条型边缘适应性不够好,而最大二阶方向导数法对部分边缘的方向估计有错误,张量估计方法整体估计结果都比较正确。

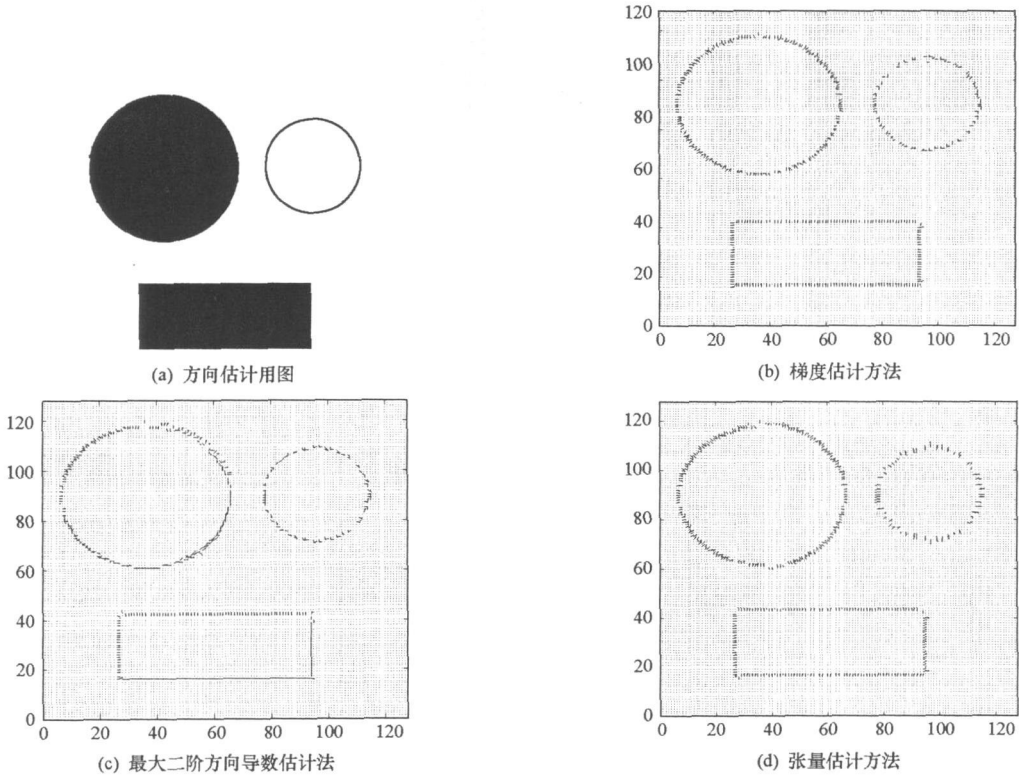


图3 方向估计结果对比

Fig.3 Comparison of different orientation estimation methods

对改进的MCM 算法,进行了两组实验。第一组实验是对合成图像进行处理(图4),从结果可以看出,在形状边缘处,原文方法结果与 Hessian 方法估计方向的结果的噪声较强,采用张量方法估计方向的结果则稍好,从图像信噪比的计算结果也可以得出这个结论。这是由于前两种方法方向估计的结果不够准确,从而导致边缘处的噪声不能很好地去掉,也与第三种方法采用了精确的退化扩散项计算方法有关。采用的信噪比计算方法^[13]为

$$SNR = 10 \lg(\text{图像信号的方差} / \text{噪声方差})$$

其中图像信号方差取信号局部方差最大值,噪声方差取平坦区域上的局部方差平均值。

第二组实验是对真实的医学图像进行的处理(图5),从结果我们可以得到类似的结论。从图6的直方图分析可以看出,前两种方法的直方图在最亮点处均有很高的一个冲击,表明杂散的亮点较多,而第三种方法中整个图像则比较均衡。直方图分析中为了突出显示有意义的部分,略去了像素值为 0~50 的数据。

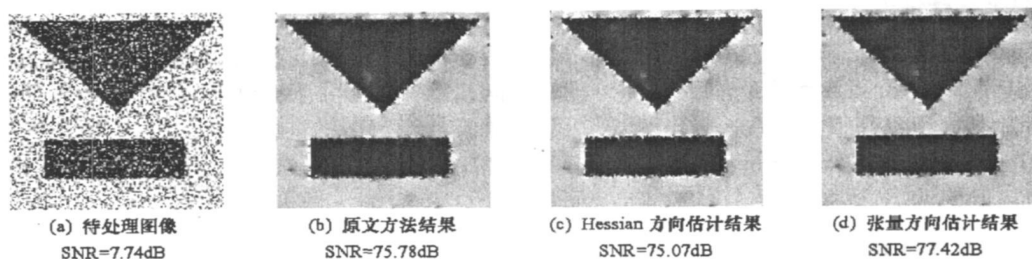


图 4 改进的 MCM 算法对合成图像进行处理

Fig. 4 Comparison of different deblurring methods to synthetic image

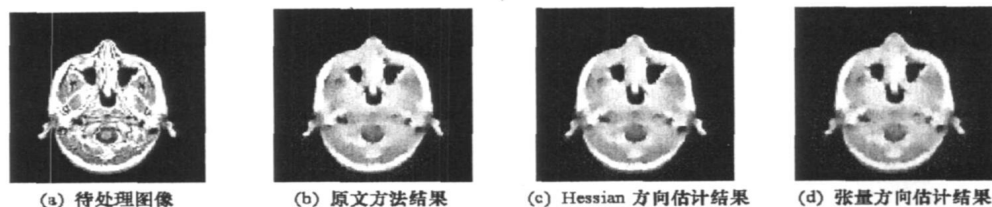


图 5 改进的 MCM 算法对医学图像进行处理

Fig. 5 Comparison of different deblurring methods to medical image

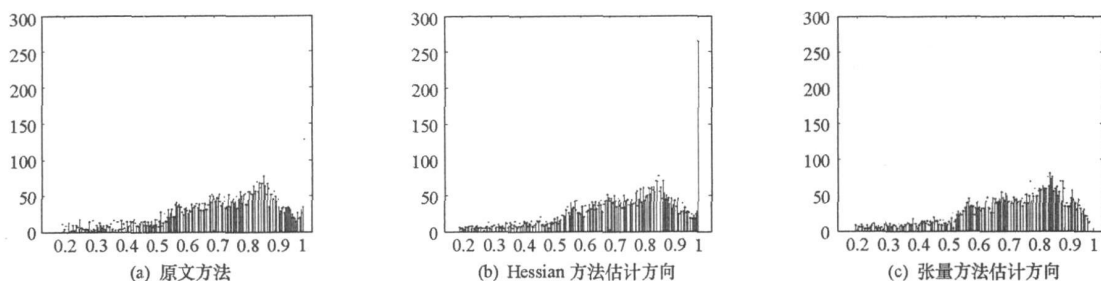


图 6 图 5 实验结果的直方图分析

Fig. 6 Histogram analysis of results of Fig. 5

4 结束语

精确计算退化扩散项的方法并没有增加算法计算复杂度,采用更好的张量方向估计方法,使得方向的估计更稳健、更准确,实验结果表明了这些改进的有效性。现有的论文还表明了 MCM 以及很多基于 PDE 的算法在对角点的处理结果上不甚理想,下一步的工作将集中于多方向估计改善其角点处理结果。

参考文献:

- [1] Koenderink J J. The Structure of Images[J]. *Biol. Cybern.*, 1984, 50: 363- 370.
- [2] Perona P, Malik J. Scale Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion[C]//*Proc. IEEE Comp. Soc. Workshop on Computer Vision*, IEEE Computer Society Press, 1987: 16- 22.
- [3] Catt F, Lions P L, Morel J M, et al. Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion[J]. *SIAM*, 1991, 29(1): 182- 193.
- [4] Alvarez L, Guichard F, Lions P L, et al. Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion (II) [J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1992, 29(3): 845- 866.
- [5] Alvarez L, Guichard F, Lions P L, et al. Axioms and Fundamental Equations in Image Processing[J]. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1993, 123: 199- 257.
- [6] Weickert J. Anisotropic Diffusion in Image Processing[D]. PhD. Thesis, University of Kaiserslautern, 1996.
- [7] Osher S, Rudin L. Feature-oriented Image Enhancement Using Shock Filters[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1990, 27: 919- 949.
- [8] Yu H C, Chua C S. GVF-Based Anisotropic Diffusion Models[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(6): 1517- 1524.
- [9] 孙即祥. 图像处理[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 159- 161.
- [10] Gilboa G. Super-resolution Algorithms Based on Inverse Diffusion-type Processes[D]. Israel Institute of Technology, 2004.
- [11] Camona R A, Zhong S. Adaptive Smoothing Respecting Feature Directions[J]. *IEEE Trans. Image Processing*, 1998, 7(3): 353- 358.
- [12] Knutsson H. Representing Local Structure Using Tensors[R]. 6th Scandinavian Conference on Image Analysis, Oulu, Finland, 1989: 244- 251.
- [13] 邹谋炎. 反卷积和信号复原[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001: 186- 189.