文章编号: 1001- 2486(2008) 04- 0133- 04

关于半鞅向量随机积分的一个注*

屈田兴
(国防科技大学 理学院,湖南 长沙　410073)

摘　要:建立了半鞅向量随机积分的一个结果,能方便处理可料过程在向量随机积分意义下对半鞅的分解随可料过程不同而不同的问题。作为其应用,给出了有关文献中定理的简洁证明。并利用其思想,得到了半鞅向量随机积分的一个重要性质。

关键词: 半鞅; 向量随机积分; 可料过程; 特殊半鞅的典则分解
中图分类号: O211. 6　　文献标识码: B

A Note on the Vector Stochastic Integrals with Rsspect to Semimartingales

QU Tian-xing
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In this paper, the vector stochastic integrals are considered with respect to semimartingales. It establishes a result which can be easily applied to the problem derived from the different predictable process in the decomposition of semimartingales in the sense of vector stochastic integrals. As its applications, a straightforward proof of theorem 4. 2 and theorem 4. 6 in ref. is provided, and by using this idea, an important property of the vector stochastic integrals with respect to semimartingales is presented.

Key words: semimartingale; vector stochastic integral; predictable process; canonical decomposition of special semimartingale

由于多维半鞅按分量的随机积分(componentwise stochastic integral) 只是各分量随机积分的简单相加,难以很好地体现出各分量之间的相互关系。所以它不仅在随机分析某些领域明显不足,而且在应用上也是不够的。向量随机积分正是为改善按分量随机积分的局限性在近年来引入的。文献[2] 对向量随机积分的产生背景、概念、一般性质以及它在解决一般情形下的资产定价基本定理中的应用给出了系统的介绍,展示出向量随机积分不仅是按分量随机积分的推广,而且具有随机积分的一般性质,同时在理论上更优越,在应用中更重要。特别是对于数理金融学而言,可料过程对半鞅的向量随机积分可以说是不可或缺的工具,这是由于投资者的投资策略是一个可料过程,而金融市场中金融资产的价格过程是一个半鞅,于是投资者的资本过程就是一个可料过程对价格过程的随机积分[4]。因此对半鞅向量随机积分的进一步研究是很有意义的。

1　预备知识

本文将以带滤基的完备概率空间($\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{F}, \mathbf{P}$) 作为基本空间,其中滤基$\mathrm{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$满足通常条件。设 d 是给定的自然数,令

$\mathscr{V}^d$ ——d 维适应有限变差过程的全体;

$\mathscr{A}^d$ ——d 维适应可积变差过程的全体;

$\mathscr{M}^d$ ——d 维一致可积鞅的全体;

$\mathscr{S}^d$ ——d 维半鞅的全体;

$\mathscr{S}_p^d$ ——d 维特殊半鞅的全体。

* 收稿日期:2008- 01- 22
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60673090)
作者简介:屈田兴(1957—) , 男, 副教授, 在职博士生。

对上述任一过程类 $\mathscr{D}$, 用 $\mathscr{D}_0$ 表示 $\mathscr{D}$中具有零初值的过程的全体, $\mathscr{D}_{loc}$表示 $\mathscr{D}$的局部化类。如 $M \in \mathscr{M}_{loc}^d$ 表示 M 是 d 维局部鞅, $M \in \mathscr{M}_{loc,0}^d$表示 M 是具有零初值的d 维局部鞅。当 $d=1$ 时, 上述过程类的上标 d 将省略不写。如 $\mathscr{S}$表示一维半鞅的全体。

总假设上述过程类中的过程是右连左极过程, 并且两个过程相等是指这两个过程无区别。

对 $A \in \mathscr{V}^d$, 令 $L_{var}(A)$ 为在向量 Stieltjes 积分意义下对 A 可积的d 维可料过程的全体。若 $H \in L_{var}(A)$, 则相应的积分记为$(LS)H \cdot A$。在不致混淆时可简记为 $H \cdot A$。

对 $M \in \mathscr{M}_{loc}^d$, 令 $L_{loc}^1(M)$ 为在局部鞅向量随机积分意义下对 M 可积的d 维可料过程的全体。若 $H \in L_{loc}^1(M)$, 则相应的积分为$(M)H \cdot M$。在不致混淆时可简记为 $H \cdot M$。

对$X \in \mathscr{S}^d$, 令 $L(X)$ 为在半鞅向量随机积分意义下对 X 可积的 d 维可料过程的全体。若 $H \in L(X)$, 则相应的积分记为 $H \cdot X$。

对一维过程 K 与 d 维过程$H=(H^1, \cdots, H^d)$, 约定 $KH=(KH^1, \cdots, KH^d)$。

对 $X \in \mathscr{S}$, 记 $\Delta X = X - X_-$为X 的跳过程, 即 $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$, $t \geqslant 0$。对 $X=(X^1, \cdots, X^d) \in \mathscr{S}^d$, 记 $\Delta X = (\Delta X^1, \cdots, \Delta X^d)$。

本文还需要引用文献[2]中如下结论。

引理 1 设 $X=(X^1, \cdots, X^d) \in \mathscr{S}^d$。且 X 具有有界跳(即存在 $c \geqslant 0$, 使得$|\Delta X^i| \leqslant c$, $i=1, \cdots, d$), 则 $X \in \mathscr{S}_p^d$。

引理 2 设 $M \in \mathscr{M}_{loc}^d, H_1, H_2 \in L_{loc}^1(M)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, 则 $\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 \in L_{loc}^1(M)$, 且

$$(M)(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2) \cdot M = \alpha_1 (M) H_1 \cdot M + \alpha_2 (M) H_2 \cdot M$$

引理 3 设 $A \in \mathscr{V}^d, H_1, H_2 \in L_{var}(A)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, 则 $\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 \in L_{var}(A)$, 且

$$(LS)(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2) \cdot A = \alpha_1 (LS) H_1 \cdot A + \alpha_2 (LS) H_2 \cdot A$$

引理 4 设 $A=(A^1, \cdots, A^d) \in \mathscr{V}^d$, 则 $L(A) = L_{var}(A)$, 且对 $H=(H^1, \cdots, H^d) \in L(A)$, 有

$$H \cdot A = (LS) H \cdot A, \quad \Delta(H \cdot A) = \sum_{i=1}^{d} H^i \Delta A^i$$

引理 5 设 $M \in \mathscr{M}_{loc}^d, H \in L_{loc}^1(M)$, K 是一维可料过程, 则

$$K \in L_{loc}^1(H \cdot M) \Leftrightarrow KH \in L_{loc}^1(M)$$

这时有

$$(M) K \cdot ((M) H \cdot M) = (M)(KH) \cdot M$$

引理 6 设 $A \in \mathscr{V}^d, H \in L_{var}(A)$, K 是一维可料过程, 则

$$K \in L_{var}(H \cdot A) \Leftrightarrow KH \in L_{var}(A),$$

这时有

$$K \cdot (H \cdot A) = (KH) \cdot A$$

引理 7 设 $X_1, X_2 \in \mathscr{S}^d, H \in L(X_1) \cap L(X_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, 则 $H \in L(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)$, 且

$$H \cdot (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1 H \cdot X_1 + \alpha_2 H \cdot X_2$$

引理 8 设 $X \in \mathscr{S}_p^d$, $X = M + A$ 是X 的典则分解(即 $M \in \mathscr{M}_{loc}^d, A \in \mathscr{V}_0^d$, 且 A 是可料过程)。若 $H \in L(X)$, 则

$$H \cdot X \in \mathscr{S}_p \Leftrightarrow X = M + A \text{ 是} X \text{ 的} H-\text{分解}$$

这时 $H \cdot X = (M) H \cdot M + H \cdot A$ 是$H \cdot X$ 的典则分解。

2 主要结果及证明

定理 1 设 $X=(X^1, \cdots, X^d) \in \mathscr{S}^d$, D 是可选集。若 $H=(H^1, \cdots, H^d) \in L(X)$ 满足下列条件:

(a) $\{\exists i \in \{1, \cdots, d\}$, 使$|\Delta X^i| > 1$, 或$|\Delta(H \cdot X)| > 1\} \subseteq D$;

(b) 对 $a.s.\ \omega$, $\{s \in \mathbf{R}_+ : (\omega, s) \in D\} \cap [0, t]$ 对一切 $t \geqslant 0$ 都是有限集。

令

$$A_t = \sum_{s \leqslant t} \Delta X_s I_{[(\cdot, s) \in D]}, \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

$$Z_t = X_t - A_t, \quad t \geqslant 0 \tag{2}$$

则

(1) $Z \in \mathscr{S}_p^d, H \in L(Z), H \cdot Z \in \mathscr{S}_p$;

(2) 若 $Z = N + B$ 是 Z 的典则分解(即 $N \in \mathscr{M}_{loc}^d$, $B \in \mathscr{V}_0^d$, 且 B 是可料过程), 那么 $Z = N + B$ 是 Z 的一个 $H-$ 分解, 且 $X = N + (B + A)$ 是 X 的一个 $H-$ 分解。

证明 (1) 记 $A = (A^1, \cdots, A^d)$, 则由(b) 可知 A_t 有意义, 且 A^i 是阶梯的有限变差过程($i = 1, \cdots, d$)。于是 $H \in L_{var}(A)$, $\Delta(H \cdot A) = \sum_{i=1}^{d} H^i \Delta A^i$。进而由引理 4 得出 $H \in L(A)$。再由引理 7 可知 $H \in L(Z)$。

由(a) 推出 $|\Delta Z^i| \leqslant 1 (i = 1, \cdots, d)$。根据引理 1, $Z \in \mathscr{S}_p^d$。注意到 $|\Delta(H \cdot Z)| = |\Delta(H \cdot X) - \Delta(H \cdot A)| \leqslant 1$ 就得到 $H \cdot Z \in \mathscr{S}_p$。

(2) 由(1) 及引理 8 推出 Z 的典则分解 $Z = N + B$ 是 Z 的一个 $H-$ 分解, 即 $H \in L_{loc}^1(N)$, $H \in L_{var}(B)$。从而 $H \in L_{var}(A + B)$。因此 $X = N + (B + A)$ 是 X 的一个 $H-$ 分解。

定理 1 的意义在于: 对给定的 $X \in \mathscr{S}^d$, A 与 Z 是由 D 所确定的, 而对 $H_1, \cdots, H_n \in L(X)$ 同时满足(a), (b) 的可选集 D 是容易获得的。这样 $X = N + (B + A)$ 是 X 对每个 H_k 的 H_k- 分解, 即诸 H_k 的一个公共分解。下面利用定理 1 给出文献[2] 中定理 4.2 与定理 4.6 的简洁证明。

定理 2 设 $X \in \mathscr{S}^d$, $H_1, H_2 \in L(X)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, 则 $\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 \in L(X)$, 且

$$(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2) \cdot X = \alpha_1 H_1 \cdot X + \alpha_2 H_2 \cdot X \tag{3}$$

证明 令 $D = \{\exists i \in \{1, \cdots, d\}$, 使 $|\Delta X^i| > 1$, 或 $|\Delta(H_1 \cdot X)| > 1$, 或 $|\Delta(H_2 \cdot X)| > 1\}$, 则由 X, $H_1 \cdot X$, , $H_2 \cdot X$ 的适应右连左极性推出 D 是可选集, 且 D 对 H_1, H_2 同时满足定理 1 的条件(a) 与(b)。按照上述 D 如定理 1 得到 A, N, B, 则

$$X = N + (B + A) \tag{4}$$

既是 X 的 H_1- 分解, 又是 X 的 H_2- 分解。于是由引理 2 与引理 3, 式(4) 也是 X 的 $(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2)-$ 分解, 从而 $\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 \in L(X)$, 且式(3) 成立。

定理 3 设 $X = (X^1, \cdots, X^d) \in \mathscr{S}^d$, $H = (H^1, \cdots, H^d) \in L(X)$, K 是一维可料过程, 则

$$KH \in L(X) \Leftrightarrow K \in L(H \cdot X) \tag{5}$$

这时

$$(KH) \cdot X = K \cdot (H \cdot X) \tag{6}$$

证明 (必要性) 设 $KH \in L(X)$, 令

$$D = \{\exists i \in \{1, \cdots, d\}, 使 |\Delta X^i| > 1, 或 |\Delta(H \cdot X)| > 1, 或 |\Delta((KH) \cdot X)| > 1\}$$

则 D 关于 H, KH 满足定理 1 的条件(a) 与(b)。对上述 D 按定理 1 做出 A, N, B, 则 $X = N + (B + A)$ 既是 X 的 $H-$ 分解, 又是 X 的 $KH-$ 分解, 且有

$$H \cdot X = H \cdot N + H \cdot (B + A)$$

$$(KH) \cdot X = (KH) \cdot N + (KH) \cdot (B + A)$$

于是由引理 5 与引理 6 得 $K \in L(H \cdot X)$, 且

$$K \cdot (H \cdot X) = K \cdot (H \cdot N) + K \cdot (H \cdot (B + A)) = (KH) \cdot N + (KH) \cdot (B + A) = (KH) \cdot X$$

(充分性) 设 $K \in L(H \cdot X)$, 令

$$D = \{\exists i \in \{1, \cdots, d\}, 使 |\Delta X^i| > 1, 或 |\Delta(H \cdot X)| > 1, 或 |\Delta(K \cdot (H \cdot X))| 1| > 1\} \tag{7}$$

对式(7) 中的 D 与 X 以及 H 用定理 1 得出相应的 A, Z, N, B, 使 $Z \in \mathscr{S}_p^d$, $Z = N + B$ 是 Z 的典则分解, 又是 Z 的 $H-$ 分解, $X = N + (B + A)$ 是 X 的 $H-$ 分解, 同时 $H \cdot Z \in \mathscr{S}_p$, $H \cdot Z$ 的典则分解是

$$H\bullet Z=H\bullet N+H\bullet B \tag{8}$$

再对式(7)中的 D 与 $\tilde{X}=H\bullet X$ 以及 K 用定理 1 得出相应的 A, Z, N, B，将它们分别记为 $\tilde{A}, \tilde{Z}, \tilde{N}, \tilde{B}$，则 $\tilde{Z}\in\mathscr{S}_p$，$\tilde{Z}=\tilde{N}+\tilde{B}$ 是 $\tilde{Z}$ 的典则分解，又是 $\tilde{Z}$ 的 $K-$ 分解。按 A 的定义有 $\Delta X_s I_{[(\cdot,s)\in D]}=\Delta A_s$ 对一切 $s\geqslant 0$ 成立。进而由 $\tilde{A}$ 的定义，有

$$\begin{aligned}\tilde{A}_t &= \sum_{s\leqslant t}\Delta\tilde{X}_s I_{[(\cdot,s)\in D]} = \sum_{s\leqslant t}\sum_{i=1}^{d} H_s^i\Delta X_s^i I_{[(\cdot,s)\in D]}\\ &= \sum_{s\leqslant t}\sum_{i=1}^{d} H_s^i\Delta A_s^i = \sum_{s\leqslant t}\Delta(H\bullet A)_s = (H\bullet A)_t\end{aligned}$$

对一切 $t\geqslant 0$ 成立，这里 $A=(A^1,\cdots,A^d)$，最后一个等式用到 A 是阶梯的有限变差过程以及 $H\bullet A$ 是 Stieltjes 积分。上式表明 $\tilde{A}=H\bullet A$。由此得到

$$\tilde{Z}=\tilde{X}-\tilde{A}=H\bullet X-H\bullet A=H\bullet(X-A)=H\bullet Z \tag{9}$$

故 $K\in L(\tilde{Z})=L(H\bullet X)$。由特殊半鞅的典则分解的惟一性，式(8)以及式(9)得到

$$\tilde{N}=H\bullet N,\quad \tilde{B}=H\bullet B$$

由 $K\in L(H\bullet X)\cap L(H\bullet Z)$ 与引理 4 推出 $K\in L(H\bullet(X-Z))=L(H\bullet A)=L_{var}(H\bullet A)$，进而由引理 5 与引理 6 得出 $KH\in L^1_{loc}(N)\cap L_{var}(B)\cap L_{var}(A)$，即 $KH\in L(X)$。

利用定理 1 使得定理 2 与定理 3 的证明较文献[2]中的证明思路清晰，论证简洁。下面利用定理 1 的思想给出向量随机积分中的一个重要性质。

定理 4　设 $X\in\mathscr{S}^d$，H 是 d 维可料过程。若存在停时序列 $\{\tau_n\}\uparrow\infty$，使 $H\in(X^{\tau_n})(n=1,2,\cdots)$，则 $H\in L(X)$。

证明　由 $H\in L(X^{\tau_n})$ 得 $HI_{]0,\tau_n]}\bullet\in L(X)$。于是

$$\Delta(H\bullet X^{\tau_n})=\Delta[(HI_{]0,\tau_n]})\bullet X],\quad n=1,2,\cdots$$

令

$$D=\{\exists i\in\{1,\cdots,d\}, 使|\Delta X^i|>1, 或\exists n\geqslant 1, 使|\Delta(H\bullet X^{\tau_n})|>1\}$$

并按式(1)与式(2)定义出过程 A 与过程 Z，则 $A\in\mathscr{V}^d$ 为阶梯的有限变差过程，故 $H\in L_{var}(A)$。由于 $|\Delta Z^i|\leqslant 1(i=1,\cdots,d)$，故由引理 1 推出 $Z\in\mathscr{S}_p^d$. 设 $Z=N+B$ 是 Z 的典则分解，于是对 $n\geqslant 1$，$Z^{\tau_n}=N^{\tau_n}+B^{\tau_n}$ 是 Z^{τ_n} 的典则分解。由于

$$|\Delta(H\bullet Z^{\tau_n})|=|\Delta((HI_{]0,\tau_n]})\bullet Z)|\leqslant 1$$

故 $H\bullet Z^{\tau_n}\in\mathscr{S}_p$。由引理 8，$H\in L^1_{loc}(N^{\tau_n})$，$H\in L_{var}(B^{\tau_n})$。因此 $H\in L^1_{loc}(N)$，$H\in L_{var}(B)$。进而 $H\in L(X)$。

由于向量随机积分在理论与应用中的重要性，对它的进一步研究是十分必要的。关于一维随机积分的哪些重要结果能推广至向量随机积分有待进一步研究。

参 考 文 献:

[1] 何声武，汪嘉冈，严加安. 半鞅与随机分析[M]. 北京：科学出版社，1995.

[2] Shiryaev A N, Chernyi A S. Vector Stochastic Integrls and the Fundamental Theomes of Asset Pricing[J]. Tr. MIAN, 2002, 237: 12-56.

[3] Cherny A S. Vector Stochastic Integrals in the First Fundamental Theorem of Asset Pricing[C]//Proceedings of the Workshop on Mathematical Finance, INRIA, 1998: 149-163.

[4] 金治明. 数学金融学基础[M]. 北京：科学出版社，2006.

[5] Delbean F, Schachermayer W. The Fundemental Theorem of Asset Pricing for Unbonded Stochaistic Processes[J]. Mathematiche Annalen, 1998, 321: 215-250.

[6] Shiryaev A N. Essentials of Stochastic Finance[M]. World Scientific, 1998.