

文章编号: 1001- 2486(2008) 06- 0019- 05

捷联惯导大失准角误差模型在快速传递对准中的应用*

谭红力, 黄新生, 岳冬雪

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 针对快速传递对准中主子惯导相对姿态存在大角度的情况, 推导了捷联惯导大失准角误差模型。该模型采用欧拉角表示姿态误差, 并用欧拉运动方程准确描述其传播规律。鉴于该模型中的姿态观测方程是复杂的非线性函数, 采用无需求导的 UKF 算法, 并采用奇异值分解(SVD) 解决方差阵的病态问题。仿真结果表明, 该算法在小角度误差条件下滤波精度优于线性模型, 并且适用于大角度误差条件。

关键词: 快速传递对准; 捷联惯导系统; 欧拉运动方程; UKF 滤波; 奇异值分解

中图分类号: V249. 32 **文献标识码:** A

Rapid Transfer Alignment Based on Large Misalignment SINS Error Model

TAN Hong-li, HUANG Xin-sheng, YUE Dong-xue

(College of Mechatronics and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A large misalignment error model of strapdown inertial navigation system(SINS) was deduced for the large relative attitude of rapid transfer alignment existing between the master and slave SINS. The Euler angles were introduced to describe the attitude errors. The Euler's kinematics equations were applied to achieve the accuracy error model. The unscented Kalman filter (UKF) was applied to avoid the derivation calculus of the attitude measurement equations which were complex nonlinear functions. The singular value decomposition (SVD) was used to solve the ill-conditioned problem of covariance matrix. The simulation experiment results show that the alignment accuracy is improved both in small angle uncertainties, and large angle uncertainties.

Key words: rapid transfer alignment; strapdown inertial navigation system; Euler's kinematics equations; unscented Kalman filter; singular value decomposition

捷联惯导系统快速传递对准算法成为近年来研究的热点^[1-3]。快速传递对准方法增加了主子惯导相对姿态的观测, 它是子惯导姿态误差和主子惯导相对姿态的非线性函数。传统的快速传递对准算法将姿态误差和相对姿态都当成小量, 采用线性卡尔曼滤波算法。近年来, 基于大方位误差模型的非线性滤波方法(如 EKF 和 UKF) 在动对准和飞行对准(IFA) 中的应用越来越广泛^[4-6], 但该模型仍然假设水平姿态误差是小角度。针对三个姿态误差都是大角度的情况, 文献[7] 直接以导航方程作为系统模型并用 UKF 方法实现低成本 IMU/GPS 系统的动对准; 文献[8] 提出了一种基于四元数的非线性误差模型, 应用于快速传递对准。

在大角度误差情况下, 本文考虑系统方程和观测方程的非线性因素, 采用欧拉角表示姿态误差和相对姿态, 并采用欧拉运动方程^[9] 描述它们的传播规律, 推导出一种非线性大失准角误差模型。该模型对姿态误差和相对姿态不作任何线性化假设, 能准确描述捷联惯导的误差传播规律。由于该模型姿态观测方程的 Jacobian 矩阵难以推导, 因此本文采用了基于奇异值分解(SVD) 的 UKF 算法^[10], 避免了经典 UKF 算法中方差阵更新的病态问题。通过仿真试验与线性快速传递对准算法作了比较, 实验结果表明, 基于大失准角误差模型的 UKF 算法在大角度误差条件下, 可以大大提高对准精度。

* 收稿日期: 2008- 05- 15

基金项目: 国家部委资助项目

作者简介: 谭红力(1977-), 男, 博士生。

1 子惯导大失准角误差模型

子惯导真实的姿态矩阵 C_n^b 是导航系 (n 系) 转到载体系 (b 系) 的方向余弦阵。捷联惯导系统计算的姿态矩阵为 C_n^c , 其中 c 是计算系。如果 n 系取北天东 (NUE) 坐标系, 可以用 2-3-1 转动顺序的欧拉角 $\phi = [\phi_N, \phi_U, \phi_E]^T$ 表示 n 系到 c 系的方向余弦阵 C_n^c ,

$$C_n^c = C_1(\phi_N) C_3(\phi_E) C_2(\phi_U) \quad (1)$$

其中, ϕ 可以称为平台误差角, 而 C_n^c 称为姿态误差矩阵, 这样有 $C_n^b = C_n^c = C_n^c$ 。

真实姿态阵的传播方程为 $\dot{C}_n^b = C_n^b [\omega_{nb}^b \times]$, 其中 $C_n^b = [C_n^b]^T$, $[\omega \times]$ 是角速度矢量的反对称矩阵形式, ω_{nb}^b 是 b 系相对 n 系的转动角速度在 b 系内的投影, 且有 $\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_n^b \omega_{in}^n$ 。

导航计算的角速度为 $\tilde{\omega}_{nb}^b = \tilde{\omega}_{ib}^b - C_n^b \tilde{\omega}_{in}^n$, 其中 $\tilde{\omega}_{ib}^b = \omega_{ib}^b + \delta\omega_{ib}^b$ 是陀螺测量的角速度, $\delta\omega_{ib}^b$ 是测量误差; $\tilde{\omega}_{in}^n = \omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n$ 是导航解算中对 n 系相对惯性系 (i 系) 的转动角速度的补偿, $\delta\omega_{in}^n = \delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n$ 是由导航计算的纬度误差和速度误差引起的补偿误差。这样导航解算的角速度误差为

$$\delta\omega_{nb}^b = \tilde{\omega}_{nb}^b - \omega_{nb}^b = (C_n^b - C_n^c) \omega_{in}^n - C_n^c \delta\omega_{in}^n + \delta\omega_{ib}^b \quad (2)$$

上式右边前两项是导航计算的补偿误差, 第三项是陀螺的测量误差。 $\delta\omega_{nb}^b$ 是引起捷联惯导系统 c 系相对 n 系发生漂移的角速度。由于 c 系相对 n 系的转动角速度 $\omega_{nc}^b = \omega_{nb}^b - \omega_{cb}^b$, 其中 ω_{cb}^b 就是导航计算的角速度 $\tilde{\omega}_{nb}^b$, 因此有 $\omega_{nc}^b = -\delta\omega_{nb}^b$, 投影到计算系中, 并将(2)式代入可得

$$\omega_{nc}^c = -C_n^c \delta\omega_{nb}^b = (I - C_n^c) \omega_{in}^n + \delta\omega_{in}^n - C_n^c \delta\omega_{ib}^b \quad (3)$$

这与 C_n^c 的传播方程类似, 姿态误差阵 C_n^c 的传播方程可以写成 $\dot{C}_n^c = C_n^c [\omega_{nc}^c \times]$, 求解此矩阵微分方程可以采用欧拉角更新算法, 就得到平台误差角的微分方程

$$\begin{cases} \dot{\phi} = f_1(\phi) \omega_{nc}^c = f_2(\phi) \omega_{in}^n + f_1(\phi) \delta\omega_{in}^n - f_1(\phi) C_n^c \delta\omega_{ib}^b \\ f_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\phi_E \cos\phi_N & \tan\phi_E \sin\phi_N \\ 0 & \sec\phi_E \cos\phi_N & -\sec\phi_E \sin\phi_N \\ 0 & \sin\phi_N & \cos\phi_N \end{bmatrix} \\ f_2(\phi) = f_1(\phi) (I - C_n^c) \end{cases} \quad (4)$$

这样, (4)式描述了大失准角误差模型的姿态误差方程。

方程(4)的系数矩阵 f_1 是两个水平误差角 ϕ_N, ϕ_E 的非线性函数, 假设两者是小量近似为零, 则 $f_1 = I$, 就可以得到大方位误差模型。如果认为三个平台误差角都是小量, 则有 $C_n^c = I + [\varphi \times]$, 两边求导, 并代入 C_n^c 的传播方程可得 $[\dot{\phi} \times] = [\omega_{nc}^c \times] + [\phi \times][\omega_{nc}^c \times]$, 由于 ω_{nc}^c 也是小量, 忽略二阶小量, 并写成向量形式

$$\dot{\phi} = \omega_{nc}^c = -\omega_{in}^n \times \phi + \delta\omega_{in}^n - C_n^c \delta\omega_{ib}^b \quad (5)$$

就得到传统的线性姿态误差模型。

子惯导真实的速度微分方程为 $\dot{v} = C_n^b a^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v + g$, 捷联惯导系统计算的速度微分方程为 $\dot{\tilde{v}} = C_n^c \tilde{a}^b - (2\tilde{\omega}_{ie}^n + \tilde{\omega}_{en}^n) \times \tilde{v} + \tilde{g}$ 。记 $\delta v = \tilde{v} - v$, $\delta\omega_{ie}^n = \tilde{\omega}_{ie}^n - \omega_{ie}^n$, $\delta\omega_{en}^n = \tilde{\omega}_{en}^n - \omega_{en}^n$, $\delta g = \tilde{g} - g$ 都是导航计算的误差, $\delta a^b = \tilde{a}^b - a^b$ 是加速度计的测量误差。两式相减, 忽略二阶小量, 得到速度误差微分方程为

$$\delta\dot{v} = (C_n^c - I) a^n - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times \delta v - (2\delta\omega_{ie}^n + \delta\omega_{en}^n) \times v + \delta g + C_n^c \delta a^b \quad (6)$$

同样, 将 $C_n^c - I \approx [\varphi \times]$ 代入(6)式可以得到传统的线性速度误差模型。方程(6)中重力补偿误差 δg 通常可以忽略不计。如果有位置和速度的辅助信息, 由纬度误差和速度误差引起的 $\delta\omega_{ie}^n$ 和 $\delta\omega_{en}^n$ 也可以忽略不计。

2 快速传递对准算法

快速传递对准算法在系统方程中增加了主子惯导的相对姿态,并在观测方程中增加了相对姿态的观测。主子惯导的载体为 m 系,姿态矩阵为 C_m^n 。主子惯导的相对姿态描述了主子惯导体系之间的转换矩阵 C_m^b 。与子惯导的姿态误差相同,用欧拉角表示相对姿态 $\vartheta = [\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z]^T$,则主子惯导之间的姿态转换矩阵为

$$C_m^b = C_n^b C_m^n = C_1(\vartheta_x) C_3(\vartheta_z) C_2(\vartheta_y) \quad (7)$$

同样用欧拉运动方程描述相对姿态的微分方程 $\dot{\vartheta} = f_1(\vartheta) \omega_{mb}^b$,其中 ω_{mb}^b 是子惯导相对于主惯导转动角速度在子惯导体系中的投影,它是由振动和安装关系的弹性变形引起的,一般可以当作噪声处理。这种噪声的特性需要通过实际飞行数据的分析进行建模。

由主子惯导姿态矩阵的乘积得到相对姿态矩阵,并根据欧拉角和方向余弦阵之间的关系,可得到姿态观测方程为

$$\begin{cases} \tilde{C}_m^b = \tilde{C}_n^b C_m^n = C_c^b C_c^n(\phi) C_b^c C_m^b(\vartheta) \\ \tilde{\vartheta} = [-\arctan(C_{32}/C_{22}), -\arctan(C_{13}/C_{11}), \arcsin(C_{12})]^T \end{cases} \quad (8)$$

其中, \tilde{C}_n^b 就是子惯导计算的姿态矩阵 C_c^b , $C_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 是 \tilde{C}_m^b 中的元素。这样(8)式就是大失准角误差模型的姿态观测方程,记为 $\tilde{\vartheta} = h_1(\phi, \vartheta)$ 。由于 h_1 是相对姿态矩阵中元素的反三角函数,写成关于两个欧拉角 ϕ 和 ϑ 的显式解析式将非常复杂。如果采用 EKF 算法,推导姿态观测方程的 Jacobian 矩阵是非常困难的。

如果认为相对姿态是小量,则 $C_m^b = I - [\vartheta \times]$, 并且有 $C_c^n = I + [\phi \times]$, 代入(8)式,忽略二阶小量,就可得到一般的线性观测方程 $\tilde{\vartheta} = \vartheta - C_c^b \phi$ 。

速度观测需要进行杆臂效应补偿,按照主子惯导补偿方式^[3]则有 $v_{cb}^n = v_{cm}^n + C_m^n(\omega_{im}^m \times r^m) - \omega_{ie}^n \times (C_m^n r^m)$, 其中 v_{cm}^n 和 v_{cb}^n 分别是主子惯导的对地速度, r 是主子惯导安装的杆臂矢量。

3 UKF 算法

如果更新周期 τ 较小,一阶离散化的系统方程为

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k, w_k) = x_k + \tau f(x_k, w_k) \\ x_k = [\phi_k^T, \delta v_k^T, \vartheta_k^T, \varepsilon_k^T, \nabla_k^T]^T, \quad w_k = [w_{gk}^T, w_{ak}^T, w_{ok}^T, w_{grk}^T, w_{ark}^T]^T \\ \phi_{k+1} = F_1(\phi_k, \varepsilon_k, w_{gk}) = \phi_k + \tau f_2(\phi_k) \omega_{in}^n - \tau f_1(\phi_k) C_b^c \varepsilon_k - \tau f_1(\phi_k) C_b^c w_{gk} \\ \delta v_{k+1} = F_2(\phi_k, \delta v_k, \nabla_k, w_{ok}) = \delta v_k + \tau [C_n^c(\phi_k) - I] a^n - \tau (2\omega_{ie}^n + \omega_{in}^n) \times \delta v_k + \tau C_b^c \nabla_k + \tau C_b^c w_{ok} \\ \vartheta_{k+1} = F_3(\vartheta_k, w_{ok}) = \vartheta_k + \tau f_1(\vartheta_k) \omega_{ok} \\ \varepsilon_{k+1} = F_4(\varepsilon_k, w_{grk}) = \varepsilon_k + \tau w_{grk} \\ \nabla_{k+1} = F_5(\nabla_k, w_{ark}) = \nabla_k + \tau w_{ark} \end{cases} \quad (9)$$

其中,滤波状态 x 分别为子惯导平台误差角 ϕ 、主子惯导相对姿态 ϑ 、速度误差 δv 、陀螺零偏 ε 和加速度计零偏 ∇ 。系统噪声 w 分别为陀螺和加速度计测量噪声 w_g, w_a ;陀螺零偏和加速度计零偏的随机游走驱动噪声 w_{gr}, w_{ar} ;子惯导相对于主惯导的转动角速度 ω_{mb}^b 也当成噪声 w_ω 。系统噪声 w 都当作零均值白噪声,其方差阵为 $Q = E(\mathbf{w}\mathbf{w}^T)$ 。

观测方程为

$$\begin{cases} y_{k+1} = h(x_{k+1}, \eta_{k+1}) \\ \delta \tilde{v}_{k+1} = \delta v_{k+1} + \eta_{k+1} \\ \tilde{\vartheta}_{k+1} = h_1(\phi_{k+1}, \vartheta_{k+1}) \end{cases} \quad (10)$$

其中, η 是速度误差观测噪声,也当作零均值白噪声,其方差阵为 $R = E(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T)$ 。

由于前面提到的原因,难以采用 EKF 算法,因此我们采用了 UKF 算法,避免了求姿态观测方程的 $Jacobian$ 矩阵。具体的 UKF 算法见文献[11-12]。

UKF 算法中对状态方差阵 P_x 的观测更新为

$$P_x = P_x^- - KP_yK^T \quad (11)$$

其中, K 是滤波增益阵, P_x^- 和 P_y 分别是状态和观测方差的一步预测值。由系统方程的病态条件产生的计算误差,可能导致两个正定阵 P_x^- 和 KP_yK^T 的差非正定。当方差阵 P_x 负定时,经典 UKF 算法中求 P_x 的平方根所采用的 Cholesky 分解 $\sqrt{P_x} = \text{chol}(P)$ 无效。为保证算法的鲁棒性,文献[10]提出了基于 SVD 分解的 UKF 算法,其核心是用 SVD 分解方法计算 P_x 的平方根。基于 SVD 分解的 UT 变换计算代表点的公式为

$$\begin{cases} P = USV^T \\ x^0 = \hat{x}, \quad x^i = \hat{x} + \rho(U\sqrt{S})_i \\ x^{n+i} = \hat{x} - \rho(U\sqrt{S})_i, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (12)$$

其中, x^i ($i = 0, 1, \dots, 2n$) 是估计状态 \hat{x} 的代表点, n 是 \hat{x} 的维数; ρ 是比例因子; $[U, S, V] = \text{svd}(P_x)$, 是 P_x 的 SVD 分解,其中 S 的对角线元素是正定矩阵 $P_x^T P_x$ 特征值的平方根,称为奇异值^[13]。由于奇异值总是非负的,采用 $\sqrt{P_x} = U\sqrt{S}$ 可以解决观测更新过程中方差阵的病态问题。

4 仿真实验

仿真条件:飞行速度 200m/s,航向北偏东 70°。仿真时间 10s,0~2s 水平直线飞行,2~4s 作幅度为 30°的滚动机动,4s 后继续水平直线飞行。不考虑主惯导的误差,杆臂效应采用主惯导补偿方式。系统更新周期 $\tau = 0.01s$ 。子惯导的 IMU 测量误差和系统噪声、观测噪声的标准差如表 1 所示。

表 1 子惯导 IMU 测量误差和系统、观测噪声的标准差

Tab. 1 The standard deviation of slave IMU errors and noises of process and measurements

误差源	ε	w_g	w_{gr}	\dot{y}	w_a	w_{ar}	w_ω	η
均方差	f/h	$7.5/\text{h} \sqrt{\text{Hz}}$	$0.0003^\circ/\text{h} \sqrt{\text{Hz}}$	500μg	$50\mu\text{g} \sqrt{\text{Hz}}$	$3.5\mu\text{g}/\text{s} \sqrt{\text{Hz}}$	$0.006^\circ/\text{s} \sqrt{\text{Hz}}$	0.03m/s

子惯导的初始速度和位置由主惯导提供,子惯导的初始姿态与主惯导一致,这样初始姿态误差就是主、子惯导的相对姿态。初始相对姿态随机产生,其均方差取两种条件:小角度条件均方差为 1°,大角度条件均方差为 3°。两种条件分别作 Monte Carlo 仿真 30 次,生成两组实验数据。对两组数据分别采用基于线性模型的 Kalman 滤波算法(KF)和基于大失准角误差模型的 UKF 算法进行快速传递对准实验。对准过程中对子惯导的姿态误差 ϕ 、陀螺零偏 ε 和加速度计零偏 \dot{y} 的估计误差如图 1 所示,其中浅色的曲线是 30 次仿真结果的叠加,中间深色线是均值曲线,上下两边虚线是 3σ 误差限。

由图 1 可以看出,快速传递对准过程中,方位误差 ϕ_U 在滚动机动开始后迅速收敛。在小角度条件下两种算法都有较好的滤波效果,但 UKF 算法对加速度计零偏的估计效果优于 KF。在大角度条件下, KF 算法对加速度计零偏的估计发散,尤其是天向加速度计 \dot{y}_y ; 而 UKF 算法对加速度计零偏的估计仍然收敛。统计对准结果(10s 时的姿态误差)如表 2 所示。由表 2 可以看出,小角度条件下, UKF 算法的对准精度(姿态误差标准差)优于 KF 算法;在大角度条件下, KF 算法的方位对准精度下降到 0.14°,而 UKF 算法的对准精度仍然小于 0.04°。

表 2 两种角度误差条件下估计误差的统计结果

Tab. 2 Statistics of the estimate errors under two different angle error conditions

	小角度误差				大角度误差			
	KF		UKF		KF		UKF	
	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差	均值	标准差
$\phi_N(^{\circ})$	0.0008	0.0158	0.0049	0.0130	0.0001	0.0205	-0.0003	0.0209
$\phi_U(^{\circ})$	0.0016	0.0204	0.0003	0.0097	-0.0384	0.1365	0.0008	0.0312
$\phi_E(^{\circ})$	-0.0081	0.0223	-0.0009	0.0084	-0.0022	0.0357	-0.0022	0.0103

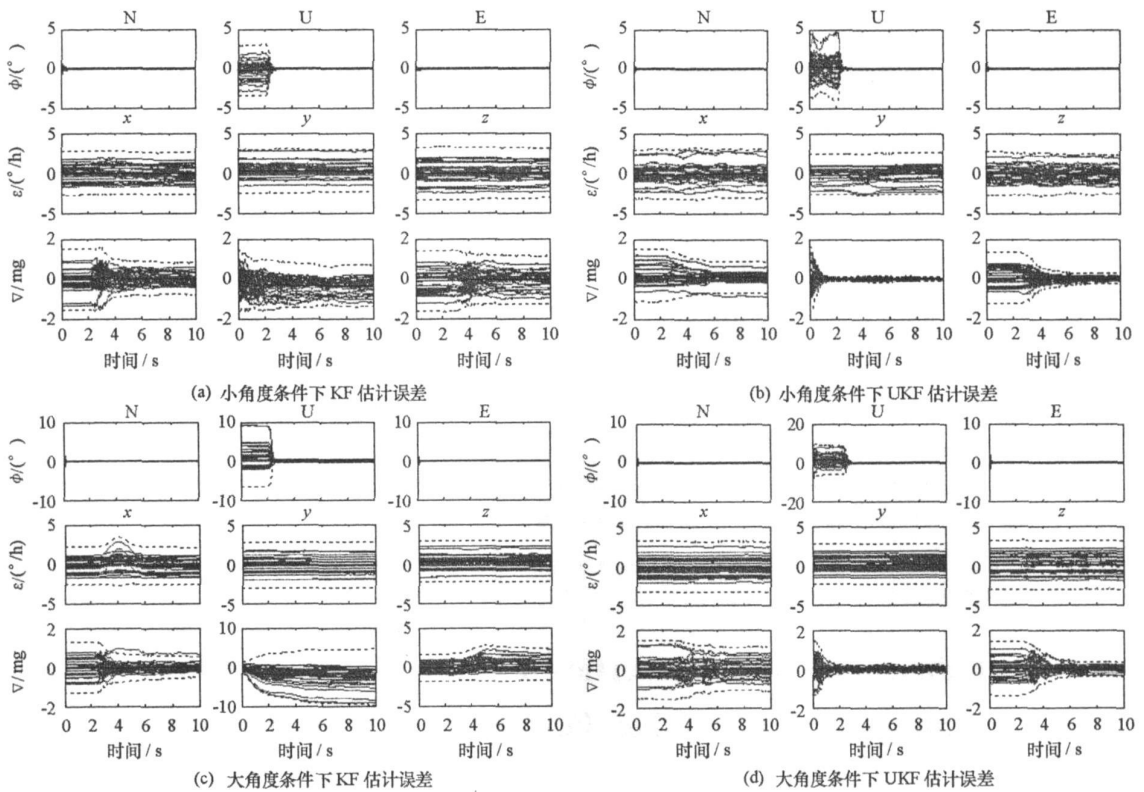


图1 仿真结果

Fig. 1 Simulation results

5 结论

在快速传递对准中采用基于大失准角误差模型的UKF算法,允许主子惯导之间存在较大相对姿态,可以降低对子惯导的安装精度的要求。仿真结果表明,与传统的线性模型相比,基于大失准角误差模型的UKF算法改善了对加速度计零偏的估计效果,进而提高了姿态对准精度。

参考文献:

- [1] Kain J E, Cloutier J R. Rapid Transfer Alignment for Tactical Weapon Applications[C]// Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 1989: 1290–1300.
- [2] Shortelle K J, Graham W R, Rabourn C. F-16 Flight Tests of a Rapid Transfer Alignment Procedure[C]// Position Location and Navigation Symposium, 1998: 379–386.
- [3] Wendel J, Metzger J, Trommer G F. Rapid Transfer Alignment in the Presence of Time Correlated Measurement and System Noise[C]// AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Providence, Rhode Island, 2004: 1–12.
- [4] Scherzinger B M. Inertial Navigator Error Models for Large Heading Uncertainty[C]// PLANS'96, IEEE, 1996: 477–484.
- [5] Kong X Y, Nebot E M, D-Whyte H. Development of a Nonlinear Psi-angle Model for Large Misalignment Errors and Its Application in INS Alignment and Calibration[C]// Proceedings of the 1999 IEEE Int. conf. on Robotics & Automation, Detroit, Michigan, 1999: 1430–1435.
- [6] Kim K, Park C G. In-flight Alignment Algorithm Based on Non-symmetric Unscented Transformation[C]// SICE-ICASE International Joint Conference 2006, Bexco, Busan, Korea, 2006: 4916–4920.
- [7] Shin E H, E-Sheiny N. An Unscented Kalman Filter for In-motion Alignment of Low-cost IMUs[C]// IEEE PLANS, 2004: 273–279.
- [8] Hao Y, Xiong Z, Wang W, et al. Rapid Transfer Alignment Based on Unscented Kalman Filter[C]// Proceedings of the 2006 American Control Conference, Minneapolis USA, 2006: 2215–2220.
- [9] Titterton D H, Weston J L. Strapdown Inertial Navigation Technology [M]. United Kingdom: Peter Peregrinus Ltd., 1997: 45.
- [10] Chen Z, Haykin S. Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond [EB/OL]. <http://soma.crl.mcmaster.ca/~zhechen/>, 2003.
- [11] Merwe R, Wan E A. The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation[C]// IEEE Symposium 2000 (AS-SPCC), Canada, 2000: 3461–3464.
- [12] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented Filtering and Nonlinear Estimation[C]// Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3): 401–422.
- [13] Golub G H, Reinsch C. Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions [J]. Numer. Math., 1970, 14: 403–420.