文章编号: 0001- 2486(2008)06- 0053- 04

指数寿命可靠性增长评估中增长因子的确定方法*

宫二玲, 谢红卫, 李鹏波, 蒋英杰
(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 对于延缓纠正模式的可靠性增长试验, 阶段内产品的寿命服从失效率为常数的指数分布, 而阶段间的可靠性有阶跃增长, 通常考虑以增长因子进行阶段间的信息传递, 增长因子的确定成为关键。首先分析常用的 ML- Ⅱ 确定方法的局限性, 提出改进的 ML- Ⅱ 方法, 并对阶段末的可靠性作出 Bayes 评估。最后仿真示例表明了改进方法的有效性。

关键词: 可靠性增长; 延缓纠正模式; 增长因子; ML- Ⅱ 方法; Bayes 评估
中图分类号: TB114.3 文献标识码: A

Determination of Growth Factor in Reliability Growth Evaluation with Exponential Life

GONG Er-ling, XIE Hong-wei, LI Peng-bo, JIANG Ying-jie
(College of Electromechanical Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: For the reliability growth tests with delayed-fix mode, the life in a stage can be assumed to follow the exponential distribution with a constant failure rate. However the reliability between stages has a growth. Usually, growth factor was used for the information transfer between stages. Thus the determination of growth factor becomes very important. The limitation of ML-Ⅱ method commonly used is analyzed and a modified ML-Ⅱ method is given. Then Bayesian evaluation method of reliability is deduced. At last, the example shows the feasibility of the modified ML-Ⅱ method.

Key words: reliability growth; delayed-fix mode; growth factor; ML- Ⅱ method; Bayesian evaluation

可靠性增长技术是可靠性工程的一个重要组成部分[1]。可靠性增长分为三种模式: 即时纠正模式、延缓纠正模式和含延缓纠正模式。对于其中的延缓纠正模式, 现阶段产品试验后会对产品进行改进, 特别是对出现的故障进行排除和修正, 然后再进入下一阶段试验, 可靠性增长的试验结果在同一阶段内应视为同一指数分布母体, 而在不同阶段间, 不再是同一母体的试验样本。因而, 这时的可靠性增长试验评估是典型的变动统计问题。

通常人们运用 Bayes 方法处理多阶段统计问题, 而且总是运用 Bayes 相继律来使用每一阶段的验前信息, 即将前一阶段的验后分布作为后一阶段的验前分布。但是, 对于可靠性增长评估这一类变动统计问题来说, 直接使用 Bayes 相继律确定阶段的验前分布将会使可靠性分析的结果偏于保守。现有文献中确定验前分布的方法有多种, 如增长因子法[2-6]、线性模型法[7]、多源验前信息的融合方法[8-9]等。本文将对基于增长因子的可靠性增长评估方法进行深入研究, 并给出确定增长因子的改进 ML- Ⅱ方法。

1 模型描述

(1) 假设系统的可靠性增长共分为 n 个阶段, 每个阶段内采取延缓纠正模式, 在第 k($k=1,2,\cdots,n$) 阶段寿命服从参数为 λ_k 的指数分布, λ_k 为系统的故障率, 即 $f\left(t\mid\lambda_k\right)=\lambda_k\exp\left(-\lambda_k t\right)$, $\lambda_k>0$, $t>0$。

(2) 第 k 阶段的试验结果为(z_k, τ_k), 其中, τ_k 为该阶段的累积试验时间, z_k 为累积故障次数, t_{ki} 记录 z_k 次故障的发生时间, 从小到大排列为 $0<t_{k1}<t_{k2}<\cdots<t_{kz_k}<\tau_k$。

* 收稿日期: 2008- 06- 08
基金项目: 国家部委基金重点项目; 教育部博士点基金资助项目(20059998007)
作者简介: 宫二玲(1971—), 女, 副教授, 博士。

(3) 假设各阶段试验结束时的纠正措施有效，新试验阶段系统的可靠性比前一阶段的可靠性要高。第 k 阶段系统的故障率为 λ_k，从阶段 k 到阶段 $k+1$ 系统的故障率降低 $\Delta\lambda_k$，即 $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$，$\lambda_k - \lambda_{k+1} = \Delta\lambda_k$。

(4) 假设故障率 λ_k 的先验分布为共轭分布，如选择 Gamma 分布作为 λ_k 的先验分布，即

$$\pi(\lambda_k) = \beta_k^{\alpha_k}\lambda_k^{\alpha_k - 1}e^{-\beta_k\lambda_k}/\Gamma(\alpha_k) \tag{1}$$

当阶段 $k=1$ 时，由于对系统的了解很少，可以选择无信息的先验分布，即 $\pi(\lambda_1) \propto 1$。

2 Bayes 评估方法

由基本假设，在第 k 阶段系统的故障率为恒定值 λ_k，系统的寿命服从指数分布。因此，第 k 阶段的故障次数服从 Poisson 分布，即

$$f(z_k, \tau_k \mid \lambda_k) = \frac{(\lambda_k\tau_k)^{z_k}}{z_k!}\exp(-\lambda_k\tau_k) \tag{2}$$

可见，假设在第 k 阶段 λ_k 已知，则故障次数 z_k 为随机变量。现在需要根据该阶段试验信息和其他相关信息得到故障率 λ_k 的分布，从而得到系统可靠性的点估计、置信区间估计以及是否停止试验的决策。

取 λ_k 的先验分布为式(1)，利用 Bayes 公式，推导出 λ_k 的后验分布为

$$\pi(\lambda_k \mid z_k, \tau_k) = \frac{\pi(\lambda_k)f(z_k, \tau_k \mid \lambda_k)}{\int_0^{\infty}\pi(\lambda_k)f(z_k, \tau_k \mid \lambda_k)\,d\lambda_k} \tag{3}$$

上式为 Gamma 分布的形式，其分布参数为 $(\alpha_k + z_k, \beta_k + \tau_k)$。后验分布下的均值和方差分别为

$$\hat{\lambda}_k = E[\lambda_k \mid z_k, \tau_k] = \frac{\alpha_k + z_k}{\beta_k + \tau_k} \tag{4}$$

$$Var[\lambda_k \mid z_k, \tau_k] = \frac{\alpha_k + z_k}{(\beta_k + \tau_k)^2} \tag{5}$$

式(4)为在平方损失函数之下 λ_k 的点估计。λ_k 的置信度为 γ 的置信上限 $\overline{\lambda}_{k,\gamma}$ 为

$$\overline{\lambda}_{k,\gamma} = \chi^2_{2(\alpha_k + z_k),\gamma}/[2(\beta_k + \tau_k)] \tag{6}$$

其中，$\chi^2_{2(\alpha_k + z_k),\gamma}$ 为具有自由度 $2(\alpha_k + z_k)$ 的 χ^2 分布的 γ 分位点。

在可靠性增长分析中，经常要用到平均无故障间隔时间和可靠度。第 k 阶段 MTBF θ_k 的后验分布为

$$f(\theta_k \mid z_k, \tau_k) = \frac{(\beta_k + \tau_k)^{\alpha_k + z_k}}{\Gamma(\alpha_k + z_k)}\theta_k^{-(\alpha_k + z_k + 1)}e^{-(\beta_k + \tau_k)/\theta_k} = \mathrm{IG}(\theta_k \mid \alpha_k + z_k, \beta_k + \tau_k) \tag{7}$$

即服从参数 $(\alpha_k + z_k, \beta_k + \tau_k)$ 的逆 Gamma 分布。θ_k 的均值和方差分别为

$$E[\theta_k \mid z_k, \tau_k] = \frac{\beta_k + \tau_k}{\alpha_k + z_k - 1} \tag{8}$$

$$Var[\theta_k \mid z_k, \tau_k] = \frac{(\beta_k + \tau_k)^2}{(\alpha_k + z_k - 1)^2(\alpha_k + z_k - 2)} \tag{9}$$

第 k 阶段的可靠度 R_k 的后验分布为

$$\begin{aligned} f(R_k \mid z_k, \tau_k) &= \frac{(\beta_k/T + \tau_k/T)^{\alpha_k + z_k}}{\Gamma(\alpha_k + z_k)}R_k^{-(\beta_k + \tau_k)/T\theta_k} \cdot (-\ln R_k)^{-(\alpha_k + z_k + 1)} \\ &= \mathrm{ILG}(R_k \mid \alpha_k + z_k, (\beta_k + \tau_k)/T) \end{aligned} \tag{10}$$

即服从参数 $(\alpha_k + z_k, (\beta_k + \tau_k)/T)$ 的负对数 Gamma 分布，其中 T 为系统的任务时间。

如果第 k 阶段的先验分布参数 α_k，β_k 已知，那么可以较方便地得到上述一系列结果，问题就在于先验分布参数如何确定。下面讨论某阶段先验分布参数的确定方法。

3 ML- Ⅱ方法确定增长因子的局限性

目前虽然有较多文献采用了增长因子的方法进行阶段间信息的传递，但存在的问题是增长因子的

确定方法缺乏客观性, 导致最终的评估结果稳健性欠佳。这里我们也采用增长因子的思路, 先分析常用的 ML- Ⅱ确定增长因子方法的局限性。

设定阶段间信息传递的原则是: 第 k 阶段后验分布与第 $k+1$ 阶段的先验分布相互联系, 即第 $k+1$ 阶段先验分布均值为第 k 阶段后验分布均值与一个增长因子 $\eta_k(0<\eta_k<1)$ 的函数, 而第 $k+1$ 阶段先验分布方差与第 k 阶段后验分布方差相等。η_k 的大小反映了纠正措施的有效性, 纠正措施越有效, η_k 值应越大。

设第 $k+1$ 阶段的先验分布为 $\pi(\lambda_{k+1})=G(\alpha_{k+1},\beta_{k+1})$, 其均值为第 k 阶段后验分布均值与一个增长因子 η_k 的函数, 即

$$E[\lambda_{k+1}]=E[\lambda_k|z_k,\tau_k](1-\eta_k) \tag{11}$$

由于 Gamma 分布的均值为 $E[\lambda_k]=\alpha_k/\beta_k$, 则

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}}=\frac{\alpha_k+z_k}{\beta_k+\tau_k}(1-\eta_k) \tag{12}$$

第 $k+1$ 阶段先验分布方差与第 k 阶段后验分布方差相等, 得

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}^2}=\frac{\alpha_k+z_k}{(\beta_k+\tau_k)^2} \tag{13}$$

由式(12) 和式(13) 解得

$$\begin{cases}\alpha_{k+1}=(\alpha_k+z_k)(1-\eta_k)^2\\ \beta_{k+1}=(\beta_k+\tau_k)(1-\eta_k)\end{cases} \tag{14}$$

当 η_k 确定后, 由式(14) 即可得到第 $k+1$ 阶段先验分布的参数, 问题是如何选择增长因子 η_k。ML- Ⅱ方法是解决该问题的方法之一。该方法是 Robbins、Berger 等所倡导的一种“超前的方法”, 因为它在构造阶段验前信息时, 不仅利用了该阶段以前的历史信息, 还融合了该阶段的试验信息。这里我们先分析常用的 ML- Ⅱ方法在求解增长因子时存在的问题。

记第 $k+1$ 阶段获取的试验信息为(z_{k+1},τ_{k+1}), 将它看做是边缘分布 $m(z_{k+1})$ 所产生的子样。由于

$$m(z_{k+1})=\int_0^\infty \pi(\lambda_{k+1})f(z_{k+1}|\lambda_{k+1})\,\mathrm{d}\lambda_{k+1} \tag{15}$$

其中 $f(z_{k+1}|\lambda_{k+1})$ 服从 Poisson 分布, $\pi(\lambda_{k+1})$ 为 λ_{k+1} 的验前分布密度函数, 即 $G(\alpha_{k+1},\beta_{k+1})$, 于是

$$\begin{aligned}m(z_{k+1})&=\frac{\beta_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\tau_{k+1}^{z_{k+1}}}{\Gamma(\alpha_{k+1})z_{k+1}!}\int_0^\infty \lambda_{k+1}^{\alpha_{k+1}+z_{k+1}-1}\mathrm{e}^{-\lambda_{k+1}(\beta_{k+1}+\tau_{k+1})}\,\mathrm{d}\lambda_{k+1}\\ &=\frac{\tau_{k+1}^{z_{k+1}}}{z_{k+1}!}\,\frac{\Gamma(\alpha_{k+1}+z_{k+1})}{\Gamma(\alpha_{k+1})}\,\frac{\beta_{k+1}^{\alpha_{k+1}}}{(\beta_{k+1}+\tau_{k+1})^{\alpha_{k+1}+z_{k+1}}}\\ &=\frac{\tau_{k+1}^{z_{k+1}}}{z_{k+1}!}\,\frac{\beta_{k+1}^{\alpha_{k+1}}}{(\beta_{k+1}+\tau_{k+1})^{\alpha_{k+1}+z_{k+1}}}\prod_{i=0}^{z_{k+1}-1}(\alpha_{k+1}+i)\end{aligned} \tag{16}$$

至此, 按照文献[6, 8] 的做法, 同时令 $\partial\ln m(z_{k+1})/\partial\alpha_{k+1}=0$, $\partial\ln m(z_{k+1})/\partial\beta_{k+1}=0$, 即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln m(z_{k+1})}{\partial\alpha_{k+1}}=\ln\beta_{k+1}-\ln(\beta_{k+1}+\tau_{k+1})+\dfrac{\Gamma'(z_{k+1}+\alpha_{k+1})}{\Gamma(z_{k+1}+\alpha_{k+1})}-\dfrac{\Gamma'(\alpha_{k+1})}{\Gamma(\alpha_{k+1})}=0\\ \dfrac{\partial\ln m(z_{k+1})}{\partial\beta_{k+1}}=\dfrac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}}-\dfrac{\alpha_{k+1}+z_{k+1}}{\beta_{k+1}+\tau_{k+1}}=0\end{cases} \tag{17}$$

并进一步推导得出

$$\begin{cases}\beta_{k+1}=\dfrac{\tau_{k+1}}{z_{k+1}}\alpha_{k+1}\\ I(z_{k+1}+\alpha_{k+1})-I(\alpha_{k+1})=\ln\left(1+\dfrac{z_{k+1}}{\alpha_{k+1}}\right)\end{cases} \tag{18}$$

式中, 函数 $I(a)=\int_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}\mathrm{d}t$。

注意到,由(18)式求解出的 α_{k+1}, β_{k+1}只是利用了当前阶段的试验信息,而没有考虑前一阶段的先验信息,和直接用(z_{k+1}, τ_{k+1})指数寿命型分布估计的结果没有任何区别,因此在工程上没有应用价值!而且文献[6,8]对该方法均没有给出任何仿真示例,原因是该方法在实际计算中也存在问题,本文后面的仿真示例会加以说明。

4 改进的ML-Ⅱ方法确定增长因子

下面提出一种改进的ML-Ⅱ方法。由于考虑可靠性增长时 α_{k+1}, β_{k+1}的表达式如(14)式,因此将(14)式代入(16)式,意味着将第 $k+1$阶段的边缘分布 $m(z_{k+1})$与第 k 阶段的参数α_k, β_k, z_k, τ_k 联系起来,其中仅有 η_k 为未知的参数。再对 $m(z_{k+1})$取对数,且令$\partial \ln m(z_{k+1})/\partial \eta_k = 0$,即

$$\frac{\partial \ln m(z_{k+1})}{\partial \eta_k} = \frac{\partial \ln m(z_{k+1})}{\partial \alpha_{k+1}}\frac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \eta_k} + \frac{\partial \ln m(z_{k+1})}{\partial \beta_{k+1}}\frac{\partial \beta_{k+1}}{\partial \eta_k} = 0 \tag{19}$$

其中,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln m(z_{k+1})}{\partial \alpha_{k+1}} = \ln \beta_{k+1} - \ln(\beta_{k+1} + \tau_{k+1}) + \displaystyle\sum_{i=0}^{z_{k+1}-1} \frac{1}{\alpha_{k+1} + i} \\ \dfrac{\partial \ln m(z_{k+1})}{\partial \beta_{k+1}} = \dfrac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}} - \dfrac{\alpha_{k+1} + z_{k+1}}{\beta_{k+1} + \tau_{k+1}} \\ \dfrac{\partial \alpha_{k+1}}{\partial \eta_k} = 2(\alpha_k + z_k)(\eta_k - 1) \\ \dfrac{\partial \beta_{k+1}}{\partial \eta_k} = -(\beta_k + \tau_k)\end{cases} \tag{20}$$

这样可以通过数值方法求解 η_k,进而得出 α_{k+1}, β_{k+1},从而得到 λ_{k+1}先验分布中的参数。

可见,改进的ML-Ⅱ方法充分利用了当前阶段和前一阶段的试验信息,能够对可靠性做出更准确的评估。下面的仿真示例说明了改进方法的优越性。

5 仿真示例

某型液体火箭发动机的可靠性增长试验,要求在典型任务周期下,故障率以90%的概率小于 $\lambda^* = 0.02$(即平均无故障时间MTBF为50h)。对其进行三个阶段的可靠性增长试验,故障纠正模式为延缓纠正,试验结果为:$(z_1, \tau_1) = (5, 40)$, $(z_2, \tau_2) = (5, 113)$, $(z_3, \tau_3) = (1, 128)$,时间单位为h。

应用本文介绍的ML-Ⅱ方法和改进的ML-Ⅱ方法,对系统的可靠性进行增长分析,各个阶段的失效率、MTBF、增长因子估计结果如表1所示。

表1 改进的经验估计法和两种ML-Ⅱ方法评估结果的比较

Tab.1 The comparison of evaluation result

方 法	阶段数	λ_k	$MTBF_k$	增长因子 η_k
ML-Ⅱ方法	第1阶段	*	*	*
	第2阶段	0.0442	28.2416	*
	第3阶段	*	*	*
改进的ML-Ⅱ方法	第1阶段	0.125	10	
	第2阶段	0.0494	23.7855	0.4094
	第3阶段	0.0109	187.0294	0.6227

在表1的计算中,改进前的ML-Ⅱ方法从原理上并没有考虑验前信息的影响,只对第二阶段的数据能计算出参数 α, β的值,从而计算出失效率 λ和平均无故障间隔时间MTBF,而对第一阶段、第三阶段的数据,根据式(18)求解时,α_{k+1}, β_{k+1}是无解的。可见,改进前的ML-Ⅱ方法在应用中有很大的局限性,工程上没有应用价值。而改进后的ML-Ⅱ方法计算中考虑了可靠性的阶段性增长,能够通过数值计算求出增长因子 η以及参数α_{k+1}, β_{k+1},且计算的结果较为客观。

(下转第62页)

统Erasure Code方案的优势。今后的工作重点将会是针对目前网络结点的差异性,设计具有自适应修复能力的异构网络P2P文件存储策略。

参考文献:

[1] Kubiatowicz J, Bindel D, et al. Oceanstore: An Architecture for Global-scale Persistent Storage[C]//Proceedings of ASPLOS, 2000.
[2] Ranjita B, Kiran T, et al. Total Recall: System Support for Automated Availability Management [C]//NSDI, 2004.
[3] Chang F, Minwen Ji, et al. Myriad: Cost-effective Disaster Tolerance[C]//Proceedings of FAST, 2002.
[4] Luby M, Mitzenmacher M. Practical Loss-resilient Codes [C]//ACM Symposium on Theory of Computing, 1997.
[5] http://www.icsi.berkeley.edu/~luby/erasure.html[R].
[6] Frank D, Frans M, et al. Wide-area Cooperative Storage with CFS[C]//Proceedings of ACM SOSP, 2001.
[7] Zhang Z, Lian Q. Reperasure: Replication Protocol using Erasure-code in Peer-to-peer Storage Network[C]//SRDS, 2002.
[8] Stoica I, Morris R, et al. Chord: A Scalable Peer-to-peer Lookup Service for Internet Applications [C]//Proc. ACM SIGCOMM, San Diego, 2001.
[9] Chen P, Lee E K, et al. RAID: High-performance, Reliable Secondary Storage[C]//ACM Computing Surveys, 1994.
[10] Aguilera M K, Janakiraman R, Xu L. On the Erasure Recoverability of MDS Codes under Concurrent Updates[C]//ISIT Proceedings, 2005.

(上接第42页)

真空压制、热压制和多次压制对材料的密度影响不大,而压制压力对材料密度影响较明显,密度随压力增大呈先增加后保持稳定的趋势。烧结温度过高或过低都会导致材料密度降低;保温时间增加时,材料密度变化呈先减小后增加的趋势,拉伸强度则明显降低。欲获得高拉伸强度的PTFE/Al反应材料,可采取自然降温的方式冷却,快速降温则将产生高断裂伸长率的样品。

参考文献:

[1] Daniel B N, Richard M T, Nikki R. Low Temperature Extrudable High Density Reactive Materials [P]. US 6962634, 2005.
[2] Michael T R, Daniel W D, James R H, et al. Reactive Material Enhanced Projectiles and Related Methods [P]. US 20060011086, 2006.
[3] William J F. Reactive Fragment Warhead for Enhanced Neutralization of Mortar, Rocket, and Missile Threats[R]. ONR-SBIR, N04-903, 2005.
[4] Joshi V S. Process for Making Polytetrafluoroethylene-Aluminum Composite and Product Made [P]. US 6547993, 2003.
[5] Vavrick D J. Reinforced Reactive Material [P]. US 20050067072, 2005.
[6] 张彤. 含能破片材料的制备及毁伤性研究[D]. 长沙:国防科技大学, 2006.
[7] 黄亨建, 黄辉, 阳世清, 等. 毁伤增强型破片探索研究[J]. 含能材料, 2007, 15(6): 566-569.

(上接第56页)

6 结语

本文针对延缓纠正模式的可靠性增长试验Bayes评估进行研究,重点解决了阶段间信息传递的增长因子的确定问题,指出现有的ML-Ⅱ方法的局限性,提出了改进的ML-Ⅱ增长因子确定方法。最后的仿真示例说明了改进方法的有效性。

参考文献:

[1] 周源泉. 可靠性增长[M]. 北京:科学出版社, 1992.
[2] Maurizio G, Gianpaolo P. Automative Reliability Inference Based on Past Data and Technical Knowledge[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2002, 76: 129-137.
[3] Raffaela C, Maurizio G. A Reliability-growth Model in a Bayes-decision Framework[J]. IEEE Trans. on Reliability, 1996, 45(3): 505-510.
[4] Robinson D G, Dietrich D. A New Nonparametric Growth Model[J]. IEEE Trans. on Reliability, 1987, 36(10): 411-418.
[5] 王华伟. 液体火箭发动机可靠性增长分析与决策研究[J]. 宇航学报, 2004, 25(6): 655-658.
[6] 党晓玲. 柔性制造系统可靠性增长管理与分析技术研究[D]. 长沙:国防科技大学, 1999: 45-53.
[7] 张金槐. Bayes可靠性增长分析中验前分布的不同确定方法及其剖析[J]. 质量与可靠性, 2004, 4: 1-10.
[8] Pandey A, Singh A, Zimmer W J. Bayes Reliability Estimation Using Multiple Source of Prior Information: Binomial Sampling[J]. IEEE Trans. on Reliability, 1994, 43(1): 511-520.
[9] 张士峰. Bayes小子样理论及其在武器系统评估中的运用研究[D]. 长沙:国防科技大学, 2000: 27-36.