

文章编号: 1001-2486(2008)06-0123-06

## 球齿轮传动的齿面接触分析和应力分析\*

李婷, 潘存云, 张立杰, 李明宇

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南长沙 410073)

**摘要:** 球齿轮是一种新型的二维齿轮传动机构。在建立了球齿轮数学模型的基础上, 得到了球齿轮传动的啮合模型, 并进行了齿面接触特性分析, 通过解非线性方程组, 可得到接触点在齿面的位置。分析了球齿轮齿面的结构特征, 针对球齿轮传动的接触形式表现为轮齿凸面与马鞍面之间的点接触, 对啮合齿面的接触椭圆进行了分析计算, 总结出了球齿轮在任一偏摆平面内啮合传动时接触椭圆的变化规律: 在轮齿根部和顶部啮合时, 接触椭圆较小, 因而接触应力较大; 而在轮齿中部啮合时, 接触椭圆较大, 所以接触应力较小。采用有限元的方法对球齿轮轮齿进行了弯曲应力和接触应力分析, 分析结果进一步验证了接触椭圆变化规律的正确性。以上结论对进一步研究球齿轮的传动理论与实际应用具有重要的指导意义。

**关键词:** 球齿轮; 接触分析; 点接触; 接触椭圆; 弯曲应力; 齿面接触应力

中图分类号: TG156 文献标识码: A

## Research of the Tooth Contact and Stress Analysis of Spherical Gear Drives

LI Ting, PAN Cun-yun, ZHANG Li-jie, LI Ming-yu

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The spherical gear is a new gear-driven mechanism with a double degree of freedom. Based on the mathematical models of spherical gears, the meshing model is obtained and tooth contact analysis is performed, so the location of contact points on teeth surfaces is received by using nonlinear solver. The structural shape of the tooth surface is studied. To the point contact form of meshing spherical gears between a convexity and a saddle surface, contact ellipses of meshing tooth surfaces are studied, and then the movement rule of contact ellipses when spherical gear pairs mesh in any swaying plane that passes through polar axes of spherical gear pairs is gained: Contact ellipses are little on teeth base and teeth tip, so contact stress is large; Contact ellipses are relatively large on teeth mid-position, so contact stress is little. Finite element analysis is applied to perform bending stress analysis and tooth contact stress analysis, and the result validates the correctness of the movement rule of contact ellipses. The study is useful for further investigations in transmission theory and practical applications of spherical gear pairs.

**Key words:** spherical gear pairs; contact analysis; point contact; contact ellipses; bending stress; tooth contact stress

随着机器人和仿生技术的发展, 在机械工程领域, 传统的齿轮机构已经不能完全满足需求, 因此, 从 20 世纪 80 年代, 就有学者开始尝试对传统齿轮进行改造, 其最主要的改变表现为将单自由度的齿轮机构变为双自由度的球形齿轮机构, 其中比较著名的双自由度球齿轮机构由 Ole. monlang<sup>[1]</sup> 发明, 用于喷漆机器人的柔性手腕机构, 这种球齿轮是离散的锥形齿, 存在传动原理误差和加工难度大的缺陷。Shyue-Cheng Yang 等提出将球齿轮上的离散锥齿改为离散圆弧齿<sup>[2]</sup> 和离散环形渐开线齿<sup>[3]</sup>, 这种改进虽然增大了齿面的接触面积, 提高了球齿轮的承载能力, 但仍然克服不了离散齿的缺陷。

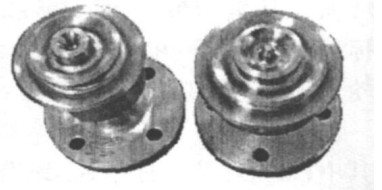


图 1 球齿轮的实物照片  
Fig. 1 Photo of spherical gears

\* 收稿日期: 2008-08-24

基金项目: 国家 863 高技术资助项目 (2006AA09Z235)

作者简介: 李婷 (1979-), 女, 博士生。

本文作者发明了一种连续环形渐开线齿球齿轮<sup>[4]</sup>,如图1为制成的球齿轮实物照片,这种球齿轮从根本上克服了离散齿的不足,不仅不存在传动原理误差,也大大地提高了齿轮齿面的承载能力。尽管很多学者对各种齿轮的传动特性进行过深入研究,但球齿轮是一种全新的齿轮机构,它的传动特性有其自身的特点,基于此,本文主要从齿面接触特性和应力分析这两方面研究球齿轮机构,以期为更加广泛的应用球齿轮机构提供坚实的理论依据。

## 1 啮合模型与齿面接触分析

### 1.1 球齿轮机构运动分析参考系的建立

球齿轮机构的安装方式如图2(a)所示,中凸球齿轮1固定,中凹球齿轮2在系杆的带动下可进行空间二维偏摆运动,根据球齿轮机构结构特点建立坐标系如图2(b)所示,固定坐标系 $S_1(x_1, y_1, z_1)$ 固连于球齿轮1;系杆固连坐标系 $S_t(x_t, y_t, z_t)$ ,初始位置与 $S_1$ 重合;行星轮(中凹球齿轮)固连坐标系 $S_2(x_2, y_2, z_2)$ 。

系杆方位由两球齿轮球心连线来描述。控制系杆绕 $x_1$ 轴和 $y_1$ 轴转动,行星球齿轮在系杆驱动下即可实现 $360^\circ$ 全方位偏摆运动。为描述机构的偏摆运动,定义两个参数:偏转轴<sup>[4]</sup> $n$ 和方位角<sup>[4]</sup> $\alpha$ ,如图2(b)所示。

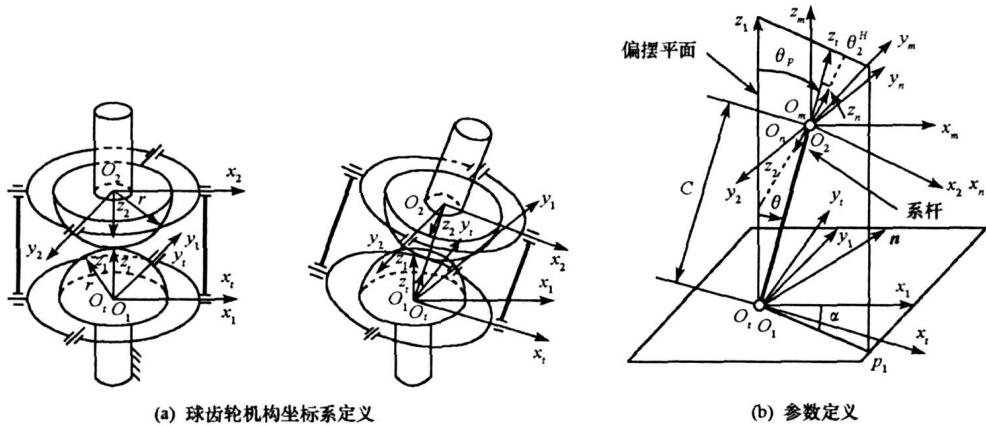


图2 球齿轮机构

Fig. 2 Spherical gear mechanism

### 1.2 球齿轮机构的啮合模型

设初始状态时系杆坐标系 $S_t$ 与固定坐标系 $S_1$ 重合。如图2(b)所示,系杆先绕 $x_1$ 转 $\theta_x$ ,再绕 $y_1$ 轴转 $\theta_y$ 。从坐标系 $S_2$ 到坐标系 $S_1$ 的变换矩阵 $M_{12}$ 可这样实现:先将固定坐标系 $S_1$ 平移到 $O_2$ 点,得到坐标系 $S_m$ ,然后再将坐标系 $S_m$ 绕轴矢量 $n$ 转过 $\theta_p$ ,得到坐标系 $S_n$ ,再将 $S_n$ 绕着 $x_n$ 轴转 $180^\circ$ ,就得到了齿轮2固连坐标系 $S_2$ 。计算得:

$$M_{12} = M_{1m} \cdot M_{mn} \cdot M_{n2} \tag{1}$$

其中, $M_{1m}$ 是从坐标系 $S_m$ 到坐标系 $S_1$ 的变换矩阵; $M_{mn}$ 是从坐标系 $S_n$ 到坐标系 $S_m$ 的变换矩阵, $M_{n2}$ 是坐标系 $S_2$ 到坐标系 $S_n$ 的变换矩阵。可通过D-H坐标变换法计算得到。

由此得到齿轮2在固定坐标系中的齿廓表面方程和单位法矢量 $n_2$ 分别为:

$$R_1^{(2)} = M_{12} R_2 \tag{2}$$

$$n_1^{(2)} = M_{mn} \cdot M_{n2} \cdot n_2 \tag{3}$$

其中,球齿轮的渐开线齿廓曲面方程和单位法矢量可参考文献[4]。

### 1.3 齿面接触分析(TCA)

由球齿轮齿廓曲面的特点可知,环形齿的内侧面为马鞍面,而外侧面为外凸面。两球齿轮啮合传动

时,一个球齿轮的外侧面与另外一个球齿轮的内侧面组成一对共轭曲面,接触特征表现为一个凸面与一个马鞍面之间的点接触。根据齿面接触理论,齿轮 1 和齿轮 2 的位置矢量和单位法矢应该表示在同一坐标系  $S_1$  中,两齿面的公共接触点在固定坐标系  $S_1$  中应该是同一个点,而且两齿面的单位法矢应该彼此共线,啮合时两齿面在接触点处应满足下面的方程<sup>[5]</sup>:

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_1^{(2)} = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_1^{(2)} = 0 \quad (5)$$

方程(4)和(5)组成的非线性方程组含有 6 个未知量  $u_1, \theta_1, \theta_x, \theta_y, u_2$  和  $\theta_2$ 。给定输入转角  $\theta_x, \theta_y$ , 可以通过求解非线性方程组解出其他未知量,从而确定两齿面的一个接触点。图 3 为球齿轮 1 上的中凸齿在某一偏摆平面(垂直于偏转轴)内的接触点轨迹。



图 3 中凸齿接触点轨迹

Fig. 3 Contact point path on convex tooth surface

## 2 球齿轮齿廓曲面的结构特征和接触椭圆计算

### 2.1 球齿轮在接触点附近两齿廓曲面的结构形状

球齿轮轮齿的接触形式表现为轮齿凸面与马鞍面(轮齿凹面)的点接触,如图 4 中的曲面  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$ ; 而传统齿轮的齿面接触形式则表现为:凸面与凸面(外啮合齿轮)、凸面与凹面(内啮合齿轮)。因此,球齿轮的齿面接触特性与传统齿轮有很大的不同。图中描述了两曲面在  $M$  点接触时的公切面  $T$  和主方向。其中,  $e_{\text{II}}^{(1)}$  和  $e_{\text{I}}^{(1)}$  为齿面  $\Sigma_1$ (轮齿凸面)的两个主方向,对应的主曲率分别为  $k_{\text{II}}^{(1)}$  和  $k_{\text{I}}^{(1)}$ ;  $e_{\text{IV}}^{(2)}$  和  $e_{\text{III}}^{(2)}$  为齿面  $\Sigma_2$ (轮齿凹面)的两个主方向,对应的主曲率分别为  $k_{\text{IV}}^{(2)}$  和  $k_{\text{III}}^{(2)}$ 。

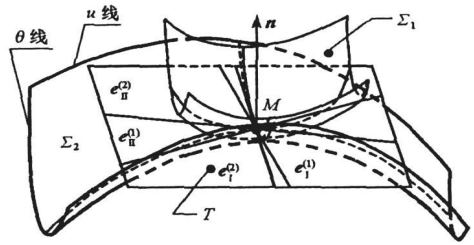


图 4 公切面与主方向

Fig. 4 Common tangent plane and principal directions

图 5(a)和图 5(b)分别为两球齿轮在过极轴的截面内从齿根向齿顶啮合时中凸齿和中凹齿在接触点处主曲率随齿廓曲面参数  $u$  的变化曲线。由图 5(a)中可以看出,对于齿面  $\Sigma_1$ ,两个主曲率  $k_{\text{II}}^{(1)}$  和  $k_{\text{I}}^{(1)}$  都大于零,根据欧拉公式可知,曲面上任意方向的法曲率都大于零,这表明该曲面的法截线的方向与  $n$  的方向相同,所有的法截线都向  $n$  的正向弯曲,即该曲面朝着同一个方向弯曲;由图 5(b)中可以看出,对于齿面  $\Sigma_2$ ,沿  $u$  线方向( $d\theta = 0$ )对应的主曲率  $k_{\text{IV}}^{(2)} < 0$ ,而沿  $\theta$  线方向( $du = 0$ )对应的主曲率  $k_{\text{III}}^{(2)} > 0$ ,该曲面沿主方向  $e_{\text{IV}}^{(2)}$  的法截线向  $n$  的反方向弯曲,沿主方向  $e_{\text{III}}^{(2)}$  的法截线向  $n$  的正方向弯曲。

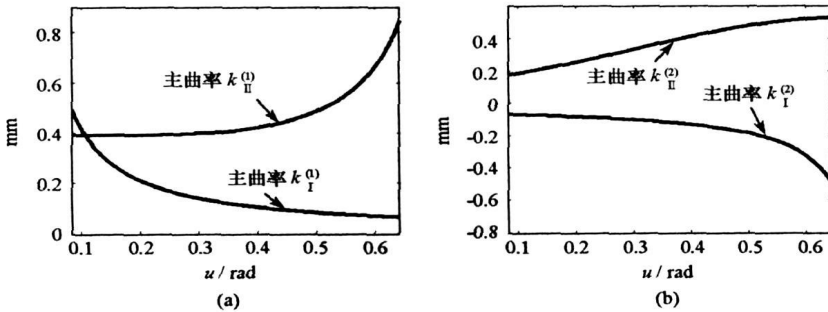


图 5 中凸齿和中凹齿的主曲率

Fig. 5 Principal curvatures of convex tooth and concave tooth

### 2.2 球齿轮接触斑点分析与计算

由前面分析可知,球齿轮轮齿的接触形式为双凸曲面与马鞍面的点接触,由于两表面在接触时弹性

变形的作用,使得两表面在接触点的瞬时接触遍布成为一个椭圆形的区域。瞬时接触椭圆的几何中心与理论接触点重合。我们的目标是在两接触面的切平面内确定接触椭圆的方向和尺寸。根据齿面接触分析理论<sup>[5-6]</sup>,可通过坐标变换将齿轮凸面(坐标系  $S_1$ )和齿轮凹面(坐标系  $S_2$ )的主方向  $e_{iv}^{(1)}$  和  $e_{iv}^{(2)}$  表示在统一的固定坐标系  $S_0$  中,很显然,对于瞬时接触点,主方向  $e_{iv}^{(1)}$  和  $e_{iv}^{(2)}$  位于其共切面内,如图6所示,接触椭圆的方向由  $\gamma$  确定,  $\gamma$  的计算公式如下:

$$\tan 2\gamma = \frac{g_2 \sin 2\sigma}{g_1 - g_2 \cos 2\sigma} \quad (6)$$

其中,  $g_1 = k_{iv}^{(1)} - k_{\Sigma}^{(1)}$ ,  $g_2 = k_{iv}^{(2)} - k_{\Sigma}^{(2)}$ ;  $\sigma$  为两个接触面第一主方向  $e_{iv}^{(1)}$  和  $e_{iv}^{(2)}$  的夹角,  $\sigma = \arccos(e_{iv}^{(1)} \cdot e_{iv}^{(2)})$ 。接触椭圆由下式确定:

$$B\eta^2 + A\xi^2 = \pm \delta \quad (7)$$

其中,  $\delta$  为两齿面接触时的弹性变形量,在小载荷条件下,根据经验数据  $\delta = 0.00635\text{mm}$ 。  $A$  和  $B$  由以下公式决定。

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} [k_{\Sigma}^{(1)} - k_{\Sigma}^{(2)} - (g_1^2 - 2g_1g_2\cos 2\sigma + g_2^2)^{1/2}] \\ B = \frac{1}{4} [k_{\Sigma}^{(1)} - k_{\Sigma}^{(2)} + (g_1^2 - 2g_1g_2\cos 2\sigma + g_2^2)^{1/2}] \\ k_{\Sigma}^{(i)} = k_{iv}^{(i)} + k_{\ominus}^{(i)}, \quad g_i^{(i)} = k_{iv}^{(i)} - k_{\ominus}^{(i)} \end{cases} \quad (8)$$

接触椭圆的长轴  $a$  和短轴  $b$  的计算公式为:

$$a = 2 \left| \frac{\delta}{A} \right|^{1/2}, \quad b = 2 \left| \frac{\delta}{B} \right|^{1/2} \quad (9)$$

因此,接触椭圆的方向和尺寸可由以上公式确定。图7为两球齿轮在某一偏摆平面内啮合运动时齿面上不同接触点处接触椭圆的变化曲线,其中,横轴表示球齿轮的转角  $\theta$ ,  $\theta = 0$  处表示两球齿轮极轴重合的位置。

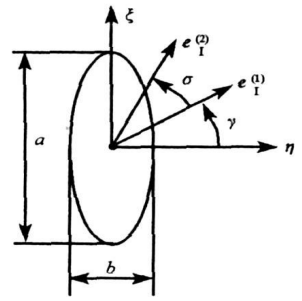


图6 接触椭圆  
Fig. 6 Contact ellipse

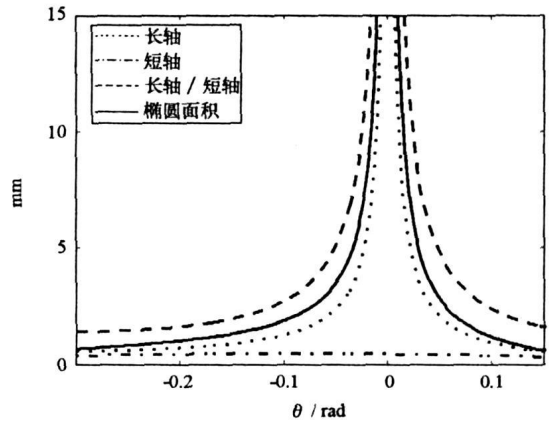


图7 接触椭圆参数随啮合角  $\theta$  的变化曲线  
Fig. 7 Parameters of contact ellipse with respect to meshing angle  $\theta$

### 3 基于有限元法的球齿轮副应力分析

由于球齿轮副表现出与传统齿轮不同的齿面机构特征,因此本节采用有限元方法对其进行接触应力和弯曲应力分析,以期掌握这种齿轮副在啮合传动中的齿面应力变化规律,这在实际应用中有一定的指导意义。

#### 3.1 球齿轮的有限元模型

齿轮系统的有限元模型对其有限元计算非常重要,所选的模型和边界条件不同,结论会相差很大。国内外许多研究者<sup>[7-9]</sup>已经用有限元法对齿轮啮合进行过接触强度分析,取得了一定的研究成果。但球齿轮是一种新型的二维传动机构,其有限元模型与传统的齿轮机构有一定差距,约束和载荷的施加方式更复杂。基于此,所建立的球齿轮啮合模型如图8所示,球齿轮的结构比较复杂,先根据其啮合接触的特点将其划分为不同的体块,采用扫掠方式生成体网格。

#### 3.2 应力分析

根据球齿轮的齿形特点可知,球齿轮在传动过程中,其中凸齿的抗弯承载能力最弱,因此,本文通过对球齿轮中凸齿和中凹齿的啮合接触进行中凸齿的弯曲应力分析和接触应力分析。需要说明的是,在进行网格划分时,中凸球齿轮的中凸齿面和与其啮合的中凹球齿轮的中凹齿面网格划分较密,啮合模型其他部分划分较稀疏,这样做不仅可以提高应力分析的精度,同时可降低单元数和节点数,能有效地节

省有限元计算时间。图 8 也对两球齿轮在啮合状态下的有限元模型进行了约束和集中载荷的加载。其中,球齿轮的齿形参数  $m = 3, z = 17, \alpha = 20^\circ$ ; 球齿轮材料的弹性模量  $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ , 泊松比  $P = 0.3$ 。中凸球齿轮的极轴(输入轴)上加载  $F = 100\text{N}$  的集中力。

图 9(a) 为两球齿轮极轴重合时中凸齿的应力分布; 图 9(b) 为球齿轮绕球心转过  $15^\circ$  时中凸齿的应力分布。图 10(a) 和图 10(b) 分别为两齿轮啮合传动时, 中凸齿从齿顶到齿根部弯曲应力和接触应力的变化曲线。这个应力分析结果表明, 可选用强度极限  $\sigma_b$  较高的合金钢材料加工球齿轮, 如  $38\text{CrMnAl}$ ,  $\sigma_b = 850\text{MPa}$ , 加工完成后再进行表面低温氮化。从图 9 和图 10 可以看出, 椭圆状的接触区域在齿面中部的接触点, 接触面积较大, 接触应力较小; 在齿顶和齿根部的接触点, 接触面积较小, 接触应力较大。

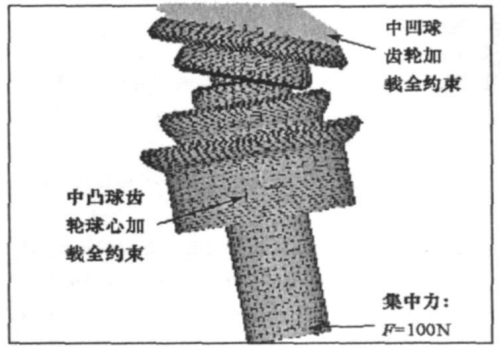


图 8 约束和集中载荷作用下的有限元模型  
Fig. 8 Finite element model with restriction and concentrated load

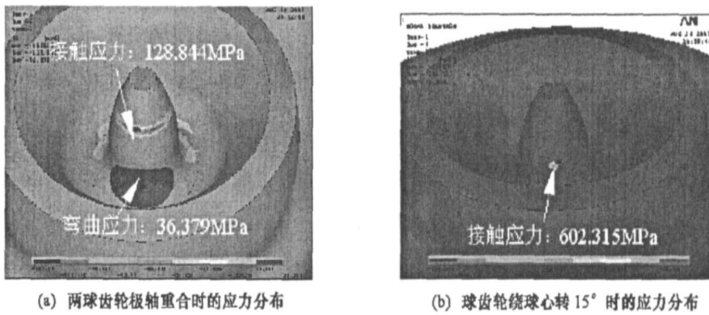


图 9 中凸齿的应力分布

Fig. 9 Stress distribution of convex tooth

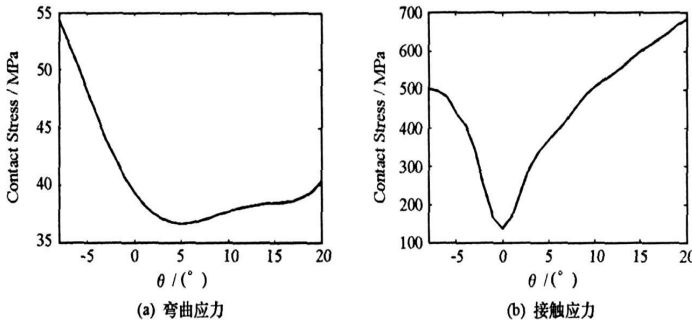


图 10 中凸齿和中凹齿啮合的应力分布

Fig. 10 Bending stress and contact stress of convex tooth

## 4 结论

(1) 球齿轮副的接触方式表现为马鞍面与凸面的点接触, 通过啮合方程可求解出任一啮合点在齿面上的位置;

(2) 球齿轮副的接触区域为椭圆形, 在靠近齿中部的接触区域, 接触椭圆的面积较大; 在靠近齿顶部和齿根部的接触区域, 接触椭圆的面积较小。

(3) 得到了球齿轮的中凸齿的应力变化规律, 在靠近齿中部的区域, 接触应力较小, 在靠近齿顶和齿根的区域, 接触应力较大。这是因为齿中部接触面积较大, 在相同载荷条件下, 单位面积承受的力较小, 因此, 产生的应力也较小。这也验证了结论(2)的正确性。

## 参考文献:

- [1] Liu Z Q, Li G X, Li H M. Research on Cone Tooth Spherical Gear Transmission of Robot Flexible Joint[C]//ASME, 1990, 26(5): 56- 60.
- [2] Yang S C, Chen C K, Li K Y. A Geometric Model of a Spherical Gear with a Double Degree of Freedom[J]. Journal of Materials Processing Technology, 2002: 219- 224.
- [3] Yang S C. A Rack-cutter Surface Used to Generate a Spherical Gear with Discrete Ring-involute Teeth[C]//Int. J. Adv. Manuf. Technol., 2005: 14- 20.
- [4] 潘存云. 渐开线球齿轮齿廓曲面方程的推导[J]. 国防科技大学学报, 2004, 26(4): 93- 98.
- [5] Litvin F L, Fuentes A. Gear Geometry and Applied Theory [M]. Cambridge University Press, 2004.
- [6] Liu C C, Tsay C B. Contact Characteristic of Beveloid Gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37: 333- 350.
- [7] Litvin F L, Fuentes A, Hayasaka K. Design, Manufacture, Stress Analysis, and Experimental Tests of Low-noise High Endurance Spiral Bevel Gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41: 83- 118.
- [8] Tsay C B. Helical Gears with Involute Shaped Teeth: Geometry, Computer Simulation, Tooth Contact Analysis, and Stress Analysis[J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1998, 110: 482- 491.
- [9] Litvin F L, Fuentes A, Gonzalez-perez I, et al. Modified involute Helical Gears: Computerized Design, Simulation of Meshing and Stress Analysis [C]//Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2003: 3619- 3655.

(上接第 117 页)

由理论分析和仿真结论容易推知,对于功率确定的雷达,不管对于远距目标还是近距目标,只要发射的脉冲宽度满足远距离探测要求,也一定同时满足近距离遮挡区的目标探测要求。这就意味着,在雷达与目标逐渐接近的过程中,不需采用多种发射波形就能对远距、近距目标进行全程搜索,缩短了搜索时间,大大提高了搜索效率。

#### 4 结束语

本文对近距离遮挡条件下雷达作用距离进行了分析,并导出了该条件下的距离方程,指出雷达的最小作用距离不受限于脉冲宽度。以此为理论基础,提出了一种适用于 LFM 脉冲雷达快速距离搜索的数字处理算法,并对其进行了计算机仿真。实验结果表明:尽管由于距离遮挡的影响,近距目标的回波会损失部分能量,但随着距离的减小,信噪比实际上是提高的;因此,无论是对于远距目标还是近距目标,只需发射一种波形即可完成对全程段的目标进行搜索,而不必根据距离的变化改变发射波形,大大提高了搜索速度。这就为制导武器系统赢得了宝贵的反应时间,对高速目标特别是机动目标的探测具有重要的意义。

## 参考文献:

- [1] Barton D K. Radar Evaluation Handbook[M]. Boston: Artech House, 1991.
- [2] 王红,毕红葵,张尉. 脉冲雷达  $R_{min}$  范围内目标距离的确定[J]. 现代雷达, 2002, 24(1): 74- 76.
- [3] 陈勇,柯长海. 线性调频雷达最小作用距离范围内目标距离的测量[J]. 电子工程师, 2006, 32(8): 8- 9.
- [4] 丁鹭飞,耿富录. 雷达原理[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2002.
- [5] Mahafza B R, Elsherbeni A Z. Matlab Simulation for Radar System Design[M]. New York: Chapman & Hall/CRC Press LLC, 2004.