文章编号: 1001- 2486(2008) 06- 0134- 05

四元数长方矩阵的同时复对角化*

程 薇, 冯良贵, 俞 森
(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 利用四元数矩阵的奇异值分解(SVD), 对两个四元数长矩阵给出了其同时复对角化的充要条件, 进一步对一个四元数长矩阵集合, 针对其同时复对角化问题, 给出了一系列充分必要条件。

关键词: 奇异值分解; 四元数长矩阵; 同时复对角化(SCD)
中图分类号: O151.21 文献标识码: A

Simulatenous Complex Diagonalization of Rectangular Quaternionic Matrices

CHENG Wei, FENG Liang-gui, YU Sen
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The simultaneous complex diagonalization (SCD) of two rectangular quaternionic matrices is introduced, moreover, SCD of a set of rectangular quaternionic matrices is also introduced, and some necessary and sufficient conditions for the existence of the SCD are derived.

Key words: singular value decomposition; rectangular quaternionic matrices; simultaneous complex digonalization

近年来, 随着四元数及四元数矩阵的应用越来越广泛, 许多学术工作者在不同的领域内对四元数矩阵理论进行了研究[1-6]。文献[1-2]研究了四元数矩阵的奇异值分解(SVD)及其应用, 文献[3]研究了四元数矩阵对的同时极分解, 文献[4]研究了四元数矩阵的广义逆, 文献[5]则对四元数矩阵理论作了一个总结。但是由于四元数的不可交换性, 四元数矩阵理论的研究相对于实数域和复数域上的矩阵理论来说相对比较困难, 很多实数域和复数域矩阵理论中成立的结果对于四元数矩阵并不成立, 例如在四元数矩阵理论中一般$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ 并不成立。文献[6]通过建立四元数矩阵列右秩与列左秩的关系不等式, 构造性地得到了两个矩阵可换的充要条件。

称一个长矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 为对角的, 当且仅当对其所有 $i \neq j$, 都有 $a_{ij} = 0$。称一个四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正规的, 当且仅当 $\boldsymbol{AA}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$。在本文中, 我们考察两个四元数矩阵的同时复对角化问题, 进而考察一个四元数矩阵集合的同时复对角化。

1 长四元数矩阵对的同时对角化

引理 1[1-2] (SVD) 设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{Q}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = r$, 则存在 $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{U}_m(\boldsymbol{Q})$ 和 $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{U}_n(\boldsymbol{Q})$ 使得

$$\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{AV} = \Sigma_A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_A & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{D}_A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$, $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0$, 为 $\boldsymbol{A}$ 的正奇异值, $r = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$。

引理 2[5] 设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{Q}^{n\times n}$ 是正规的当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 可酉对角化, 即存在 $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{U}_n(\boldsymbol{Q})$ 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{U}^*$$

其中, $\Sigma = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in C\,(1 \leqslant i \leqslant n)$。

---

* 收稿日期: 2008-01-17
基金项目: 新世纪优秀人才计划项目
作者简介: 程薇(1982—), 女, 博士生。

为了证明主要结论, 我们给出以下引理:

引理 3　设 $A \in \mathbf{Q}^{m\times n}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 I_{r_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_l I_{r_l} & \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times n}$, 其中 $r_1 + \cdots + r_l = n$, $\mu_1, \cdots, \mu_l$ 为各不相同的非零正实数。若 $A^*\Sigma$ 与 ΣA^* 皆为正规阵, 当且仅当 A 可表示为

$$A = \mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_l, A_{l+1}) = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_l & \\ & & & A_{l+1} \end{pmatrix}$$

其中, $A_i \in \mathbf{Q}^{r_i \times r_i}$ $(i = 1, \cdots, l)$, 皆为正规阵。

证明　设 $\mu_{l+1} = 0$, 将 A 作形同 Σ 的分块, 其 (i, j) 位置上的块元记为 A_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant l+1)$, 于是有

$$\Sigma A^* (\Sigma A^*)^* = \Sigma A^* A \Sigma^* = A^* \Sigma\Sigma^* A$$

$$A^* \Sigma (A^* \Sigma)^* = A^* \Sigma\Sigma^* A = A \Sigma^* \Sigma A^*$$

计算上面两式中的第 i 对角块, 得

$$\mu_i^2 \sum_{k=1}^{l+1} A_{ik} A_{ik}^* = \sum_{k=1}^{l+1} \mu_k^2 A_{ki}^* A_{ki} \tag{2}$$

$$\mu_i^2 \sum_{k=1}^{l+1} A_{ki}^* A_{ki} = \sum_{k=1}^{l+1} \mu_k^2 A_{ik} A_{ik}^* \tag{3}$$

其中, $i = 1, 2, \cdots, t$。由式(2) + 式(3) 和式(2) − 式(3) 分别可得:

$$\sum_{k=1}^{l=1} (\mu_i^2 - \mu_k^2)(A_{ik} A_{ik}^* + A_{ki}^* A_{ki}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{l=1} (\mu_i^2 + \mu_k^2)(A_{ik} A_{ik}^* - A_{ki}^* A_{ki}) = 0$$

由于 $\mu_1, \cdots, \mu_l$ 为各不相同的非零正实数, 则当 $i \neq k$ 时有 $A_{ik} A_{ik}^* = A_{ki}^* A_{ki} = 0$, 则 A 可表为 $\mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_l, A_{l+1})$ 的形式。最后直接验算可知, $A_1, \cdots, A_l$ 皆为正规阵。

反之, 若 $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_l & \\ & & & A_{l+1} \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}^{m\times n}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 I_{r_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_l I_{r_l} & \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times n}$, 则

$$\begin{aligned} \Sigma A^* (\Sigma A^*)^* &= \Sigma A^* A \Sigma^* = \Sigma A^* A \Sigma \\ &= \mathrm{diag}(\mu_1 I_{r_1}, \cdots, \mu_l I_{r_l}, \mathbf{0})\, \mathrm{diag}(A_1^*, \cdots, A_l^*, A_{l+1}^*)\, \mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_l, A_{l+1})\, \mathrm{diag}(\mu_1 I_{r_1}, \cdots, \mu_l I_{r_l}, \mathbf{0}) \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 A_1^* A_1 \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_l A_l^* A_l \mu_l & \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

由 $A_1, \cdots, A_l$ 为正规阵可知, $A_i A_i^* = A_i^* A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$, 则

$$\text{式(4)} = \begin{pmatrix} \mu_1 A_1 A_1^* \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_l A_l A_l^* \mu_l & \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} = A \Sigma\Sigma A^* = (\Sigma A^*)^* \Sigma A^*$$

类似可证 $A^* \Sigma (A^* \Sigma)^* = (A^* \Sigma)^* A^* \Sigma$, 即 $A^* \Sigma$ 与 ΣA^* 皆为正规阵。证毕。　□

定理 1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{Q}^{m\times n}$,则下列叙述等价:

(1) 存在 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{U}_m(\mathbf{Q})$ 和 $\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{U}_n(\mathbf{Q})$ 使得

$$\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{AV}=\Sigma_A,\quad \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{BV}=\Sigma_B$$

皆为复对角矩阵,且 Σ_A 的对角元皆为正实数。

(2) $\boldsymbol{AB}^*$ 和 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}$ 都是正规的。

证明 (1) ⇒(2)。若存在 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{U}_m(\mathbf{Q})$ 和 $\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{U}_n(\mathbf{Q})$ 使得

$$\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{AV}=\Sigma_A,\quad \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{BV}=\Sigma_B$$

皆为复对角矩阵,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}^*(\boldsymbol{AB}^*)^*&=\boldsymbol{AB}^*\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{U}\Sigma_A\boldsymbol{V}^*(\boldsymbol{U}\Sigma_B\boldsymbol{V}^*)^*\boldsymbol{U}\Sigma_B\boldsymbol{V}^*(\boldsymbol{U}\Sigma_A\boldsymbol{V}^*)^*=\boldsymbol{U}\Sigma_A\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{V}\Sigma_B^*\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}\Sigma_B\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{V}\Sigma_A^*\boldsymbol{U}^*\\&=\boldsymbol{U}\Sigma_A\Sigma_B^*\Sigma_B\Sigma_A^*\boldsymbol{U}^*=\boldsymbol{U}\Sigma_B\Sigma_A^*\Sigma_A\Sigma_B^*\boldsymbol{U}^*=\boldsymbol{BA}^*\boldsymbol{AB}^*=(\boldsymbol{AB}^*)^*\boldsymbol{AB}^*\end{aligned}$$

类似可得 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A})^*=(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}$,即 $\boldsymbol{AB}^*$ 和 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}$ 都是正规阵。

(2) ⇒(1) 由引理 1 知式(1) 成立。

将 $\boldsymbol{D}_A$ 改写为 $\mathrm{diag}(\mu_1\boldsymbol{I}_{r_1},\cdots,\mu_l\boldsymbol{I}_{r_l})$,其中 $\mu_1>\cdots>\mu_l>0$, $\{\mu_1,\cdots,\mu_l\}=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$, $r_1+\cdots+r_l=r$。设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}_A^*\boldsymbol{BV}_A$,则

$$\Sigma_A\boldsymbol{C}^*=(\boldsymbol{U}_A^*\boldsymbol{AV}_A)(\boldsymbol{V}_A^*\boldsymbol{BU}_A)=\boldsymbol{U}_A^*\boldsymbol{AB}^*\boldsymbol{V}_A$$

由于 $\boldsymbol{AB}^*$ 正规,则 $\Sigma_A\boldsymbol{C}^*$ 正规。类似地,由于 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}$ 正规,可证得 $\boldsymbol{C}^*\Sigma_A$ 正规。由引理 3 可知 $\boldsymbol{C}$ 可表为 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_l,\boldsymbol{C}_{l+1})$,其中 $\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_l$ 为正规矩阵,$\boldsymbol{C}_i\in\mathbf{Q}^{ri\times ri}$, $1\leqslant i\leqslant l$。

由引理2, 对正规矩阵 $\boldsymbol{C}_i(1\leqslant i\leqslant l)$ 取其 Schur 分解:

$$\Lambda_1=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{U}_1^*,\ \cdots,\ \Lambda_l=\boldsymbol{U}_l\boldsymbol{C}_l\boldsymbol{U}_l^*$$

其中, $\Lambda_i(1\leqslant i\leqslant l)$ 为复对角矩阵。

由引理1, 取 $\boldsymbol{C}_{l+1}$ 得 SVD, $\Sigma_{l+1}=\boldsymbol{U}_{l+1}^*\boldsymbol{C}_{l+1}\boldsymbol{V}_{l+1}$,其中 Σ_{l+1} 为实对角矩阵。

令 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_A(\boldsymbol{U}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{U}_l\oplus\boldsymbol{U}_{l+1})$, $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_A(\boldsymbol{U}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{U}_l\oplus\boldsymbol{V}_{l+1})$,于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{AV}&=\mathrm{diag}(\boldsymbol{U}_1^*,\cdots,\boldsymbol{U}_l^*,\boldsymbol{U}_{l+1}^*)\boldsymbol{U}_A^*\boldsymbol{AV}_A\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{U}_1,\cdots,\boldsymbol{U}_l,\boldsymbol{V}_{l+1})\\&=\mathrm{diag}(\boldsymbol{U}_1^*,\cdots,\boldsymbol{U}_l^*,\boldsymbol{U}_{l+1}^*)\,\mathrm{diag}(\mu_1\boldsymbol{I}_{r_1},\cdots,\mu_l\boldsymbol{I}_{r_l},\boldsymbol{0})\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{U}_1,\cdots,\boldsymbol{U}_l,\boldsymbol{V}_{l+1})\\&=\mathrm{diag}(\mu_1\boldsymbol{I}_{r_1},\cdots,\mu_l\boldsymbol{I}_{r_l},\boldsymbol{0})=\Sigma_A\\\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{BV}&=\mathrm{diag}(\boldsymbol{U}_1^*,\cdots,\boldsymbol{U}_l^*,\boldsymbol{U}_{l+1}^*)\boldsymbol{U}_A^*\boldsymbol{BV}_A\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{U}_1,\cdots,\boldsymbol{U}_l,\boldsymbol{V}_{l+1})\\&=\mathrm{diag}(\boldsymbol{U}_1^*,\cdots,\boldsymbol{U}_l^*,\boldsymbol{U}_{l+1}^*)\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{C}_1,\cdots,\boldsymbol{C}_l,\boldsymbol{C}_{l+1})\,\mathrm{diag}(\boldsymbol{U}_1,\cdots,\boldsymbol{U}_l,\boldsymbol{V}_{l+1})\\&=\mathrm{diag}(\Lambda_1,\cdots,\Lambda_l,\Sigma_{l+1})=\Sigma_B\end{aligned}$$ □

由定理1, 我们给出同时对角化的定义。

定义 1 [SCD] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{Q}^{m\times n}$。若存在 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{U}_m(\mathbf{Q})$ 和 $\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{U}_n(\mathbf{Q})$ 使得

$$\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{AV}=\Sigma_A,\quad \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{BV}=\Sigma_B$$

皆为复对角矩阵,且 Σ_A 的对角元皆为正实数,则称长四元数矩阵对$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$可以同时复对角化, 简记为 SCD。

推论 1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{SC}_n(\mathbf{Q})$,则下列叙述等价:

(1) $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 有 SCD;

(2) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$;

(3) 存在 $\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{SC}_n(\mathbf{Q})$ 及实系数多项式 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 使得 $\boldsymbol{A}=P_1(\boldsymbol{C})$, $\boldsymbol{B}=P_2(\boldsymbol{C})$。

证明 (1) ⇒(2)。由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{SC}_n(\mathbf{Q})$ 可得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AB}^*=(\boldsymbol{AB}^*)^*=\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{BA}$。

(2) ⇒(1) 。由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{SC}_n(\boldsymbol{Q})$ 以及 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 可得

$$(\boldsymbol{AB}^*)^*=\boldsymbol{BA}^*=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AB}^*$$

即 AB^* 是自共轭的。类似地,可得 $B^* A$ 也是自共轭的。由定理 1 可知(1)成立。

(2) ⇔(3)。见文献[6]。 □

2　四元数矩阵集的同时对角化

本节中设 $\Gamma=\{A_1, \cdots, A_s\}\in Q^{m\times n}$ 为一个 $m\times n$ 阶非零四元数矩阵集, $s<\infty$。利用四元数矩阵的广义逆[4],可以得到下述定理。

定理 2　对所有 $A, B, C\in\Gamma$, 下列陈述等价:

(1) 对任意 $A\in\Gamma$, 存在 $U\in U_m(Q)$, $V\in U_n(Q)$ 使得 UAV 是一个复对角矩阵;

(2) $A^+ BC^* = C^* BA^+$;

(3) $AB^* C = CB^* A$;

(4) $AB^+ C = CB^+ A$ 且 AB^+ 和 $B^+ A$ 都是正规阵;

(5) $B^* A$ 是正规阵且 $AB^* BC^* = BC^* AB^*$;

(6) $B^+ A$ 是正规阵且 $AB^+ (CB^+)^* = (CB^+)^* AB^+$;

(7) $B^+ A$ 是正规阵且 $AB^+ BC^* = BC^* AB^+$。

证明　(1) ⇒(2)。由 $\Sigma_A = U^* AV \Rightarrow A = U\Sigma_A V^* \Rightarrow A^+ = V\Sigma_A U^*$, 可得

$$A^+ BC^* = V\Sigma_A^+ U^* U\Sigma_B V^* V\Sigma_C^* U^* = V\Sigma_A^+ \Sigma_B \Sigma_C^* U^*$$
$$= V\Sigma_C^* \Sigma_B \Sigma_A^+ U^* = V\Sigma_C^* U^* U\Sigma_B V^* V\Sigma_A^+ U^* = C^* BA^+$$

(2) ⇒(3)。由归纳法,若 $m+n=2$, 显然(3)成立。设 $m+n=k>2$ 时(3)成立,则 $m+n=k+1$ 时,设 M 为 Γ 中秩为最小的矩阵, $\mathrm{rank}(M)=r$。

若 $r=m=n$, 则 Γ 中每个矩阵皆为非奇异阵, $A^+=A^{-1}$, 故

$$A(A^{-1}BC^*)A = A(C^* BA^{-1})A$$

则(3)成立。

若 $r<\dfrac{m+n}{2}$, 由引理 1, 存在酉阵 $U\in U_m(Q)$ 和 $V\in U_n(Q)$ 使得

$$U^* MV=\begin{pmatrix} D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{5}$$

对任意 $A\in\Gamma$, 设 $U^* AV=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $A_{11}\in Q^{r\times r}$, 则

$$V^* M^+ MA^* U = V^* M^+ UU^* MVV^* A^* U=\begin{pmatrix} D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^*\\ A_{12}^* & A_{22}^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^*\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$V^* A^* MM^+ U = V^* A^* UU^* MV^* VM^+ U=\begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^*\\ A_{12}^* & A_{22}^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}^* & 0\\ A_{12}^* & 0\end{pmatrix}$$

由(2)有 $M^+ MA^* = A^* MM^+ \Rightarrow V^* M^+ MA^* U = V^* A^* MM^+ U$, 可得 $A_{12}=0$, $A_{21}=0$, 即

$$U^* AV=\begin{pmatrix} A_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix} \tag{6}$$

由 A 的任意性可知 $\forall A_i\in\Gamma$, 都有 $U^* A_i V=\begin{pmatrix} A_1^i & 0\\ 0 & A_2^i\end{pmatrix}$, $A_1^i\in Q^{r\times r}$。由归纳假设,对 A_i^i 和 A_2^i(3)都成立,则对所有 $A_i\in\Gamma$, (3)都成立。

(3) ⇒(5)。

$$B^* A(B^* A)^* = B^*(AA^* B) = B^*(BA^* A) = (B^* BA^*)A = (A^* BB^*)A = (B^* A)^* B^* A$$

即 AB^* 为正规阵。

又因为

$$(AB^* B)C^* = (BB^* A)C^* = B(B^* AC^*) = B(C^* AB^*)$$

所以(5)成立。

(5) ⇒(1)。设 $B\in\Gamma$, 由引理1, 存在酉阵 $U\in U_m(Q)$ 和 $V\in U_n(Q)$ 使得 $U^* BV$ 如同式(5)。由对 $\forall A_i\in\Gamma$, 有 $A_iB^* BA_i^* = BA_i^* A_iB^*$, 可知 A_iB^* 正规。又 $B^* A_i$ 正规, 因此由定理1可知 A_i, B 可同时复对角化, 即(1)成立。

(1) ⇒(4)。由于 $A_i\in\Gamma$ 都可同时复对角化, 则

$$AB^+ C = U\Sigma_A V^* V\Sigma_B^+ U^* U\Sigma_C V^* = U\Sigma_A\Sigma_B^+\Sigma_C V^* = U\Sigma_C\Sigma_B^+\Sigma_A V^* = CB^+ A$$

$$(AB^+)^* AB^+ = (B^+)^* A^* AB^+ = U(\Sigma_B^+)^* V^* V\Sigma_A^* U^* U\Sigma_A V^* V\Sigma_B^+ U^*$$

$$= U(\Sigma_B^+)^* \Sigma_A^*\Sigma_A\Sigma_B^+ U^* = U\Sigma_A\Sigma_B^+(\Sigma_B^+)^*\Sigma_A^* U^* = AB^+(AB^+)^*$$

即 AB^+ 为正规矩阵。类似可得 $B^+ A$ 为正规矩阵。故(4)成立。

(4) ⇒(6)。只需证明 $AB^+(CB^+)^* = (CB^+)^* AB^+$。

由(4)有 $(AB^+ C)B^+ = (CB^+ A)B^+$, 则对 $\forall B\in\Gamma$, $\{AB^+ \mid A\in\Gamma\}$ 为正规可交换矩阵集。因此, $AB^+(CB^+)^* = (CB^+)^* AB^+$, 即(6)成立。

(6) ⇒(1)。类似于(5) ⇒(1), 设 $B\in\Gamma$, 由引理1, 存在酉阵 $U\in U_m(Q)$ 和 $V\in U_n(Q)$ 使得 $U^* BV$ 如同式(5)。由对 $\forall A_i\in\Gamma$, 有 $A_iB^+ BA_i^+ = BA_i^+ A_iB^+$, 即 A_iB^+ 正规。又由于 $B^+ A_i$ 正规, 由定理1可知 A_i, B 可同时复对角化, 即(1)成立。

(1) ⇒(7)。由(1) ⇔(6)可知 $B^+ A_i$ 正规。又

$$AB^+ BC^* = U\Sigma_A V^* V\Sigma_B^+ U^* U\Sigma_B V^* V\Sigma_C^* U^* = U\Sigma_A\Sigma_B^+\Sigma_B\Sigma_C^* U^*$$

$$= U\Sigma_B\Sigma_C^*\Sigma_A\Sigma_B^+ U^* = U\Sigma_B V^* V\Sigma_C^* U^* U\Sigma_A V^* V\Sigma_B^+ U^* = BC^* AB^+$$

即(7)成立。

(7) ⇒(1)。类似于(6) ⇒(1), 易证(1)成立。 □

参 考 文 献:

[1] Zhang F Z. Quaternions and Matrices of Quaternions[J]. Linear Algebra Appl., 1997, 251(2): 21-57.
[2] 庄瓦金. 关于四元数矩阵的奇异值分解[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 1999, 16(2): 15-19.
[3] 庄瓦金. 四元数矩阵的极分解及其GL偏序[J]. 数学进展, 2005, 34: 187-193.
[4] 庄瓦金. 体上矩阵的广义逆[J]. 数学杂志, 1986, 6: 106-112.
[5] 李文亮. 四元数矩阵[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2002.
[6] 冯良贵. 四元数矩阵的列左秩[J]. 自然科学进展, 2006, 5(16): 537-542.