

文章编号: 1001- 2486(2009) 01- 0090- 05

# 基于 Lagrange 插值的非整数延时滤波器算法<sup>\*</sup>

郭 伟, 潘仲明, 杜金榜, 王跃科

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

**摘 要:** 针对 LMS(Least Mean Square) 阵列信号波束成形器延时精度低和结构复杂的缺点, 提出了一种基于 Lagrange 插值的非整数延时滤波器算法。其本质是采用频域近似的原则, 设计出一种小数延时滤波器, 可以将数字信号直接延时小数倍采样周期, 在精确延时专题中具有广泛用途。仿真实验表明, 该滤波器可满足阵列信号波束成形中的各种延时精度要求。

**关键词:** Lagrange 插值; 非整数延时; 滤波器

中图分类号: TP274 文献标识码: B

## Fractional Delay Filter Algorithm Based on Lagrange Interpolation

GUO Wei, PAN Zhong-ming, DU Jin-bang, WANG Yue-ke

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** This paper presents a kind of fractional delay filter algorithm on the basis of Lagrange interpolation in order to improve delay-time precision and to simplify the structure of LMS array signals. A sort of fractional delay filter is designed according to approximate algorithm in frequency-domain, the digital signal can be delayed with a fraction of the sample interval by it, and it is widely applied to the subjects which need accurate delay-time. Simulation results show that the fractional filter can fulfill the different delay-time desire for synthesizing array signal with high precision.

**Key words:** Lagrange interpolation; fractional delay; filter

在声纳探测过程中, 由于目标可能位于任何方向, 为了快速准确地搜索, 需要对各个方向接收的阵列信号进行精确延时。但现有的 A/D 采样速率是有限的, 不可能无限高, 因此阵列信号的延时精度受到限制。为了提高阵列信号波束成形的延时精度, 一般采用插值、滤波、抽取的方法来提高系统的采样速率。但是, 采用这种方法需要高的系统处理速度和大的存储空间。从简化系统设计和节约成本的角度来看, 需要设计一种可对各路数字信号进行精确延时的滤波器, 而又不增加系统的处理速度和内存空间。目前解决非整数延时的主要方法有: 插值、滤波、抽取过程和 LMS 算法。这两种算法都比较复杂。基于 Lagrange 插值的非整数延时滤波器算法是一种可以直接将数字信号延时非整数倍的延时滤波器算法。该滤波器算法简单, 应用方便, 可大大简化系统的结构, 提高系统的性能。

### 1 非整数延时滤波器的原理

基于 Lagrange 插值的非整数延时滤波算法实质上就是在两个采样值之间进行插值近似, 计算出延时时刻的信号估计值, 原理如下:

假设  $x_c(t)$  是一个连续时间信号, 对  $x_c(t)$  延时  $t_d$  得到  $y_c(t) = x_c(t - t_d)$ , 然后分别对  $x_c(t)$  和  $y_c(t)$  进行采样, 采样周期为  $T$ , 则得到  $x(n)$  和  $y(n) = x(n - D)$ , 这里  $D = \text{Int}\{D\} + d$ ,  $\text{Int}\{D\}$  表示  $D$  的整数部分,  $d$  表示  $D$  的小数部分。 $y(n)$  可看作是  $x(n)$  经过一个非整数延时滤波器之后得到的输出信号。

根据  $x(n)$  和  $y(n)$  的关系可得理想非整数延时滤波器的系统响应函数:

\* 收稿日期: 2008- 06- 30

作者简介: 郭伟(1982-), 男, 博士生。

$$H_{id}(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{e^{-j\omega D} X(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = e^{-j\omega D} \quad (1)$$

显然

$$\begin{aligned} |H_{id}(e^{j\omega})| &= 1; \\ \arg\{H_{id}(e^{j\omega})\} &= \Theta_{id}(\omega) = -D\omega \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $X(e^{j\omega})$  和  $Y(e^{j\omega})$  分别是  $x(n)$  和  $y(n)$  的离散时间傅立叶变换。

令

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\Theta(\omega)}{d\omega}, \quad \tau_p(\omega) = -\frac{\Theta(\omega)}{\omega} \quad (3)$$

式中,  $\tau_g(\omega)$  为群延时,  $\tau_p(\omega)$  为相位延时。

群延时是对载波信号的延时, 相位延时是对包络信号的延时<sup>[4]</sup>。本文选用相位延时研究非整数延时滤波器的相位特性。

由式(2)和式(3)可知, 理想非整数延时滤波器的相位特性为

$$\tau_{pid}(\omega) = -D$$

对理想非整数延时滤波器的系统响应函数  $H(e^{j\omega})$  进行离散时间傅立叶反变换, 可求出其单位脉冲响应函数

$$h_{id}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{id}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega D} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\pi(n-D)]}{\pi(n-D)} = \text{sinc}(n-D) \quad (4)$$

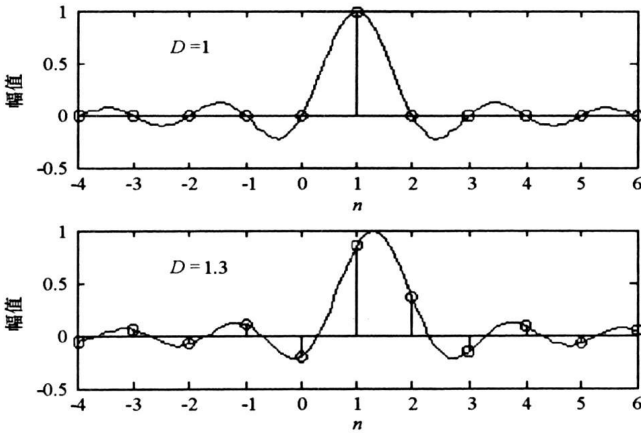


图1 理想非整数延时滤波器的单位脉冲响应

Fig. 1 Impulse response of ideal fractional delay filter

图1表示当延时长度分别为  $D=1$  和  $D=1.3$  时, 理想非整数延时滤波器的单位脉冲响应曲线。由图1可知, 当  $D$  为整数时, 理想非整数延时滤波器变成了整数延时滤波器, 这时滤波器系数在采样点上只有一个不为0 ( $n=D$ ), 其他系数都为0。而当  $D$  为非整数时, 理想非整数延时滤波器的单位脉冲响应是无限长的, 而且是一个非因果系统。在此, 采用一个  $N$  阶的有限长 FIR 滤波器  $h(n)$  (如图2所示) 对理想非整数延时滤波器  $h_{id}(n)$  进行近似, 并用频域误差

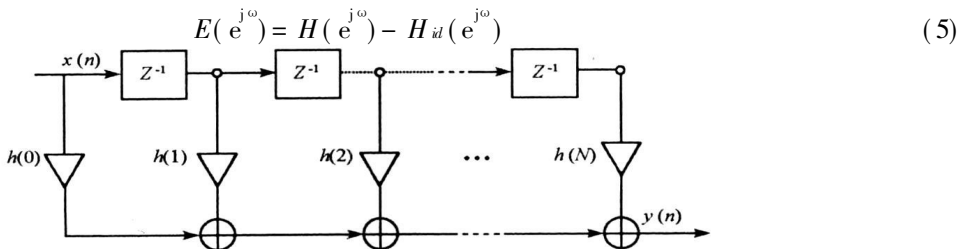


图2  $N$  阶有限长 FIR 滤波器的结构

Fig. 2 Structure of an  $N$  th-order FIR filter

作为近似准则。其中  $H(e^{j\omega})$  为  $h(n)$  的离散时间傅立叶变换。

文献[4]指出,可以使  $E(e^{j\omega})$  在某一个感兴趣的频率  $\omega_0$  上尽可能平坦,也即在该频率  $\omega_0$  附近的  $H(e^{j\omega})$  对  $H_{id}(e^{j\omega})$  的近似程度最好<sup>[4]</sup>。用数学公式描述如下:

$$\left. \frac{d^n E(e^{j\omega})}{d\omega^n} \right|_{\omega=\omega_0} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

一般选取  $\omega_0 = 0$ , 把式(1), 式(5)代入式(6), 可得

$$\sum_{k=0}^N k^n h(k) = D^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

用矩阵表示如下:

$$\mathbf{V}\mathbf{h} = \mathbf{v} \quad (8)$$

$$\text{其中, } \mathbf{v} = [1, D, D^2, \dots, D^N]^T, \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & N \\ 0 & 1 & 2^2 & \dots & N^2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2^N & \dots & N^N \end{bmatrix}, \mathbf{h} = [h_0, h_1, h_2, \dots, h_N]^T。$$

由式(8)可计算出  $N$  阶 FIR 非整数延时滤波器的系数, 即

$$h(n) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^N \frac{D-k}{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

应用式(8)或者式(9)即可快速求出非整数延时滤波器的系数。因为式(9)和经典的 Lagrange 插值公式相似, 所以称之为基于 Lagrange 插值的非整数延时滤波算法。

当  $D = 1.3$  时, 基于 Lagrange 插值的 3 阶 FIR 非整数延时滤波器系数  $h(n)$  以及幅频和相频特性曲线如图 3 所示。圆圈代表理想延时滤波器系数, 黑点代表 FIR 滤波器系数。从图 3 可以看出, 在低频情况下, 即 0 频附近, 非整数延时滤波器的幅频和相频特性相当平坦, 可以实现精确的非整数延时。这与前述的误差近似准则(在 0 频附近误差尽可能平坦)相一致。

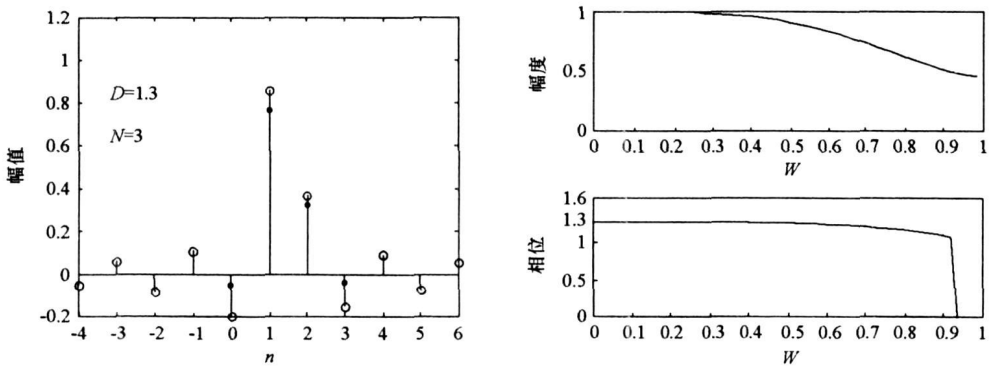


图 3 3 阶 Lagrange 插值非整数延时滤波器的幅度和相位响应图 ( $D = 0.3$ )

Fig. 3 Magnitude and phase delay response of Lagrange interpolating filters of length  $L = 3$  ( $D = 0.3$ )

## 2 误差分析

由式(6)可得小数延时滤波器在频域中的均方误差为

$$E_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_{id}(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (10)$$

根据帕塞瓦尔定理可得

$$E_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) - h_{id}(n)|^2 \quad (11)$$

把式(4), (9)代入式(11)可得

$$E_1 = \sum_{n=-\infty}^{-1} |\text{sinc}(n-D)|^2 + \sum_{n=0}^N |h(n) - \text{sinc}(n-D)|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\text{sinc}(n-D)|^2 \quad (12)$$

由式(12)可知,均方误差  $E_1$  由三项组成。并且当延时  $D$  ( $D = \text{Int}\{D\} + d$ ) 确定后,  $E_1$  只与滤波器阶数  $N$  有关。

分析式(12)的后两项误差,可知当  $E_1$  最小时,  $N$  可表示为

$$N = \begin{cases} 2 \times \text{Round}(D) & d > 0.5 \\ 2 \times \text{Int}(D) + 1 & d < 0.5 \end{cases} \quad (13)$$

由此可知,当延时时间在小数延时滤波器一半长度附近时,设计的滤波器性能最好。该结论也与一般线性 FIR 滤波器的奇偶对称性相似。

### 3 非整数延时滤波器的仿真分析

在声纳阵列信号处理中,需要将接收的各路信号进行精确延时,使各路信号完全一致,如图4所示。但是 A/D 采样周期和空间阵列所要求的延时并不完全成整数倍关系,一般需要采用插值、滤波、抽取的方法实现信号的精确延时。采用这种方法系统结构复杂,处理速度也要求比较高。

可以采用非整数延时滤波器实现图4中的延时功能。

假设仅有两个水听器构成阵列, A/D 转换器的采样速率为 1MHz(周期为 1 $\mu$ s), 信源是一频率为 1kHz 的正弦波信号。要求产生相对延时为 50.3 $\mu$ s 的两路正弦波输出(加法器的输入端,参见图4)。为了满足这一要求,需要采用一个  $D = 50.3(49 + 1.3)$  的非整数延时滤波器。整数延时采用整数延时滤波器实现,小数延时通过式(9)计算得到的 3 阶 FIR 非整数延时滤波器实现。两路正弦波输出波形的仿真结果如图5所示。其中,  $A$  代表原始信号,  $B$  代表延时了 50.3 $\mu$ s 的信号。图6是原始信号先经过 50.3 $\mu$ s 的延时,然后再采样得到的信号与直接把数字信号进行非整数延时滤波后得到的波形。其中,  $A$  (圆圈) 代表对原始信号先延时后采样所得到的波形,  $B$  (实线) 代表先采样后延时滤波所得到的波形。从图6可以看出,这两路波形基本重合,证明了非整数延时滤波器具有较高的延时精度。

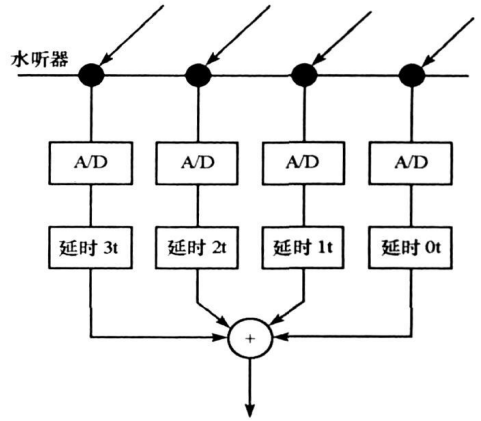


图4 声纳阵列信号的处理过程

Fig. 4 Process of sonar array signals

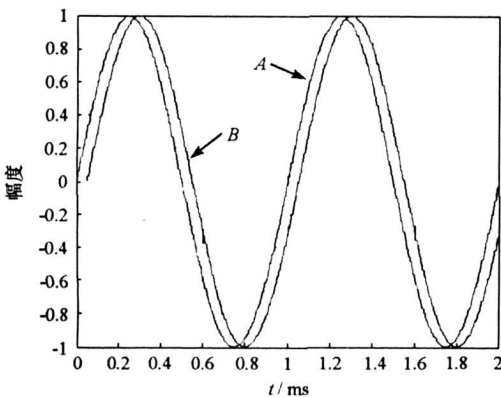


图5 延时为 50.3 $\mu$ s 的仿真结果

Fig. 5 Simulation result of delaying 50.3 $\mu$ s

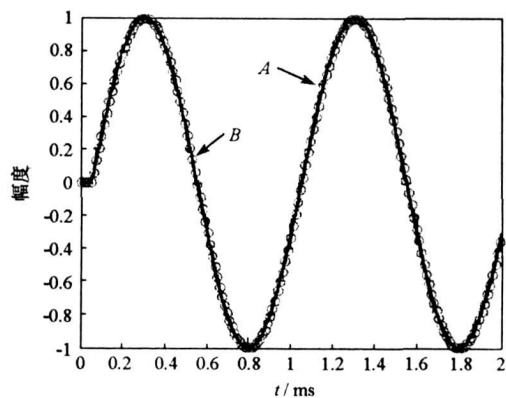


图6 两种方法分别仿真延时 50.3 $\mu$ s 的比较结果

Fig. 6 Comparative result of delaying 50.3 $\mu$ s with two different methods

## 4 非整数延时滤波器的优点

基于 Lagrange 插值的非整数延时滤波器就像一个黑匣子,一路数字信号通过它之后就会产生相应非整数延时的数字信号,使用非常简单方便。与传统的插值、滤波、抽取相比较,具有以下优点:

(1) 基于 Lagrange 插值的非整数延时滤波器使用简单方便,对于一般的延时精度,仅需要几阶的 FIR 滤波器就可以满足要求。例如延时 1.2 倍采样周期,则只需要 3 阶的 FIR 滤波器;而在插值、滤波、抽取过程中需要进行 5 倍插值和抽取,则至少需要几十阶的 FIR 滤波器才可以实现,并且所需的 FIR 滤波器阶数跟插值倍数有关,插值倍数越大,所需滤波器阶数就越高,实现过程也就越复杂。

(2) 非整数延时滤波器阶数少,因此对 DSP 的处理速度要求不高,存储空间也要求较少。但是使用插值、滤波、抽取的方法则需要 DSP 具有较高的处理速度和较大的存储空间,而且延时精度越高,则插值倍数就越大,相应的 DSP 处理速度就要求越高,存储空间也要求越大。

(3) 基于 Lagrange 插值的非整数延时滤波器算法简单,工程实现也非常方便,而插值、滤波、抽取算法的实现需要复杂的数字系统。

## 5 结论

基于 Lagrange 插值的非整数延时滤波器精度较高,性能较好,满足了阵列信号延时的各种要求。该滤波器算法简单,易于实现,已成功应用于某自导系统的阵列信号源的波束成形中,简化了系统结构,提高了信号源延时精度。

近年来,随着雷达探测、超声定位、语音合成和声自导等技术的飞速发展,对阵列信号源的延时精度要求越来越高。因此,研究基于 Lagrange 插值的非整数延时滤波器算法不仅有重要的理论意义,而且具有重要的工程应用价值。

## 参考文献:

- [1] Mo Y, Tanaka T, Inoue K, et al. Front-end Processor Using BBD Distributed Delay-sum Architecture for Micromachined Ultrasonic Sensor Array [J]. J. Microelectromech. Syst., 2003, 12(4): 506-512.
- [2] Clapp M A, Eienne cummings R. Ultrasonic Bearing Estimation Using a MEMS Microphone Array and Stationary-temporal Filter[C]//Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst., 2002, 1: 661-664.
- [3] Feldtkamp H T, Schwann R, Gieren Z V, et al. Low Power Delay Calculation for Digital Beamforming in Handheld Ultrasound Systems[C]//Proc. IEEE Ultrason. Symp., 2000, 2: 1763-1766.
- [4] Laakso T I, Vainiki V, Karjalainen M, et al. The Unit Delay[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996: 30-60.
- [5] 何振亚. 自适应信号处理[M]. 北京: 科学出版社, 2002.