

文章编号: 1001- 2486(2009) 01- 0120- 04

# 基于 LMI 的不确定性无尾飞行器鲁棒变增益控制器设计\*

李文强, 马建军, 郑志强

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 无尾式飞行器是飞行器发展的方向, 研究无尾式控制具有重要意义。研究了线性变参数系统的增益调度控制器的设计方法, 采用多胞形进行增益调度, 提出了一种简单实用的变参数顶点凸分解方法, 该方法在保证系统稳定的情况下, 确保系统达到最优性能指标。同时还充分考虑了系统的不确定性因素, 利用线性矩阵不等式(LMI)对系统进行鲁棒控制器设计, 大大减少了计算量以及对系统的约束, 设计出了基于 LMI 的增益调度控制器, 通过非线性仿真结果可以看出, 该控制器在调节变量变化很大的情况下, 使得系统在 0.5s 内收敛, 而且超调量很小, 论证了该方法在无尾式飞控系统中应用的可行性。

**关键词:** 无尾式飞行器; 不确定性; LPV 系统; 线性矩阵不等式; 增益调度

中图分类号: TP391.1 文献标识码: A

## Uncertain Tailless Aircraft Robust Gain-scheduling Controller Design Using LMI

LI Wen-qiang, MA Jian-jun, ZHENG Zhi-qiang

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** It is important to research the flight control system of tailless aircraft, which has been considered the future aircraft development direction. The gain scheduling method based LPV system was studied, and the polytope model was used to gain scheduling. A simple but applicable method to convex decomposition was proposed. This decomposition has optimal performance with guaranteed stability. The uncertainties were considered fully, and the robust controller was designed using LMI, which can reduce the constraints and computation. The controller was designed based on LMI. From nonlinear simulation, it can be seen that the controller can control the tailless aircraft to convergence within 0.5s and with small overshoot when the scheduling variable has big variation, and the method was proved feasible in the tailless flight control system.

**Key words:** tailless aircraft; uncertain; LPV system; LMI; gain scheduling

无尾式飞行器由于取消了垂尾, 相比于常规飞行器有许多优点, 比如更好的隐身性能、更强的机动性, 以及由于重量减轻而在高空长航时更优于常规布局的飞行器, 所以这些优点使得无尾式飞行器成为了今后飞行器发展的方向<sup>[1]</sup>。然而, 也正是由于取消了垂尾, 使得飞行器在横侧向变得极不稳定, 同时较常规布局飞行器有更多的不确定性。

飞行器的工作区域很大, 利用单一的 LTI 控制器对其进行控制很难同时满足系统的稳定性和一定的性能指标。增益调度方法在飞行器控制系统设计方面已经很成熟, 有很多成功应用的例子<sup>[3-4,6,8]</sup>。传统的增益调度费时费力, 而且对工作点的选取需要一定的经验, 具有一定的局限性。Apkarian 和 Gahinet 在 1995 年提出了将非线性模型转化为 LPV 模型, 然后再进行增益调度的方法<sup>[5]</sup>, 避免了对系统进行工作点选取, 而是使控制器根据调节变量的变化而变化, 实现起来比传统增益调度简单了许多。

### 1 LPV 系统

很多情况下, 系统都随时间变化, 这样一个线性时变系统可以用如下状态方程描述:

\* 收稿日期: 2008- 06- 12

作者简介: 李文强(1979—), 男, 博士生。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (1)$$

从上述描述可以看出, 不仅状态  $x(t)$  和输入  $u(t)$  随着时间变化, 而且状态方程矩阵  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  和  $D(t)$  也随着时间而变化, 进一步, 一大类 LPV 系统可以描述为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(p(t))x(t) + B(p(t))u(t) \\ y(t) = C(p(t))x(t) + D(p(t))u(t) \end{cases} \quad (2)$$

这里,  $p(t)$  是时变参数序列  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ ,  $p_{\min} \leq p_i \leq p_{\max}$ , 例如马赫数、高度、攻角等,  $p$  必须能够在线测量, 而且一般情况下的范围是可知的;  $A, B, C, D$  是  $p$  的线性仿射函数。

## 2 鲁棒变增益控制器设计

### 2.1 基于 LMI 的 $H_\infty$ 控制器设计

假设一个不确定的 LPV 系统描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(p)x + B_1(p)w + B_2u \\ z = C_1(p)x + D_{11}(p)w + D_{12}u \\ y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $x \in R^n$  是状态向量,  $u \in R^m$  是控制输入,  $y \in R^p$  是测量输出,  $z \in R^r$  是被调输出,  $w \in R^q$  是外部扰动, 这里考虑的外部扰动是不确定的, 但具有有限能量。

对于不确定性系统(3), 从外部扰动至被调输出( $w$  到  $z$ ) 的闭环 RMS 增益的最坏情况不应该超过一定的标准, 例如  $\|T_{wz}\| < \gamma$ 。利用二次  $H_\infty$  性能的概念加强 RMS 增益的约束, 并且注意到闭环系统是一个多项式系统, 这种控制器综合问题可简化为如下 LMI 问题, 寻找对称矩阵  $R$  和  $S$ , 且满足如下约束:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} N_{12} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_1R + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1R & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{12} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} N_{21} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} SA + A^T S & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{21} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \succeq 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $N_{12}$  和  $N_{21}$  分别是  $(B_2^T, D_{12}^T)$  和  $(C_2, D_{21})$  零空间的基。

### 2.2 LPV 系统多胞形模型增益调度控制器设计

如果时变参数序列  $p(t)$  在  $R^n$  空间的盒子中取值, 则有  $2^n$  个顶点, 即  $\{\prod_{i=1}^{2^n} p_i\}$ , 则系统矩阵可以写为如下形式:

$$S(p) := \begin{bmatrix} A(p) & B_1(p) & B_2 \\ C_1(p) & D_{11}(p) & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

特别地, 对时变参数任意取一个凸分解如下式:

$$p(t) = a_1 \prod_1 + \dots + a_N \prod_N, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^N a_i = 1, N = 2^n \quad (6)$$

则系统矩阵具有如下形式

$$S(p) = a_1 S(\prod_1) + \dots + a_N S(\prod_N) \quad (7)$$

这意味着可以寻求具有如下描述的参数相依控制器:

$$K(\cdot, p) \begin{cases} \xi = A_k(p)\xi + B_k(p)u \\ u = C_k(p)\xi + D_k(p)y \end{cases} \quad (8)$$

并且具有如下的顶点性质: 对于给定的当前时变参数  $p(t)$  的一个凸分解  $p(t) = \sum_i^N a_i \Pi_i$ , 控制器系统矩阵  $A_k(p), B_k(p), \dots$  可以由参数盒顶点  $A_k(\Pi_i), B_k(\Pi_i), \dots$ , 根据下式求出。

$$\begin{pmatrix} A_k(p) & B_k(p) \\ C_k(p) & D_k(p) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N a_i \begin{pmatrix} A_k(\Pi_i) & B_k(\Pi_i) \\ C_k(\Pi_i) & D_k(\Pi_i) \end{pmatrix} \quad (9)$$

### 2.3 基于 Gap Metric 的凸分解

由上一节可以看出,  $t$  时刻的变参数相对于顶点的凸分解不是唯一的, 有无穷个解。由凸集的性质可以看出, 在任意一个凸分解下, 组合后的控制器能够满足系统稳定性的要求, 但是其性能指标则相差很多, 基于这一点, 本文提出了一种基于 Gap Metric 的加权凸分解方法, 其基本思想就是距离  $t$  时刻的系统模型越近的顶点模型, 其相应控制器在该时刻的权重越大。

Gap Metric 提供了动态系统之间的一种距离度量, 文献[7]指出, 距离越小说明用同一个控制器对两个系统的控制效果越相近。假设  $t$  时刻的系统模型为  $P_t$ , 它与  $2^n$  个顶点模型之间的 Gap Metric 分别为  $\delta_1, \dots, \delta_N$ , 其中最大距离为  $\delta_{\max}$ , 则对该时刻的变参数关于顶点参数的凸分解作如下约束:

$$W_i = \delta_i / \delta_{\max}, \quad \sum_{i=1}^N W_i^{-1} a_i = 1, \quad a_i = W_i^{-1} a_i, \quad N = 2^n \quad (10)$$

其中,  $W_i$  为在 Gap Metric 度量下的该顶点系统模型在该时刻的权重, 则该时刻的调节变量的凸分解是唯一的。

## 3 无尾式飞行器鲁棒增益调度控制器设计

### 3.1 无尾飞行器 LPV 建模

引用文献[6]的无尾式飞行器模型, 对其进行适当的修改, 采用矢量发动机和副翼对其横侧向进行控制, 以解决无尾式横侧向的不稳定问题, 并利用上述理论进行控制器设计。对飞行器六自由度非线性模型应用小扰动理论, 通过一定假设将系统解耦, 得到无尾式飞行器横侧向的扰动运动方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_\beta & Y_p & Y_r & mg \cos \theta_0 \\ L_\beta & L_p & L_r & 0 \\ N_\beta & N_p & N_r & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_{cmd} \\ r_{cmd} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中  $\beta, p, r, \phi$  分别为飞行器的侧滑角、偏航角速度、滚转角速度以及滚转角;  $\theta_0$  为该飞行状态下的平衡俯仰角, 在本例中取值为  $19^\circ$ 。  $p_{cmd}, r_{cmd}$  分别为由矢量发动机和副翼产生的控制量, 具体表示形式见文献[6]; 其余参数为相应的横侧向稳定控制导数, 一般为马赫数的函数, 因此在此选取马赫数作为调度参数, 因此上述模型可以写为如下以马赫数为调度参数的 LPV 形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = A(M) \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + B(M) u \quad (12)$$

设计中选取无尾式飞行器的马赫数变化范围为 0.25~0.7, 在此区间中  $N_p, Y_p, Y_r, Y_\beta$  变化比较小, 为了节省计算时间, 认为这 4 个值为常值, 则此 LPV 模型中共有 5 个变化的参量, 根据多胞形顶点模型的理论, 则共有 32 个顶点模型需要计算, 其中 5 个变参数的变化范围如表 1 所示。

### 3.2 无尾飞行器不确定性分析

为进行有效的控制系统设计, 复杂的动态系统必须用相对简单的模型来描述, 而这样一个简化模型和实际的对象之间的差距称为模型不确定性, 对于文中描述的无尾式飞行器考虑如下不确定性因素:

表 1 变量参数变化范围

Tab. 1 The region of variable parameter

参数	最小值	最大值
$L_\beta$	- 7.4741	- 5.8652
$L_p$	- 1.4130	- 0.8203
$L_r$	0.5047	0.7594
$N_r$	- 0.2159	- 0.0594
$N_\beta$	0.5831	1.4401

(1) 高频未建模动态不确定性。由于忽略或者对无尾式飞行器缺少全面的了解, 所得到的模型会在高频区域丢失相关特性, 文中应用输入端乘性不确定性来代表这类不确定性因素。

(2) 气动数据不确定性。这是飞行器设计中最重要的一类不确定性因素, 即使飞行器是经过严格的吹风而获得的气动数据, 也存在相当大的误差, 有的甚至可以达到 100% 的误差。

(3) 执行机构的不确定性和传感器噪声。

### 3.3 仿真分析

假定调节参量的运动轨迹, 本文中调节参量为马赫数, 在其变化范围之内假设马赫数变化轨迹为正弦曲线。在方波跟踪信号响应下, 滚转角的输出如图 1 所示, 滚转角速度的变化如图 2, 并针对不确定因素对系统进行蒙特卡洛仿真, 在前述不确定性的范围内, 随机选取了 20 个不同的样本, 验证控制器的鲁棒性, 如图 3。

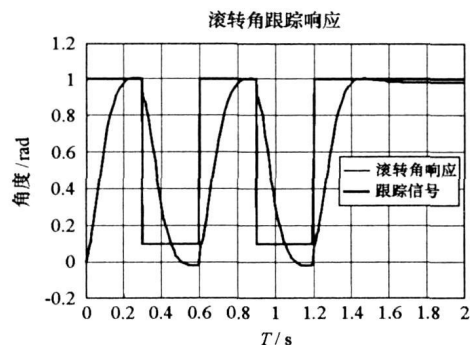


图 1 滚转角跟踪响应

Fig. 1 Roll angle response

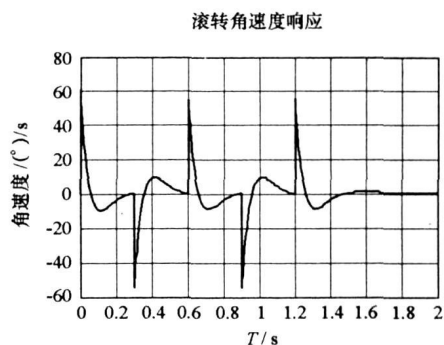


图 2 滚转角速度

Fig. 2 Roll angle velocity response

从仿真结果可以看出, 在不确定因素的影响下, 滚转角能够在 0.2s 之内跟踪参考指令, 并且超调量控制在 5% 之内, 说明该控制器能在不确定因素的影响下, 在系统的变化范围内使得系统达到较好的跟踪性能。同时从图 3 中可以看到滚转角速度在 0.25s 之内收敛为 0。从蒙特卡洛仿真可以看出, 控制器表现出了良好的鲁棒性, 滚转角阶跃的响应效果仅在超调量方面稍有差距, 20 个样本均能在 0.5s 之内达到收敛, 在保证稳定性的前提下, 也保证了系统的性能指标。

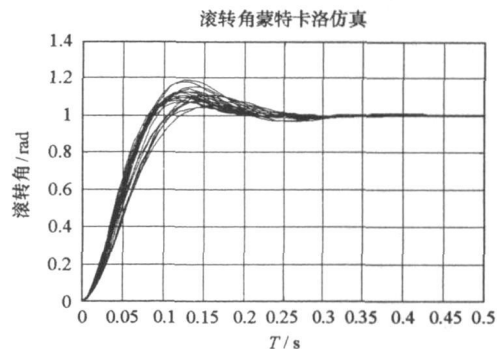


图 3 蒙特卡洛仿真

Fig. 3 Monte Carlo simulation

## 4 结论

提出了一种基于 Gap Metric 的简单适用的凸分解方法, 且成功将该方法和理论应用于无尾式飞行器的横侧向控制中, 通过非线性仿真结果可知, 该方法能够有效地抑制模型的不确定性, 并且能够在调节变量较大的变化范围内保持稳定性和一定的性能指标, 说明了该方法在非线形控制中应用的可行性。

## 参考文献:

- [1] Pual R, Gamard W L. Dynamics and Control of Tailless aircraft[R]. AIAA-97-3776, 1997.
- [2] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [3] Lu B, Wu F. Switching LPV Control of a F-16 Aircraft via Controller State Reset[J]. IEEE Trans. Control System, 2006, 14(2): 267-277.
- [4] Mehrabian A R, Roshanian J. Design of Gain-scheduled Autopilot for a Highly-agile Missile[C]// System and Control in Aerospace and Astronautics, ISSCAA 2006, 2006: 144-149.
- [5] Apkarian P, Gahinet P. A Convex Characterization of Gain-scheduled Hinf Controllers[J]. IEEE Trans. Auto. Control, 1995, 40(5): 853-864.
- [6] Rademakers N G M. Control of a Tailless Fighter using Gain-scheduling[D]. Traineeship Report, Eindhoven, January, 2004.
- [7] Zhou K M, John C D. Essentials of Robust Control[M]. Prentice Hall, 1998.
- [8] 沈明辉, 周伯昭, 等. 大气层内滚转角速度稳定功能拦截器姿态控制系统设计[J]. 国防科技大学学报, 2006, 28(4): 133-136.