

文章编号: 1001- 2486(2009) 02- 0010- 05

基于相对轨道根数的几种大椭圆轨道编队构形*

王功波, 郝晓宁

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 大椭圆轨道航天器在较长轨道周期内运行于远地点上空, 可以实现高纬度地区长时间的通信和预警, 具有重要的军事应用价值。大椭圆轨道编队飞行可实现空间磁场探测、信息干扰等特殊空间任务, 有必要研究大椭圆轨道的多航天器协同运动理论。完善了以相对轨道根数为变量的大椭圆编队相对运动模型, 分析了模型的误差。推导并证明了几种特殊的伴随星相对运动轨迹: 直线、圆、椭圆, 给出了两颗以及三颗卫星形成特殊编队构形的条件。仿真结果表明, 在二体条件下, 对近距离大椭圆轨道航天器的相对运动, 编队具有较高的精度。论文研究结论可为大椭圆轨道航天器编队构形初步设计提供理论指导。

关键词: 大椭圆轨道; 相对轨道根数; 相对构形

中图分类号: V412 文献标识码: A

Several Relative Formation of Spacecrafts Flight in Highly Elliptic Orbits Based on Relative Orbit Elements

WANG Gong-bo, XI Xiao-ning

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The spacecraft on highly elliptic orbit flies over their apogee in the most part of one period. So this kind of orbit can be used to realize long term communication and airborne early warning for high latitude areas, which is significant if applied in military. The kinematics of multi-spacecraft formation is required to deal with space missions such as the exploration of space magnetic fields and the information interference. Formulations of the relative motion on highly elliptic orbits are developed by kinematic method which takes the relative orbit elements as the variable, and then the precision of the formation is analyzed. Based on the formation, several special relative formations including the linear circular elliptical and isosceles triangle ones are discovered, and the conditions to form these formations are presented. Under the circumstance of two-body, the results from simulation show that the more close of the spacecrafts, the more accurate of the formations.

Key words: highly elliptic orbit; relative orbit elements; relative formation

大椭圆轨道航天器在较长轨道周期内运行于远地点上空, 比如俄罗斯的“闪电轨道”, 周期为 12h, 其中 11h 以上时间运行在高纬度地区上空, 可以实现高纬度地区长时间的通信和预警, 具有重要的军事应用价值。大椭圆轨道航天器还可用于空间物理探测, 比如我国的实践四号(SJ- 4) 卫星^[1], 近地点高度为 200km, 远地点高度为 36 000km, 偏心率很大。鉴于大椭圆轨道的重要应用价值, 基于大椭圆轨道的编队飞行理论的研究就显得尤为必要。

文献[2]利用动力学方法对椭圆轨道编队进行了控制方面的研究。文献[3- 5]研究了大椭圆编队的运动学模型, 并针对特定的编队构形进行了优化设计。纵观大椭圆轨道编队理论的研究, 大多集中于相对运动模型的改进以及对已知编队构形的控制方面, 专门针对大椭圆轨道编队构形设计的研究比较少见。论文基于改进的运动学模型, 通过相对轨道根数的不同组合, 得到了三种特殊的相对构形, 并在二体条件下给出了严格的证明。

* 收稿日期: 2008- 10- 15

基金项目: 国防科技大学研究生创新资助项目(080104)

作者简介: 王功波(1983-), 男, 博士生。

1 基于运动学的相对运动方程

记参考航天器为 S , 伴随航天器为 C 。取参考航天器的轨道坐标系作为参考坐标系, 并定义如下: 原点与参考航天器的质心固连并随其沿轨道运动, x 轴与参考航天器的地心矢量重合, 由地心指向 s , y 轴在参考航天器轨道面内垂直于 x 轴方向并指向运动方向为正, z 轴由右手规则确定, 亦即 z 轴与飞船轨道动量矩矢量的方向一致。轨道坐标系 $s-xyz$ 与地心惯性坐标系 O_E-XYZ 的关系如图 1 所示。

为了实现航天器长期近距离相对运动, 各编队成员的轨道长半轴必须相等, 用 a_s 和 a_c 分别表示参考航天器与伴随航天器的长半轴, 令 $a_s = a_c = a$, 可以得到以相对轨道根数为变量的相对运动学方程^[6]:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{(1+e_s \cos f_s)^2} [e_s \sin f_s (1-e_s^2) \cdot \Delta f - [2e_s + (1+e_s^2) \cos f_s] \cdot \Delta e] \\ y = \frac{a(1-e_s^2)}{1+e_s \cos f_s} [\Delta \omega + \Delta f + \cos i_s \cdot \Delta \Omega] \\ z = \frac{a(1-e_s^2)}{1+e_s \cos f_s} (\sin u_s \cdot \Delta i - \cos u_s \sin i_s \cdot \Delta \Omega) \end{cases} \quad (1)$$

其中, x, y, z 为伴随航天器在参考坐标系的位置坐标; 下标 s 表示该变量属于参考航天器, e_s, f_s, i_s, ω_s 分别表示参考航天器的偏心率、真近点角、倾角以及近地点幅角; $u_s = \omega_s + f_s$, 表示参考航天器的纬度幅角; 符号“ Δ ”表示该变量是相对轨道根数。上述变量中, 只有 u_s, f_s 与 Δf 是随时间变化的量, 其余均为常量。 f_s 与 Δf 并非独立的, Δf 可以表示为 $\Delta f = \Delta f(\Delta \sigma, f_s)$, 其中 $\Delta \sigma = \Delta \sigma(\Delta e, \Delta f_0, \Delta \omega, \Delta i, \Delta \Omega)$, 表示初始时刻相对轨道根数, Δf_0 表示初始时刻真近点角之差。根据椭圆运动的一些基本导数关系式^[6], 可以推导得到仅含变量 f_s 的相对运动方程:

$$\begin{cases} x = \frac{a(1-e_s^2)}{1+e_s \cos f_s} \left[\frac{e_s \sin f_s (1+e_s \cos f_s)}{(1+e_s \cos f_0)^2} \cdot \Delta f_0 - \frac{\omega_s f_s (1+e_s \cos f_s)}{1-e_s^2} \cdot \Delta e \right. \\ \quad \left. - \frac{e_s \sin f_s (1+e_s \cos f_s)}{1-e_s^2} \cdot \frac{2+e_s \cos f_0}{(1+e_s \cos f_0)^2} \sin f_0 \cdot \Delta e \right] \\ y = \frac{a(1-e_s^2)}{1+e_s \cos f_s} \left[\Delta \omega + \frac{\sin f_s (2+e_s \cos f_s)}{1-e_s^2} \cdot \Delta e + \left(\frac{1+e_s \cos f_s}{1+e_s \cos f_0} \right)^2 \cdot \Delta f_0 \right. \\ \quad \left. + \cos i_s \cdot \Delta \Omega - \frac{(1+e_s \cos f_s)^2}{1-e_s^2} \cdot \frac{2+e_s \cos f_0}{(1+e_s \cos f_0)^2} \sin f_0 \cdot \Delta e \right] \\ z = \frac{a(1-e_s^2)}{1+e_s \cos f_s} (\sin u_s \cdot \Delta i - \cos u_s \sin i_s \cdot \Delta \Omega) \end{cases} \quad (2)$$

f_0 表示初始时刻(即参数发生改变的时刻)参考航天器的真近点角。将 f_s 转换为时间 t 的函数, 就可以求导得到相对速度的表达式, 这里不再推导。

2 编队构形设计

利用相对运动方程(2)分析得到了两航天器编队时伴随航天器相对于参考航天器的几种特殊相对运动轨迹: 直线、圆、椭圆, 并将结果进一步应用到三个航天器编队的情况, 得到了三个航天器的直线串行编队以及等腰三角形编队。

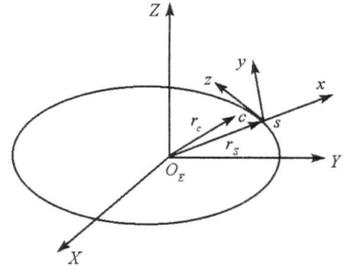


图 1 参考坐标系与地心惯性系的关系
Fig. 1 Space relationship between O_E-XYZ and $s-xyz$

2.1 两航天器编队

(1) 直线构形

仅改变近地点角距或者仅改变轨道倾角时, 伴随航天器相对运动轨迹呈直线构形。只有近地点角距改变时, 方程(2)简化为 $y = \frac{a(1-e_s^2)}{1+e_s \cos f_s} \Delta \omega$, 因为参考航天器的真近点角 f_s 是时变的, 所以相对运动轨迹为 y 轴上的线段。只有倾角改变时, 方程(2)简化为 $z = \frac{a(1-e_s^2)}{1+e_s \cos f_s} \sin u_s \cdot \Delta i$, 相对运动轨迹为 z 轴上的线段。

(2) 圆构形

只有真近点角改变时, 令 $k = \frac{a(1-e_s^2)}{(1+e_s \cos f_0)} e_s \cdot \Delta f_0$, 方程(2)简化为

$$\begin{cases} x = k \cdot \sin f_s \\ y = k \cdot \cos f_s + k/e_s \end{cases} \quad (3)$$

不难看出, 只有真近点角改变时, 伴随航天器的相对运动轨迹是参考航天器轨道面内的圆, 需要注意的是, 圆心坐标为 $(0, k/e_s)$, 并非位于参考航天器的质心, 半径大小为 k 。

(3) 椭圆构形

当初始时刻仅升交点赤经和近地点角距有微差时, 两航天器的相对运动轨迹是椭圆构形, 下面给出详细的证明。

仅升交点赤经和近地点角距有微差时, 令 $k_1 = a(1-e_s^2)(\Delta \omega + \cos i_s \cdot \Delta \Omega)$, $k_2 = a(1-e_s^2) \cos \omega_s \sin i_s \cdot \Delta \Omega$, $k_3 = a(1-e_s^2) \sin \omega_s \sin i_s \cdot \Delta \Omega$, 则方程(2)简化为

$$\begin{cases} y = \frac{k_1}{1+e_s \cos f_s} \\ z = \frac{k_2 \cos f_s}{1+e_s \cos f_s} + \frac{k_3 \sin f_s}{1+e_s \cos f_s} \end{cases} \quad (4)$$

化简, 消去 f_s 得

$$\left[k_1 z - \frac{k_1 k_2}{e_s} + \frac{k_2}{e_s} y \right]^2 + \left[(1/e_s^2 - 1) y^2 - \frac{2k_1}{e_s^2} y + \frac{k_1^2}{e_s^2} \right] k_3^2 = 0 \quad (5)$$

方程 $(1/e_s^2 - 1) y^2 - \frac{2k_1}{e_s^2} y + \frac{k_1^2}{e_s^2} = 0$ 的判别式 $\Delta = \frac{4k_1^2}{e_s^4} - 4\left(\frac{k_1^2}{e_s^4} - \frac{k_1^2}{e_s^2}\right) = \frac{4k_1^2}{e_s^2} > 0$, 因此式(4)表示的是垂直于轨道面的一个椭圆方程。

特别地, 令 $k_2 = 0$, $k_1^2 = (1/e_s^2 - 1) k_3^2$, 则(5)式可写成

$$\left(y - \frac{k_1}{1-e_s} \right)^2 + z^2 = \left(\frac{e_s k_1}{1-e_s} \right)^2 \quad (6)$$

此时, 相对运动轨迹是垂直于轨道面的圆, 亦即, 伴随航天器星下点轨迹相对于参考航天器为速度方向超前的一个圆, 圆心位置 $\left(k_1/(1-e_s^2), 0 \right)$, 半径大小为 $\left(e_s k_1/(1-e_s^2), 0 \right)$ 。如图2所示, S 表示参考航天器, C 表示伴随航天器, V 表示速度方向, 图中的圆形曲线即伴随航天器的相对运动轨迹。

根据 k_1 、 k_2 的表达式不难得到伴随航天器的相对运动轨迹为垂直参考航天器轨道面的圆的条件:

$$\begin{cases} \omega_s = k\pi + \pi/2 \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \Delta \omega = \left[\frac{\sqrt{1-e_s^2}}{e} \sin i_s - \cos i_s \right] \Delta \Omega \end{cases} \quad (7)$$

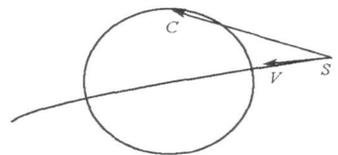


图2 超前圆构形示意图
Fig. 2 Relative formation of leading circle

若令 $k_1 = 0$, 则(4)式只在 z 向有分量, 相对轨迹退化成 z 轴上的线段。此时, 近地点角距和升交点赤经变化的关系为: $\Delta\omega + \cos i_s \cdot \Delta\Omega = 0$ 。

2.2 三个航天器编队

(1) 直线串行编队

由两个航天器的直线构形容易推广得到三个航天器沿速度方向进行直线串行编队的一个条件: 即三个航天器只有近地点角距不同。这里提出另外一种并非完全沿速度方向的直线编队。

当 $k_2 = 0$ 时, 由(4)式可得

$$\frac{y}{z} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta\omega + \cos i_s \cdot \Delta\Omega} \sin i_s \sin f_s \quad (8)$$

假设两颗伴随航天器相对于参考航天器的轨道根数分别为 $(\Delta\omega_1, \Delta\Omega_1)$ 、 $(\Delta\omega_2, \Delta\Omega_2)$, 只要同比例改变升交点赤经和近地点角距, 即

$$\frac{\Delta\Omega_1}{\Delta\omega_1 + \cos i_s \cdot \Delta\Omega_1} = \frac{\Delta\Omega_2}{\Delta\omega_2 + \cos i_s \cdot \Delta\Omega_2} \quad (9)$$

则两颗伴随航天器在参考坐标系的斜率始终相等, 三者形成了沿速度方向摆动的直线构形。

(2) 等腰三角形编队

假设有三颗伴随航天器 S_1 、 S_2 、 S_3 以及一颗虚拟的参考航天器 S_0 (以三角形符号表示), 如图3所示。其中 S_1 、 S_2 相对 S_0 只有近地点角距有差, 且差别大小相同, 符号相反。 S_3 相对 S_0 只有倾角有差。这样, 三颗伴随航天器就形成了等腰三角形编队, L_1 、 L_2 、 L_3 分别表示三颗伴随航天器的相对运动轨迹。

根据2.1节中直线构形的结论, 不难证明卫星1到卫星2、3的距离为

$$r = \frac{a(1 - e_s^2)}{1 + e_s \cos f_s} \sqrt{\Delta\omega^2 + \sin^2 u_s \Delta i^2} \quad (10)$$

等腰三角形的顶角 θ 大小为

$$\theta = 2 \arctan \frac{\Delta\omega}{\Delta i \cdot \sin(\omega_s + f_s)} \quad (11)$$

当 $\omega_s = 90^\circ$ 或 $\omega_s = 270^\circ$ 时, r 在近地点取最小值 $r_{\min} = a(1 - e_s) \Delta\omega$, 在远地点取最大值 $r_{\max} = a(1 + e_s) \Delta\omega$ 。 θ 在近地点和远地点取最小值 $\theta_{\min} = 2 \arctan \Delta\omega / \Delta i$, 在升交点和降交点取到最大值 $\theta_{\max} = 180^\circ$ 。

3 编队构形精度分析

以上编队设计的理论基础就是(2)式所表达相对运动学模型, 因此在二体条件下, 构形精度分析等价于模型精度分析。方法是选取一组典型的大椭圆轨道作为参考轨道, 分析精确的数值积分方法与采用(2)式的差别。

设参考星轨道根数为: $\mathcal{O}(a, e, i, f, \omega, \Omega) = (26\,553\,374.546\text{m}, 0.740\,97, 63.400^\circ, 0, 270.00^\circ, 0.665^\circ)$ 。图4分别给出了 $\Delta\omega$ 、 $\Delta\Omega$ 、 Δi 为 0.1° 时, 在一个轨道周期内, 应用相对轨道根数运动模型的位置误差。需要强调的是, 右下图为相对距离的误差, 并非误差的距离之和。而且, 相对轨道根数减小时, 模型误差以平方的速度递减。当 $\Delta\omega$ 、 $\Delta\Omega$ 、 Δi 为 0.01° 时, 模型的位置误差为分米级。

对于星下点轨迹为超前圆的双星编队, 当 $\Delta\Omega = 0.1^\circ$ 、 $\Delta\omega = 0.0362^\circ$ 时, 半径大小为 $r = e_s k_1 / (1 - e_s^2)$, 代入数值得 $r = 2.78 \times 10^4 \text{m}$, 此时位置误差不到百米。当编队半径为百米量级时, 位置误差为毫米量级。

对于等腰三角形编队, 当 $\Delta i = 0.1^\circ$ 、 $\Delta\omega = 0.05774^\circ$ 时, $\theta_{\min} = 2 \arctan \Delta\omega / \Delta i = 60^\circ$, $r_{\min} = a(1 - e_s) \Delta\omega = 6.93 \times 10^3 \text{m}$, $r_{\max} = a(1 + e_s) \Delta\omega = 4.66 \times 10^4 \text{m}$ 。此时位置误差在远地点最大, 不到 100m 。若编队在远

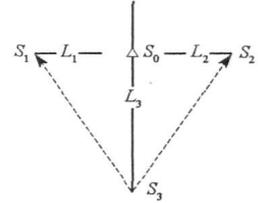


图3 等腰三角形编队示意图

Fig.3 Relative formation of isosceles triangle

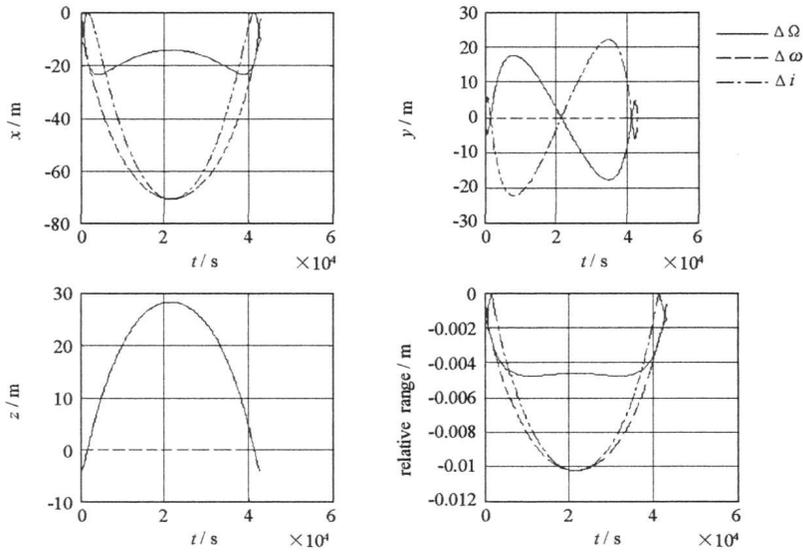


图4 相对轨道根数对模型精度的影响

Fig. 4 Effect of relative orbit element on the precision of the model

地点边长为百米量级,则模型位置误差不足毫米。

因此,对于近距离(百米量级)编队,模型具有较高的精度,编队构形在不考虑摄动情况下是相当稳定的。

4 结论

在二体的假设下,推导了以任意时刻(不局限于过近地点时刻)相对轨道根数为变量的大椭圆轨道航天器相对运动模型,并以此为据给出了两颗以及三颗卫星形成直线、超前(滞后)圆、等腰三角形等特殊编队构形的设计条件。分析了编队构形的精度。可为大椭圆轨道航天器编队设计提供一定的理论指导。进一步要做的工作是分析摄动因素对编队构形的影响。

参考文献:

- [1] 余明生. 大椭圆轨道上空间探测卫星轨道性能分析[J]. 空间科学学报, 1998, 18(4): 348- 355.
- [2] Inalhan G, Jonathan P. How. Relative Dynamics & Control of Spacecraft Formations in Eccentric Orbits[C]// AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 14- 17, August, 2000, Denver.
- [3] 安雪滢, 等. 大椭圆轨道航天器编队飞行相对运动分析[J]. 国防科技大学学报, 2005, 27(2): 1- 5.
- [4] 于萍, 张洪华. 椭圆轨道编队飞行的典型模态与构型保持控制方法[J]. 宇航学报, 2005, 26(1): 8- 12.
- [5] 安雪滢, 张为华, 杨乐平, 等. 考虑地球扁率的大椭圆轨道编队飞行优化设计[J]. 宇航学报, 2006, 27(2): 306- 311.
- [6] 郗晓宁, 王威, 高玉东. 近地航天器轨道基础[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2003.