

文章编号: 1001- 2486(2009) 02- 0116- 05

## 渐开线环形齿球齿轮传动时变刚度系数\*

张立杰, 潘存云, 李 婷, 李常义

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 为研究渐开线环形齿球齿轮传动过程中齿轮副间的接触力, 基于 Hertz 弹性接触理论定义了齿面接触点的刚度系数; 利用微分几何相关知识, 分析了球齿轮的齿面特征, 得到了实时啮合点主曲率半径计算公式; 研究了重合度系数对啮合刚度的影响, 结合球齿轮机构传动特点, 推导出任意位置反向啮合点位置计算公式; 最后通过一个实例说明球齿轮机构接触点刚度系数具有典型的时变特征。

**关键词:** 渐开线环形齿球齿轮; 接触; 时变; 刚度系数

**中图分类号:** TH132      **文献标识码:** A

## Time variable stiffness in Involute Ring Tooth Spherical Gear Transmission

ZHANG Li-jie, PAN Cun-yun, LI Ting, LI Chang-yi

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** The stiffness coefficient on the contact point of the gear pairs is defined based on the Hertz Elastic Contact Theory, which can be used to calculate the meshing force of the gear pairs. Then, the characteristics of the working flanks of the involute ring tooth spherical gear are analyzed and the equations to calculate the master curvature radius are derived. Afterwards, the contact ratio, a key factor in the calculation of the stiffness coefficient, is studied and the method on how to find the position of inverse meshing point is given. Finally, the result of an example is presented to demonstrate the time-variable characteristic of the stiffness coefficient in spherical gears transmission.

**Key words:** the involute ring tooth spherical gear; meshing; time-variable; the stiffness coefficient

齿面间的接触力学特征是齿轮传动一项重要研究内容。接触点刚度系数是接触力计算的一个关键参数。常见齿轮的接触理论已经发展得比较成熟, 作为齿轮家族的新成员, 球面齿轮接触力学特性的研究还比较少<sup>[1]</sup>。渐开线环形齿球齿轮(下文简称为球齿轮)无论传动原理还是轮齿的几何形状, 都与传统渐开线齿轮以及其它球齿轮有所不同。对它的接触特性进行研究, 不仅可以完善它的理论体系, 对于这种球齿轮在振动以及动力学特征等方面的研究也具有很好的实用价值。

## 1 基于 Hertz 理论的球齿轮接触刚度系数定义

球齿轮齿面啮合接触形式表现为一个双凸面和一个马鞍面的点接触(下文已证明), 由 Hertz 弹性接触理论, 齿面间的这种接触可作为两个变曲率半径柱体碰撞问题来研究<sup>[2]</sup>。忽略物体的弹性波动, 不计摩擦, 接触时齿面间的法向接触力和变形之间满足:

$$P = K\delta^3 \quad (1)$$

$K$  就是取决于接触物体的材料和结构形状的刚度系数, 其定义为

$$K = 4R^{\frac{1}{2}} E^* / 3 \quad (2)$$

式中,  $\delta$  为物体的接触变形;  $P$  为接触面法向接触力;  $\mu_1$  和  $\mu_2$  为材料的泊松比;  $E^*$  为综合弹性模量;  $E_1$

\* 收稿日期: 2008- 07- 09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50475058); 国家 863 计划资助项目(2006AA09Z235)

作者简介: 张立杰(1976-), 男, 博士生。

和  $E_2$  分别为两物体材料的弹性模量;  $R$  为综合曲率半径;  $R_1$  和  $R_2$  分别为两个物体接触点处的当量曲率半径。有

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}; \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3)$$

## 2 球齿轮环形渐开面形成原理及其方程

球齿轮的工作齿面是以若干条渐开线为母线绕极轴旋转形成的环形渐开面<sup>[3]</sup>, 由于渐开线的位置各不相同, 每个渐开面的几何形状也不一样(图1)。用微分几何的观点, 环形渐开面可以看作是由无数条渐开线以及渐开线上每一个点绕极轴旋转所形成的无数个圆纵横交错编织而成。

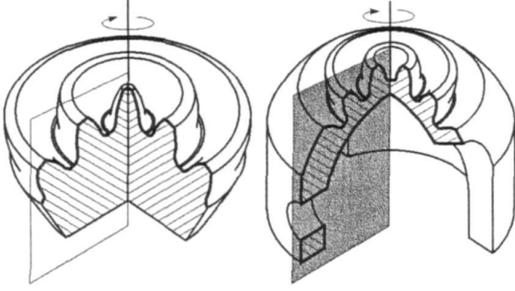


图1 球齿轮环形渐开面形成原理

Fig. 1 Forming of the ring involute flank of the spherical gear

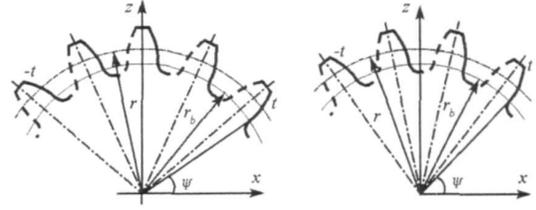


图2 齿面编码及  $\Psi$  的计算

Fig. 2 Numbering of the working flanks and  $\Psi$

文[4]中提出了半齿模型建模法, 基于这种方法的渐开线及环形渐开面方程分别为

$$\begin{cases} x = R_b [\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)] \\ y = 0 \\ z = R_b [\sin(u + \Psi) - u \cos(u + \Psi)] \end{cases} \quad (4)$$

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_b [\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)] \cos \varphi \\ R_b [\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)] \sin \varphi \\ R_b [\sin(u + \Psi) - u \cos(u + \Psi)] \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中,  $R_b$  为渐开线基圆半径;  $\alpha$  是渐开线分度圆压力角;  $\Psi$  是渐开线起始位置参数;  $\varphi$  为渐开线齿廓绕极轴旋转参数;  $r$  为环形渐开面上任意点向径;  $u = \tan \alpha$  是渐开线上点的位置参数;

由(5)式可以看出, 环形渐开面上任一点的空间位置, 可由点在渐开线齿廓上的位置参数  $u$  和该点绕极轴转过的角度  $\varphi$  决定。  $u$  和  $\varphi$  称为环形渐开面的曲纹坐标, 与之相对应的两族曲线分别称为  $u$ -曲线( $\varphi =$  常数)和  $\varphi$ -曲线( $u =$  常数)。

参数  $\Psi$  为渐开线起始位置参数, 由于中凸球齿轮和中凹球齿轮结构上的差异,  $\Psi$  的计算方法也不相同。图2所示分别为两种齿轮的环形渐开面编码规律, 实线表示用于生成对应渐开面的渐开线。

可以看出生成环形齿的外凸面的渐开线在  $x$  的正半轴, 渐开面编号为正; 而位于  $x$  负半轴的渐开线用于生成环形齿的内凹面, 渐开面编号为负。特别注意的是, 中凸球齿轮的中凸齿渐开线编号为0, 中凹球齿轮没有0号编码。根据图2可推导出中凹和中凸球齿轮  $\Psi$  的计算公式为

$$\Psi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{(4t-1)\pi}{2z} - \text{inv} \alpha (t > 0) \\ \frac{\pi}{2} - \frac{(4t+3)\pi}{2z} - \text{inv} \alpha (t < 0) \end{cases} \quad (\text{中凹球齿轮}) \quad (6)$$

$$\Psi = \frac{\pi}{2} - \frac{(4t+1)\pi}{2z} - \text{inv} \alpha \quad (\text{中凸球齿轮}) \quad (7)$$

式中,  $z$ —中凸齿球齿轮当量齿数;

$t$ —环形渐开面编号,  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 其中凸面取正, 凹面取负(中凹球齿轮  $t$  不取0)。

### 3 环形渐开面任意点处主曲率半径的计算

由式(5)计算环形渐开面的第一、第二类基本量分别为:

$$E = r_u \cdot r_u = R_b^2 u^2; F = r_u \cdot r_\varphi = 0; G = r_\varphi \cdot r_\varphi = R_b^2 [\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)]^2; M = n \cdot r_{u\varphi} = 0;$$

$$L = n \cdot r_{uu} = \frac{R_b u [\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)]}{|\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)|}; N = n \cdot r_{\varphi\varphi} = \frac{R_b \sin(u + \Psi) [\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)]^2}{|\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)|}$$

其中,  $n = r_u \times r_\varphi / |r_u \times r_\varphi|$  为渐开面单位法矢量。

由  $F = M = 0$  知道, 渐开面上各点的主方向就是  $u$ -曲线和  $\varphi$ -曲线的切线方向,  $u$ -曲线和  $\varphi$ -曲线就是渐开面的曲率线<sup>[5]</sup>。对渐开面上任意点  $S$  来说,  $u$ -曲线和  $\varphi$ -曲线在  $S$  点的法曲率  $k_1, k_2$  就是渐开面在  $S$  点的两个主曲率, 其计算公式为

$$k_1 = \frac{N}{G} = \frac{\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)}{R_b u |\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)|}; k_2 = \frac{L}{E} = \frac{\sin(u + \Psi)}{R_b |\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)|} \quad (8)$$

有

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{\sin(u + \Psi)}{R_b u (\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi))} \quad (9)$$

在半齿模型法中环形渐开面的外凸面由位于  $x$  正半轴的渐开线作为母线生成, 即(4)式中

$$x = R_b [\cos(u + \Psi) + u \sin(u + \Psi)] > 0$$

可知对于渐开面外凸面恒有  $k_1 \cdot k_2 > 0$ , 说明两主曲率与  $n$  的方向始终保持一致, 外凸面为双椭圆面(或双凸面)。而对于渐开面内凹面来说, 恒有  $k_1 \cdot k_2 < 0$ , 说明两个主曲率中有一个与  $n$  反向, 由微分几何可判定渐开面的内凹面为双曲面(或马鞍面)<sup>[5]</sup>。

根据曲率与曲率半径关系, 由(8)式得渐开面主曲率半径为

$$R_1 = 1/|k_1| = R_b u; R_2 = 1/|k_2| = R_b (\cot(u + \Psi) + u) \quad (10)$$

### 4 渐开线直齿轮共轭接触点刚度系数计算

图3所示为一对标准安装的渐开线直齿轮连续传动的某个时刻, 此时两齿轮齿廓接触点为  $S$ , 已知  $S$  点在主动轮1上的向径为  $r_s$ , 则有

$$\alpha_s = \angle N_1 O_1 S = \arccos(R_{b1}/r_s); u_s = \tan \alpha_s; \kappa_s = \left( \frac{z_1}{2} - \text{inv} \alpha_s - \text{inv} \alpha \right) / 2; \xi = \alpha_s - \alpha - \kappa_s \quad (11)$$

其中,  $R_{b1}$  是齿轮1基圆半径;  $\alpha_s$  为  $S$  点在齿轮1齿廓压力角;  $u_s$  是接触点  $S$  在渐开线上的位置参数;  $z_1$  表示齿轮1齿数;  $\kappa_s$  是点  $S$  所在圆周齿厚对应圆心角一半;  $\xi$  是点  $S$  所在轮齿中心线和齿轮连心线夹角。

可见, 对于进入啮合状态的轮齿来说,  $\xi$  和  $r_s$  一一对应, 由  $\xi$  可以判定哪一个轮齿处于啮合状态, 由式(6)或(7)得到  $\Psi$ , 然后由(11)式反推求出啮合点在该轮齿齿面上的位置  $u_s$ , 代入式(9)可求得齿轮1上  $S$  点两主曲率半径  $R_{Su}$  和  $R_{S\varphi}$ 。

齿轮1的共轭接触点在从动齿轮2上位置在图3的  $\triangle O_1 O_2 S$  中, 由余弦定理求得

$$O_2 S = \sqrt{(O_1 O_2)^2 + (O_1 S)^2 - 2 \cdot O_1 O_2 \cdot O_1 S \cdot \cos(\alpha_s - \alpha)} \quad (12)$$

结合(12)式和(9)式、(11)式即可求出接触点  $S$  的两个共轭点的

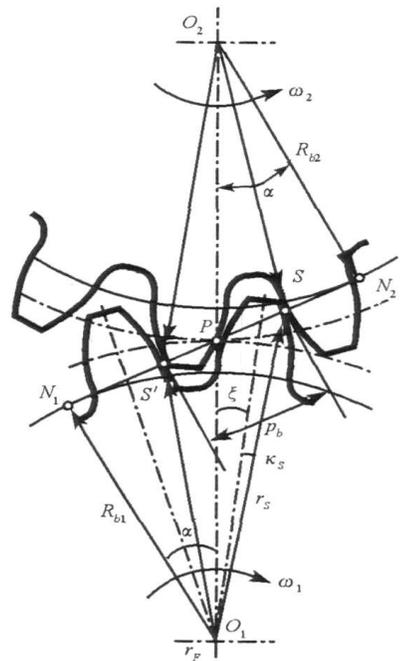


图3 共轭接触点位置分析

Fig. 3 Position of the conjugate meshing points

曲率半径  $R'_{Su}$  和  $R'_{S\varphi}$ 。

将  $R_{Su}$  和  $R'_{Su}$ 、 $R_{S\varphi}$  和  $R'_{S\varphi}$  分别代入式(2)、(3)即可求出  $S$  点两主方向上的刚度系数。

## 5 双齿啮合时的刚度系数

为保证传动的连续性和平稳性, 传动齿轮副的重合度  $\varepsilon > 1$ , 若  $S$  点位于啮合线上的双齿啮合区, 在啮合线上必定同时存在另一啮合点  $S'$ , 且两啮合点在啮合线上的距离等于基圆法向齿距  $p_b = \pi m \cos \alpha$ ,  $S'$  点向径为

$$N_1 S = \sqrt{(O_1 S)^2 - (O_1 N_1)^2} = \sqrt{(r_s)^2 - R_{b1}^2}; N_1 S' = N_1 S - p_b; O_1 S' = \sqrt{(O_1 S')^2 + (O_1 N_1)^2} \quad (13)$$

联合(13)式和(9)式、(11)式可求出  $S'$  在齿轮 1 上的主曲率半径, 同理根据(12)式可求得其共轭啮合点在齿轮 2 上的两个主曲率半径。最后利用式(2)和式(3)可求得  $S'$  点两主方向刚度系数。

此时, 轮齿的啮合刚度等于两点啮合刚度的综合效果, 定义综合啮合刚度系数为<sup>[9]</sup>

$$K = \sum_{i=1}^2 K_i \quad (14)$$

## 6 球齿轮机构啮合点位置分析

和其它球面齿轮机构相同, 渐开线环形齿球齿轮机构可实现空间两自由度运动传递。两个分量运动的合成可以获得空间全方位的运动指向, 称之为偏摆运动。此外, 环形齿结构还使得该机构具有自身独特的运动形式, 即机构当中一个球齿轮, 可以绕另一个球齿轮的极轴作锥面转动, 或者是在保持两齿轮空间相对姿态不变情况下, 两齿轮均绕各自极轴转动<sup>[7]</sup>, 称之为自旋运动。由文献[8]知道, 球齿轮在任意偏摆平面内的啮合都等同于传统渐开线直齿轮传动, 也就是说当柔性手腕作偏摆运动时, 球齿轮啮合点沿环形渐开面的  $u$ - 曲线移动。自旋运动的一个特点就是两齿轮极轴夹角保持不变, 从另一个角度来看就是, 自旋时啮合点参数  $u$  为定值, 啮合点沿渐开面  $\varphi$ - 曲线移动。综合上述分析就是: 偏摆运动时, 球齿轮沿渐开面  $u$ - 曲线啮合传动; 自旋运动时, 球齿轮沿渐开面  $\varphi$ - 曲线相对滑动。

## 7 反向啮合点位置分析

受结构和齿数的限制, 一对球齿轮机构的偏转角度永远不可能达到  $90^\circ$ , 所以球齿轮的偏摆运动只能限定在一定角度范围内, 甚至于在这一区域任意位置, 都有可能要反向偏摆, 以实现预期的运动轨迹和状态, 这就涉及反向啮合点位置的计算问题。

如图 4 所示, 主动齿轮 1 以角速度  $\omega_1$  驱动齿轮 2, 啮合点沿啮合线  $N_1 N_2$  移动。图 4 所示为啮合过程某时刻, 此时啮合点为  $S$ 。若此时主动齿轮 1 改变转动方向, 齿轮将作反向啮合, 啮合点将变为反向啮合线  $M_1 M_2$  和另一侧齿廓交点  $S_F$ 。因为  $S$  点位置已知, 由式(8)可求得轮齿中心线和齿轮连心线之间的夹角  $\xi$ 。设  $S_F$  点向径为  $r_{F}$ , 则有

$$\begin{aligned} \angle M_1 O_1 S_F &= \arccos(R_{b1}/r_F) \\ \zeta_F &= \left[ \pi z_1 - 2(\text{inv} \angle M_1 O_1 S_F - \text{inv} \alpha) \right] / 2 \\ \xi &= \alpha' - \angle M_1 O_1 S_F + \zeta_F \end{aligned} \quad (15)$$

解(15)后两式, 代入(15)第一式, 可得

$$\angle M_1 O_1 S_F = \arctan \left[ \pi z_1 - \xi + \tan \alpha \right] \quad (16)$$

$$r_F = \frac{R_{b1}}{\cos \angle M_1 O_1 S_F} \quad (17)$$

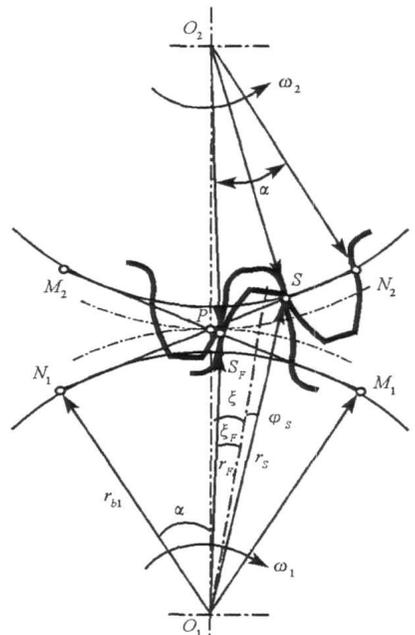


图 4 反向啮合点位置分析

Fig. 4 Position of the inverse meshing points

## 8 计算实例

如图5所示球齿轮, 模数  $m = 3$ , 当量齿数  $z_1 = z_2 = 17$ , 分度圆压力角  $\alpha = 20^\circ$ , 齿顶高系数  $h^* = 1$ , 顶隙系数  $c = 0.25$ , 标准中心距安装。两齿轮材料弹性模量  $E_1 = E_2 = 2.07 \times 10^5$ ; 泊松比  $\mu_1 = \mu_2 = 0.29$ 。

图中数字按照图2定义的轮齿编码, 应用上述公式分别计算球齿轮机构在偏摆运动和自旋运动时的刚度系数, 需要注意的是式中齿数均为此处的当量齿数, 得时变刚度曲线图6和图7。

由图6和图7可以看出, 随着球齿轮单、双齿啮合交替, 两个方向的刚度系数都呈现周期变化, 且周期相

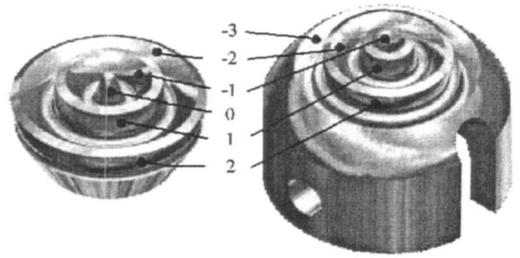


图5 球齿轮模型

Fig. 5 Model of the spherical gears

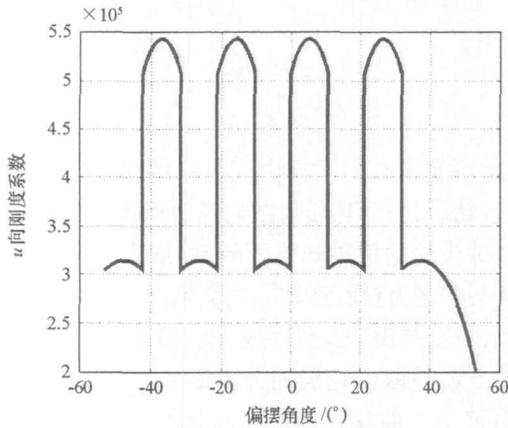


图6 沿  $u$  向啮合时变刚度系数曲线

Fig. 6 Time-variable stiffness along  $u$ -curve

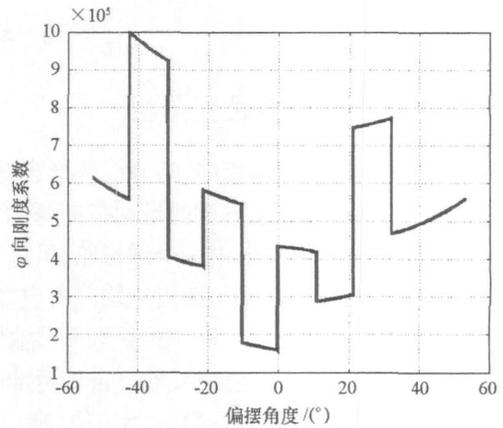


图7 沿  $\varphi$  向啮合时变刚度系数曲线

Fig. 7 Time-variable stiffness along  $\varphi$  curve

同。同时随着啮合点位置变化, 两个方向的刚度系数有明显的时变特征。不同的是球齿轮在  $u$  向刚度系数为周期性复现, 变化特征完全等同于参数相同的一对渐开线直齿轮啮合; 而  $\varphi$  向刚度系数, 由于轮齿几何特征的差异, 仅仅具有周期性, 刚度系数的值没有周期复现。

在偏摆角度边界位置, 受球齿轮结构限制, 刚度系数值有所不同。图6曲线右端对应中凸齿最外侧-2号齿面驱动中凹球齿轮2号齿面, 由于没有-3号齿面, 因而两齿面始终单齿啮合直到啮合点到达中凸球齿轮-2号齿面齿顶, 故此处刚度系数取值异样。

## 9 结论

本文对渐开线环形齿球齿轮啮合过程中的接触点刚度系数进行了研究。首先基于Hertz弹性接触理论, 定义了啮合点的刚度系数; 利用微分几何相关知识, 分析了球齿轮的齿面特征, 得到了实时啮合点主曲率半径计算公式; 研究了重合度系数对啮合刚度的影响, 结合球齿轮机构传动特点, 给出了任意位置反向啮合点的求解方法; 利用所得结论求解出球齿轮机构在两种不同运动状态下的时变刚度系数; 最后计算实例结果表明, 球齿轮啮合过程中刚度系数呈现典型时变特征。本文结论使得渐开线环形齿球齿轮理论体系进一步完善, 为球齿轮接触力学研究以及相关振动、噪声等特征研究提供了参考。

## 参考文献:

- [1] 常山, 陈荣增, 林国成. 球面齿轮传动的强度研究[J]. 热动力工程, 1994, 9(1): 54-58.
- [2] 龙凯, 程颖. 齿轮啮合仿真计算的参数选取研究[J]. 计算机仿真, 2002, 19(6): 87-88, 91.
- [3] 潘存云. 球齿轮传动原理与加工方法研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2002.
- [4] 姚齐水, 李常义, 潘存云. 渐开线环形齿球齿轮的几何建模及其齿面方程研究[J]. 机械设计与研究, 2006, 22(2): 60-63.
- [5] 梅向明, 黄敬之. 微分几何[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981.
- [6] 刘国华, 李亮玉, 赵继学. 考虑反向齿面啮合力的齿轮系统时变啮合刚度研究[J]. 天津工业大学学报, 2006, 25(6): 54-57.
- [7] 潘存云, 温熙森. 基于渐开线球齿轮的机器人柔性手腕结构与运动分析[J]. 机械工程学报, 2005, 41(7): 141-146.
- [8] 潘存云, 温熙森. 渐开线环形齿球齿轮传动原理与运动分析[J]. 机械工程学报, 2005, 41(5): 1-9.