文章编号: 1001- 2486(2009) 02- 0126- 05

非自治时滞抛物方程的 pullback 吸引子*

李 劲, 黄建华, 朱健民
(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 研究一类具有平移指数增长函数的非自治时滞抛物型偏微分方程, 证明了由方程解生成的非自治无穷维动力系统在 $L^2(\Omega)\times C([-r,0];\ L^2(\Omega))$ 空间中存在 pullback 吸引子。

关键词: Pullback 吸引子; α- 平移指数增长函数
中图分类号: O175. 26 文献标识码: A

Pullback Attractor of Non-autonomous Parabolic Equations with Time Delays

LI Jin, HUANG Jian-hua, ZHU Jian-min
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: This paper is aimed to study the dynamics of a class of non-autonomous parabolic equation with time delays and alpha-translation exponential external function. The existence of pullback attractor for the non-autonumous infinite-dimensional dynamical systems generated by the non-autonomous parabolic equation with time delays is obtained in the space $L^2(\Omega)\times C([-r,0];\ L^2(\Omega))$.

Key words: pullback attractor; α-translation exponential external function

物理、化学、生物、数学等领域中的许多问题可以用抛物型偏微分方程来描述。研究偏微分方程解的长时间性态往往通过研究无穷维动力系统的整体吸引子、惯性流形等性质来实现, 参阅文献[4- 6]等。对于非自治动力系统或随机动力系统的 pullback 吸引子的性质, 参阅文献[7]。关于时滞抛物方程及其动力系统研究, 参阅文献[1, 3, 8]等。

Rezounenko 和 Wu 在文献[1]中提出具有选择时滞的非局部 PDE 模型, 并在 $L^2(\Omega)\times L^2(-r,0;\ L^2(\Omega))$ 空间中证明了由温和解生成的动力系统存在全局吸引子。本文研究比 Rezounenko 和 Wu[1] 更一般的一类非自治时滞抛物型偏微分方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}+Au(t,x)+bu(t,x)=F(u_t)(x)+g(t,x), & x\in\Omega\\ u(\tau,x)=u_0(x),\ u(\tau+\theta,x)=\phi(\theta,x), & \theta\in(-r,0)\end{cases}\tag{1}$$

受 Caraballo[3] 中关于 NS 方程吸引子存在性证明的启发, 结合 Chepyzhov 在文献[9]中关于平移紧函数的性质, 证明了当外力项为更加广泛的一类 α- 平移指数增长函数及时滞充分小时, 式(1)在 $L^2(\Omega)\times C([-r,0];L^2(\Omega))$ 空间中 Pullback 吸引子的存在性。设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上具有光滑边界的有界区域, $b\geqslant 0$。算子 $A: D(A)\subset L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 是一个线性自伴稠定算子, 并且 A^{-1} 是 $L^2(\Omega)$ 上的紧算子。算子 A 的谱是离散的正特征值 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\dots,\ \lambda_k\to\infty(k\to\infty)$, 其相应的特征函数记为 $e_k\in D(A)$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, 易知 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 构成 Hilbert 空间 $L^2(\Omega)$ 的标准正交基。

记 $H=L^2(\Omega)$, 相应的范数为 $|\cdot|$, 内积为 $(\cdot,\cdot)$; $V=D(A^{\frac{1}{2}})$, 相应的范数为 $\|\cdot\|$, 内积为 $((\cdot,\cdot))$, 其中 $((u,v))=(A^{\frac{1}{2}}u,A^{\frac{1}{2}}v)$; 其它 Banach 空间 E 的范数记为 $\|\cdot\|_E$; 算子范数记为 $\|\cdot\|_{op}$。设 $\alpha>\beta$, 由文献[5]可知, $D(A^{\alpha})$ 紧嵌入 $D(A^{\beta})$。记 H 的对偶空间为 H', 则 $V\subset H\equiv H'\subset V'$, 且 $\forall u\in V$, $|u|\leqslant$

* 收稿日期: 2008- 08- 29
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571175)
作者简介: 李劲(1984—), 男, 博士生。

$\lambda_1^{\frac{1}{2}}\|u\|$。记 $L_H^2=L^2(-r,0;H)$, 范数 $\|u\|_{L_H^2}=\int_{-r}^0|u(\theta)|\mathrm{d}\theta$; $L_V^2=L^2(-r,0;V)$, 范数 $\|u\|_{L_V^2}=\int_{-r}^0\|u(\theta)\|\mathrm{d}\theta$; $C_H=C([-r,0];H)$, $C_V=C([-r,0];V)$。对任意的 $T>\tau$, $u(\tau-r,T)\to H$, 定义函数 $u_t(s)=u(t+s)$, $s\in(-r,0)$。

本文假设算子 $F:L^2(-r,0;L^2(\Omega))\to L^2(\Omega)$ 和函数 g 满足下面的条件:

(H1) 对于任意常数 $M>0$, 都存在常数 $L_{F,M}>0$, 使得对 L_H^2 中满足 $u,v\in B_{L_H^2}(0,M)$ 的 u,v 都有

$$|F(u)-F(v)|^2\leqslant L_{F,M}(|u(t)-v(t)|^2+\|u-v\|_{L_H^2}^2)$$

(H2) 存在常数 $k_1,k_2,k_3\geqslant 0$ 使得对任意的 $\xi\in L^2(-r,0;L^2(\Omega))$, $\eta\in L^2(\Omega)$, 都有

$$|(F(\xi),\eta)_{L^2(\Omega)}|\leqslant k_1\|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2+k_2\int_{-r}^0\|\xi(\theta)\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}\theta+k_3 \tag{2}$$

(H3) 函数 g 是 $L_{loc}^2(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ 中的 $\alpha-$ 平移指数增长函数, 即对于任意的 $t\in\mathbb{R}$, 存在不依赖时间 t 的常数 C_g 和 α, 使得

$$\int_{t-1}^t|g(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant C_g\mathrm{e}^{\alpha|t|}$$

由 Riesz 表示定理可知, F 是从 L_H^2 到 H 的有界算子, 即

$$|F(\xi)|=\|F(\xi)\|_{\varphi}=\sup_{|\eta|=1}(F(\xi),\eta)\leqslant k_1+k_2\int_{-r}^0|\xi(\theta)|^2\mathrm{d}\theta+k_3 \tag{3}$$

注: 记 $L_b^2(\mathbb{R};E)$ 为所有平移有界的函数类, 易知对任意的 $\alpha>0$, $L_b^2(\mathbb{R};H)$ 是 $\alpha-$ 平移指数增长函数集合 $L_{e,\alpha}^2(\mathbb{R};H)$ 的真子集, 且平移紧函数类 $\subset$ 正规函数类 $\subset$ 平移有界函数类 $\subset\alpha-$ 平移指数增长函数类。

1　过程的存在性

定理 1[10]　假设 $\phi\in L_H^2$, (H1) – (H2) 成立, 且 $g\in L_{loc}^2(\mathbb{R},H)$, 则对于 $\tau\in\mathbb{R}$, 有

(a) 若 $u_0\in H$, 则式(1) 存在唯一的分布意义下的弱解:

$$u\in L^2(\tau-r,T;H)\cap L^2(\tau,T;V)\cap L^\infty(\tau,T;H)\cap C([\tau,T];H)$$

(b) 若 $u_0\in V$, 那么式(1) 存在唯一的强解:

$$u\in L^2(\tau,T;D(A))\cap C([\tau,T];V),\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\in L^2(\tau,T;H)$$

方程是 $L^2(\tau,T;H)$ 空间中的等式, 且在 H 中对于 $t\in[\tau,T]$ 几乎处处成立。

假设 F 满足(H1) – (H2), $u_0\in H$, $\phi\in L_H^2$ 和 $\tau\in\mathbb{R}$。那么对于任意的 $g\in L_{loc}^2(\mathbb{R},H)$, 定理 1 表明式(1) 存在唯一的弱解 $u(\cdot;\tau(u_0,\phi),g)$, 并且对于任意的 $T>\tau$, 该弱解 $u(\cdot;\tau(u_0,\phi),g)$ 属于 $L^2(\tau,T;V)\cap C([\tau,T];H)$。选取初值函数空间为乘积空间 $M_H^2=H\times L_H^2$, 定义 M_H^2 上的范数为

$$\|u_0,\phi\|_{M_H^2}^2=|u_0|^2+\int_{-r}^0|\phi(s)|^2\mathrm{d}s,\quad \forall(u_0,\phi)\in M_H^2$$

于是 M_H^2 是一个 Hilbert 空间。在乘积空间定义双参数映射 $U(\cdot,\cdot):M_H^2\to M^2H$,

$$U(t,\tau)(u_0,\phi)=(u(t;\tau,(u_0,\phi),g),u_t(\cdot;\tau,(u_0,\phi),g)),\quad \forall(u_0,\phi)\in M_H^2,\ \tau\leqslant t$$

由定理 1 可知, U 是过程。定义算子 $U(\cdot,\cdot):M_H^2\to C_H$,

$$U(t,\tau)(u_0,\phi)=u_t(\cdot;\tau,(u_0,\phi),g),\quad \forall(u_0,\phi)\in M_H^2,\ t\geqslant\tau+r$$

定义线性算子: $j:\phi\in C_H\mapsto j(\phi)=(\phi(0),\phi)\in H\times C_H$。则 j 是从 C_H 到 M_H^2 的连续映射。注意到当 $(u_0,\phi)\in M_H^2$, $t\geqslant\tau+r$ 时就有 $U(u_0,\phi)\in C_H$, 于是

$$U(t,\tau)(u_0,\phi)=j(U(t,\tau)(u_0,\phi)),\quad \forall(u_0,\phi)\in M_H^2,\ t\geqslant\tau+r$$

记 X 空间中的所有有界集合为 $\mathscr{B}(X)$, 则有下列引理 1 及引理 2。

引理 1[3]　假设 C_H 中的集族 $\{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是算子 $U(\cdot,\cdot)$ 的关于 $\mathscr{B}(M_H^2)$ 的 Pullback 吸收集族。那么 $j(B)$ 就是 $H\times C_H$ 中过程 $U(\cdot,\cdot)$ 的 Pullback 吸收集族。

引理 2[3]　过程 $U(t,\tau):M_H^2\to M_H^2$ 对于任意的 $\tau\leqslant t$ 是连续的。

2 C_H 和 C_V 中的 pullback 吸收集

记 $u(\cdot)=u(\cdot;\tau,(u_0,\phi),g)$，下面证明过程族在 C_H 及 C_V 空间中存在 pullback 吸收集。

定理 2 假设(H1)和(H2)成立并且 $g\in L^2_{e,\alpha}(\mathbb{R},H)$。若 $\lambda_1+b>k_1+k_2re^{\alpha r}+\dfrac{\alpha}{2}$，那么算子 $U(\cdot,\cdot)$ 在 C_H 中存在一族吸收集 $\{B_1(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$。

证明 选取 $l_0>0$ 充分小和 $c_0>a$，使得 $\lambda_1+b>k_1+k_2re^{c_0r}+\dfrac{c_0}{2}+l_0$。将式(1)与 $u(t)$ 作内积

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|^2+\|u(t)\|^2+b|u(t)|^2$$
$$\leqslant k_1|u(t)|^2+k_2\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)|^2\mathrm{d}\theta+k_3+\frac{1}{4l_0}|g(t)|^2+l_0|u(t)|^2 \tag{4}$$

利用 Poincare 不等式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|^2+2(\lambda_1+b-k_1-l_0)|u(t)|^2\leqslant 2k_2\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)|^2\mathrm{d}\theta+2k_3+\frac{1}{2l_0}|g(t)|^2$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{c_0t}|u(t)|^2)\leqslant 2e^{c_0t}\left(-\left(\lambda_1+b-k_1-l_0-\frac{c_0}{2}\right)|u(t)|^2\right.$$
$$\left.+k_2\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)|^2\mathrm{d}\theta+k_3+\frac{1}{4l_0}|g(t)|^2\right)$$

从 τ 到 t 积分得到

$$e^{c_0t}|u(t)|^2-e^{c_0\tau}|u(\tau)|^2\leqslant-2\left(\lambda_1+b-k_1-l_0-\frac{c_0}{2}\right)\int_\tau^t e^{c_0s}|u(s)|^2\mathrm{d}s$$
$$+2k_2\int_\tau^t\int_{-r}^{0}e^{c_0s}|u(s+\theta)|^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s+\frac{2k_3}{c_0}(e^t-e^\tau)$$
$$+\frac{1}{2l_0}\int_\tau^t e^{c_0s}|g(s)|^2\mathrm{d}s$$

注意到

$$\int_\tau^t\int_{-r}^{0}e^{c_0s}|u(s+\theta)|^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\leqslant re^r\left(e^\tau\int_{\tau-r}^{\tau}|u(s)|^2\mathrm{d}s+\int_\tau^t e^{c_0s}|u(s)|^2\mathrm{d}s\right)$$

及

$$\int_\tau^t e^{-c_0(t-s)}|g(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant C_g\left(\sum_{i=1}^{[t]}e^{\alpha t-(c_0+a)i}+\sum_{i=[t]+1}^{\infty}e^{-\alpha t-(c_0-\alpha)i}\right)\leqslant C_g\left(te^\alpha+\frac{1}{1-e^{-(c_0-\alpha)}}e^{-\alpha t}\right)$$

有

$$e^{c_0t}|u(t)|^2-e^{c_0\tau}|u(\tau)|^2\leqslant-2\left(\lambda_1+b-k_1-k_2re^r-l_0-\frac{c_0}{2}\right)\int_\tau^t e^{c_0s}|u(s)|^2\mathrm{d}s$$
$$+2k_2re^{r+\tau}\int_{\tau-r}^{\tau}|u(s)|^2\mathrm{d}s+\frac{2k_3}{c_0}(e^{c_0t}-e^{c_0\tau})$$
$$+\frac{1}{2l_0}\int_\tau^t e^{c_0s}|g(s)|^2\mathrm{d}s$$

因此

$$|u(t)|^2\leqslant e^{-c_0(t-\tau)}|u_0|^2+2k_2re^{-c_0(t-\tau-r)}\|\phi\|^2_{L^2_H}+\frac{2k_3}{c_0}(1-e^{c_0(t-\tau)})+\frac{C_g}{2l_0}\left(te^\alpha+\frac{1}{1-e^{-(c_0-\alpha)}}e^{-\alpha}\right)$$

其中 l_0,c_0 是只依赖于 λ_1,k_1,k_2,r,a 的正常数。

对于任意的 $D\in\mathscr{R}(M_H^2)$，由上式知存在 $T_H(D)>r$，使得对任意的 $\tau<t-T_H(D)$，$(u_0,\phi)\in D$，有

$$\|U_g(t,\tau)(u_0,\phi)\|^2_{C_H}\leqslant\frac{4k_3}{c_0}+\frac{C_g}{l_0}\left(te^\alpha+\frac{1}{1-e^{-(c_0-\alpha)}}e^{-\alpha}\right)\triangleq\rho_H^2$$

这表明闭球 $B_1(t)=B_{C_H}(0,\rho_H(t))=\{\xi\in C_H|\ \|\xi\|_{C_H}\leqslant\rho_H(t)\}$ 是算子 $U(\cdot,\cdot)$ 的吸收集。□

定理 3　在定理 2 的假设下,若 $k_1<1$,则算子 $U(\cdot,\cdot)$ 在 C_V 中存在一族吸收集 $\{B_2(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$。

证明　首先对 $\int_{t-1}^{t}\|u(s)\|^2\mathrm{d}s$ 作估计。由式(4) 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2+(1+(k_1+l_0)\lambda_1^{-1})\|u(t)\|^2\leqslant k_2\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)|^2\mathrm{d}\theta+k_3+\frac{1}{4l_0}|g(t)|^2\quad(5)$$

对式(5) 从 $t-1$ 到 t 积分可得

$$\frac{1}{2}(|u(t)|-|u(t-1)|+(1+(k_1+l_0)\lambda_1^{-1})\int_{t-1}^{t}\|u(s)\|^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant K_2\int_{t-1}^{t}\int_{-r}^{0}|u(s+\theta)|^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s+k_3+\frac{1}{4l_0}\int_{t-1}^{t}|g(s)|^2\mathrm{d}s$$

整理得到

$$(1+(k_1+l_0)\lambda_1^{-1})\int_{t-1}^{t}\|u(s)\|^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant k_2r\sup_{s\in[t-1,t-\tau]}|u(s)|^2+k_3+\frac{1}{4l_0}\int_{t-1}^{t}|g(s)|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}|u(s)|^2$$

因此,存在 $T_H(D)$,使得对于任意的 $\tau<t-T_H(D)$,都有

$$\int_{t-1}^{t}\|u(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{1+(k_1+l_0)\lambda_1^{-1}}\left(\left(k_2r+\frac{1}{2}\right)\rho_H^2+k_3+\frac{1}{4l_0}\int_{t-1}^{t}\|g(s)\|^2\mathrm{d}s\right)\triangleq I_V(t)\qquad(6)$$

设 $D\in\mathscr{B}(M_H^2)$。选取 $l_1>0$ 使得 $k_1+l_1<1$。类似于文献[4] 中引理 11.2 的计算,将方程与 $Au(t)$ 作内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2+|Au(t)|^2+b\|u(t)\|^2$$
$$\leqslant k_1|Au(t)|^2+k_2\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)|^2\mathrm{d}\theta+k_3+\frac{1}{4l_1}|g(t)|^2+l_1|Au(t)|^2$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2\leqslant\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2+2(1-k_1-l_1)|Au(t)|^2$$
$$\leqslant 2k_2\int_{-r}^{0}|u(t+\theta)|^2\mathrm{d}\theta+2k_3+\frac{1}{2l_1}|g(t)|^2\qquad(7)$$

由定理 2 和不等式(6) 知道,存在 $T_H(D)$ 使得 $|u(t)|\leqslant\rho_H(t)$ 和 $\int_{t-1}^{t}\|u(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant I_V(t)$ 对所有的 $\tau<t-T_H(D)$ 成立。对不等式(7) 关于 t 在区间 $[s,t]$ 上积分得到

$$\|u(t)\|^2-\|u(s)\|^2\leqslant 2k_2\int_{s}^{t}\int_{-r}^{0}|u(s+\theta)|^2\mathrm{d}\theta+2k_3(t-s)+\frac{1}{2l_1}|g(s)|^2\mathrm{d}s$$

对 s 在区间 $[t-1,t]$ 上积分得

$$\|u(t)\|^2\leqslant\int_{t-1}^{t}\|u(s)\|^2\mathrm{d}s+2k_2\int_{t-1}^{t}\int_{-r}^{0}|u(s+\theta)|^2\mathrm{d}\theta+2k_3+\frac{1}{2l_1}\int_{t-1}^{t}|g(s)|^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant I_V(t)+2k_2r\rho_H^2(t)+2k_3+\frac{1}{2l_1}\int_{t-1}^{t}|g(s)|^2\mathrm{d}s,\quad\tau<t-T_H(D)$$

故

$$\|U_g(t,\tau)(u_0,\phi)\|_{C_V}^2\leqslant\max_{\eta\in[t-r,t]}\{I_V(\eta)+2k_2r\rho_H^2(\eta)+2k_3+\frac{1}{2l_1}\int_{\eta-1}^{\eta}|g(s)|^2\mathrm{d}s\}\triangleq\rho_V^2(t)$$

这表明 $\{B_2(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是算子 $U(\cdot,\cdot)$ 的吸收集,其中 $B_2(t)=B_{C_V}(0,\rho_V(t))$。□

3　Pullback 吸引子的存在性

定理 4　假设非线性项 F 满足条件(H1) – (H2),并且 $g\in L^2_{e,\alpha}(\mathbb{R},H)$。若 $\lambda_1+b>k_1+k_2re^{\alpha}+$

$\frac{\alpha}{2}, k_1<1$,则过程 $U(\cdot,\cdot)$ 存在 Pullback 吸引子$\{A_{M_H^2}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$,并且对任意的 $t\in\mathbb{R}$, $A_{M_H^2}(t)\subset H\times C_H$。

证明 对于任意的 $t\in\mathbb{R}$,构造集合

$$B_3(t)=\bigcup_{\phi\in B_2(t)}U(t,t-r)j(\phi)$$

则 $B_3(t)$ 是算子 $U(\cdot,\cdot)$ 在 C_V 中的有界吸收集并且一致有界。记 $u(\cdot;\tau,j(\phi),g)$ 为 $u(\cdot)$ 并设 $\theta_2>\theta_1$,有

$$|U(t,t-r)(j(\phi))(\theta_1)-U(t,t-r)(j(\phi))(\theta_2)|=|u(t+\theta_1)-u(t+\theta_2)|$$
$$\leqslant\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2}(|Au(s)|+b|u(s)|+|F(u_s)|+|g(s)|)\mathrm{d}s$$

其中 $\theta_1,\theta_2\in[-r,0]$, $\phi\in B_2$, $g\in L^2_{e,\alpha}(\mathbb{R},H)$。对上式右端四项分别作估计:

i) 对于 $g\in L^2_{loc}(\mathbb{R},H)$,根据 Lebesgue 积分在有限区间$[t-r,t]$上绝对连续性,对任意的 $t\in\mathbb{R}$,有

$$\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2}|g(s)|\mathrm{d}s\to 0,\quad(\theta_1\to\theta_2)$$

ii) 由式(7)得

$$(1-k_1-l_1)\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2}|Au(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant k_2\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2}|u(s+\theta)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+k_3(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{4l_1}\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2}|g(s)|^2\mathrm{d}s$$
$$\leqslant k_2r\rho_H^2(\theta_2-\theta_1)+k_3(\theta_2-\theta_1)$$

因此

$$\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2}|Au(s)|\mathrm{d}s\leqslant(\theta_2-\theta_1)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2}|Au(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,\quad(\theta_2\to\theta_1)$$

iii) 易知

$$\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2}b|u(s)|\mathrm{d}s\leqslant b\rho_H|\theta_2-\theta_1|$$

iv) 由式(3)得

$$\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2}|F(u_s)|\mathrm{d}s\leqslant\int_{t+\theta_1}^{t+\theta_2}\left(k_1+k_2\int_{-r}^{0}|u(s+\theta)|^2\mathrm{d}\theta+k_3\right)\mathrm{d}\theta$$
$$\leqslant(k_1+k_2r\rho_H^2+k_3)(\theta_2-\theta_1)$$

综上所述,当 $\theta_2\to\theta_1$ 时,$|u(t+\theta_1)-u(t+\theta_2)|\to 0$ 对所有的 $\phi\in B_2(t)$ 成立,即 $B_3(t)$ 等度连续。由 Ascoli-Arzela 定理,$B_3(t)$ 是 C_H 中的预紧集。故 $B_3(t)$ 是算子 $U(\cdot,\cdot)$ 在 C_H 中的紧的吸收集。令 $B_3(t)=j(B_3(t))$。由于$H\times C_H\subset M_H^2$ 并且嵌入映射是连续的,故 $B_3(t)$ 是 M_H^2 中的紧集。根据引理1, $B_3(t)$ 是过程 $U(\cdot,\cdot)$ 在 M_H^2 中的紧吸收集。根据文献[3]中定理5,过程 $U(\cdot,\cdot)$ 在 t 时刻存在 Pullback 吸引子 $A_{M_H^2}(t)$,并且对于任意的 $t\in\mathbb{R}$, $A_{M_H^2}(t)\subset H\times C_H$,证毕。

□

参考文献:

[1] Rezounenko A V, Wu J H. A Non-local PDE Model for Population Dynamics with State-selective Delay: Local Theory and Global Attractors[J]. J. Comput. Appl. Math, 2006, 190: 99-113.

[2] Rezounenko A V. Partial Differential Equations with Discrete and Distributed State-dependent Delays[J]. J. Math. Anal. Appl, 2007, 326: 1031-1045.

[3] Caraballo T, Real J. Attractors for 2D-Navier-Stokes Models with Delays[J]. J. Differential Equations, 2004, 205: 271-297.

[4] Robinson J C. Infinite-dimensional Dynamical Systems[M]. Cambridge University Press, 2001.

[5] Hale J K. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems[M]. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[6] Temam R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M]. Sec. ed., Springer, New York, 1997.

[7] Crauel H, Debussche A, Flandoli F, Random attractors[J]. J. Dyn. Differential Equations, 1995, 9(2): 307-341.

[8] Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations[M]. Springer-verlag, New York, 1996.

[9] Chepyzhov V V, Vishik M I. Attractors for Equations of Mathematical Physics[M]. AMS, 2002.

[10] Li J, Huang J H. Uniform Attractors for Non-autonomous Parabolic Equations with Delays[EB]. Nonlinear Analysis, 2009.