

文章编号: 1001-2486(2009)03-0029-04

基于 Lambert 算法的脉冲精确变轨策略*

桑艳, 周进

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: Lambert 问题的求解多以二体假设为基础, 从而对精确轨道控制带来不利影响。提出了一种脉冲修正策略, 建立了考虑摄动影响的航天器轨道动力学计算模型, 在 Lambert 算法基础上, 通过拟牛顿法对变轨脉冲进行修正, 消除终端状态误差, 从而获得精确的变轨脉冲。将该修正策略用于固定时间精确变轨问题, 建立了两层规划模型, 并通过算例验证了算法的有效性。

关键词: 轨道机动; 脉冲精确变轨; Lambert 算法; 固定时间变轨

中图分类号: V448.23 **文献标识码:** A

An Approach of Accurate Impulse Transfer Based on Lambert Algorithm

SANG Yan, ZHOU Jin

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The solutions to Lambert problem are mostly based on two-body supposition, which may bring inconvenience to accurately control of orbital transfer. Therefore, an approach to amend the impulses of Lambert transfer is presented. In terms of the perturbation, the precise dynamical model of spacecraft is established. Based on the result of Lambert algorithm, Quasi-Newton iterative method is employed to correct the impulses and reduce the errors of final state in orbital transfer. The approach is then used in the problem of time-fixed accurate impulse transfer. Finally, a two hierarchical programming model is established to solve the problem, which was proved to be right by an example.

Key words: orbit maneuver; accurate impulse transfer; Lambert algorithm; time-fixed transfer

航天器最优脉冲变轨是航天领域备受关注的一个问题, 最常用的方式有霍曼变轨和 Lambert 变轨。一般当航天器初始轨道和目标轨道均为圆轨道时, 其平面内最优变轨策略为双脉冲霍曼变轨。但由于霍曼变轨仅适用于共面圆轨道, 而 Lambert 变轨既可用于共面圆轨道, 也可适用于非共面椭圆轨道, 因此近年来, Lambert 变轨问题依然是研究的热点^[1-3]。

Lambert 问题实质是求解 Gauss 问题, 针对该问题, 学者们提出了众多求解算法^[4-5]。但这些算法多是以二体假设为研究基础, 从而产生较大的终端变轨误差, 给实际航天器控制带来了一定的不利影响。本文在 Lambert 算法基础上, 提出了一种变轨脉冲的修正策略, 从而实现航天器双脉冲精确变轨。

1 Lambert 问题描述

1.1 Lambert 双脉冲变轨

一般 Lambert 双脉冲变轨问题的描述定义如下: 给定航天器初始时刻的位置 r_1 和速度 v_{10} , 要求经过 ΔT 飞行时间, 航天器达到终端时刻的位置 r_2 和速度 v_{20} 。确定出航天器在初始和终端时刻两次点火的速度增量 Δv_1 和 Δv_2 。Lambert 变轨过程如图 1 所示。

求解 Δv_1 和 Δv_2 问题可转化为一个标准的 Lambert 问题。已知 r_1 、 r_2 和 ΔT , 求解追踪航天器在 r_1 和 r_2 处的速度 v_1 和 v_2 , 则 $\Delta v_1 = v_1 - v_{10}$, $\Delta v_2 = v_{20} - v_2$ 。

* 收稿日期: 2008-05-10

作者简介: 桑艳(1980-), 女, 博士生。

1.2 Lambert 问题求解算法

Lambert 问题的实质就是求解高斯问题, 定义如下: 给定 r_1, r_2 , 以及从 r_1 到 r_2 的飞行时间 ΔT 和航天器的初始运动方向, 求解航天器在 r_1 和 r_2 处的速度 v_1 和 v_2 。求解公式为:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{r_2 - fr_1}{g} \\ v_2 = \frac{gr_2 - r_1}{g} \end{cases} \quad (1)$$

式中, f, g, f' 是普适变量 x 的函数, Lambert 变轨时间 Δt 满足下列关系式:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} [x^3(x)S(x) + A\sqrt{y(x)}] \quad (2)$$

式中, $x(x), S(x), y(x)$ 是普适变量 x 的函数, A 是由已知条件得出的常值, μ 是地球引力常数。

这样, 通过式(2)求解 x 就成为 Lambert 问题求解的关键。当 Δt 较短时, Lambert 转移轨道仅有一条^[6]; 当 Δt 较长时, 可采用多圈 Lambert 变轨^[7]。

2 考虑摄动的轨道动力学方程

由于 Lambert 问题的求解建立在二体假设基础上, 得到的脉冲向量是一种近似解, 由此会对航天器变轨带来一定的误差。随着人们对空间环境理解的深入, 航天器轨道计算技术得到了很大的提高, 通过精密的轨道计算对变轨脉冲进行修正, 从而可以满足航天器精确变轨要求。

建立在 J2000.0 惯性坐标系中的航天器运动学、动力学方程为:

$$\begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = a_{TB} + a_{NB} + a_{NS} + a_{TD} + a_{SR} + a_{DG} + a_C + a_{TH} \end{cases} \quad (3)$$

其中, r, v 分别是航天器位置、速度矢量; a_{TB} 是二体作用力产生的加速度; a_{NB} 是太阳、月亮和地球以外的其他行星对卫星的引力产生的加速度; a_{NS} 是地球非球形引力产生的加速度; a_{TD} 是地球潮汐产生的加速度; a_{SR} 是太阳辐射作用产生的加速度; a_{DG} 是大气阻力作用产生的加速度; a_C 是变轨控制力所产生的加速度; a_{TH} 是作用在卫星上的其他作用力产生的加速度。

二体作用力是作用于航天器的最基本的作用力, 除此以外的其他作用力统称为摄动力。摄动力相对于二体作用力而言是个小量, 但它的长期影响不容忽视。对于近地航天器, J_2 摄动和大气阻力摄动是最主要的摄动因素, 研究中可根据精度计算需要对摄动力进行必要的取舍。

3 双脉冲变轨修正策略

Lambert 算法是解决航天器双脉冲变轨的有效途径, 为了实现精确变轨, 需要对求解 Lambert 问题得到的变轨脉冲进行修正。设航天器变轨时刻为 t_1, t_2 , 变轨前后状态分别为 $(t_1, r_1, v_{10}), (t_2, r_2, v_{20})$, 通过求解 Lambert 问题得到的速度增量为 $\Delta v_1, \Delta v_2$ 。然后以 $\Delta v_1, \Delta v_2$ 作为种子值, 利用拟牛顿法获得新的速度增量 $\Delta v_1^*, \Delta v_2^*$, 使得航天器在 t_1 时刻施加冲量 Δv_1^* , 利用精密轨道计算程序进行仿真计算, 在 t_2 时刻再施加冲量 Δv_2^* 后与参数 (t_2, r_2, v_{20}) 吻合。

算法描述如下:

Step 1: 求解 Lambert 变轨问题: $(v_1, v_2) = \text{Lambert}(r_1, r_2, t_2 - t_1)$, 确定 v_1, v_2 ;

Step 2: 计算速度增量 $\Delta v_1 = v_1 - v_{10}, \Delta v_2 = v_2 - v_{20}$;

Step 3: 以 (t_1, r_1, v_{10}) 为初始状态, 采用双脉冲变轨, 脉冲施加时刻分别为 t_1, t_2 , 利用精密轨道计算程序进行仿真计算, 得到 t_2 时刻的状态为 (t_2, r'_2, v'_{20}) , 状态偏差可表示为 $\delta(\Delta v_1, \Delta v_2) = \omega |r_2 - r'_2|$

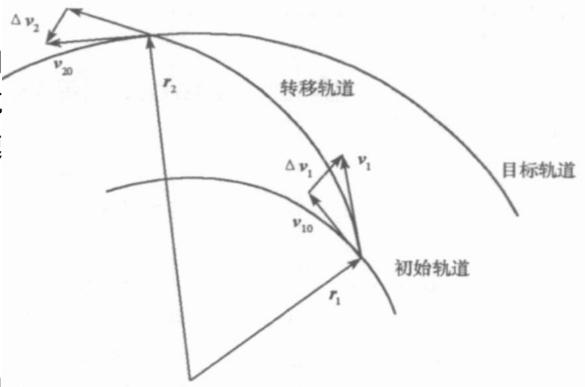


图1 Lambert 变轨示意图
Fig. 1 Sketch of Lambert transfer

+ (1- ω)| $v_{20} - v'_{20}$ |, 其中 ω 为权系数, 用以调节位置与速度的计算精度, 一般可取 $\omega = 0.1$;

Step 4: 采用拟牛顿法^[8]迭代求解最优化问题: $\min \delta(\Delta v_1, \Delta v_2)$, 得到新的速度增量 Δv_1^* 、 Δv_2^* 。

4 基于 Lambert 算法的固定时间精确变轨

在上述修正策略基础上, 可进一步研究航天器固定时间精确变轨、最短时间变轨等相关问题, 这里以固定时间变轨为例说明修正策略的应用, 给出精确变轨的规划模型。

设航天器当前时刻状态为 $X(t_0) = (t_0, r_0, v_0)$, 终端要求状态为 $X(t_f)_{aim} = (t_f, r_f, v_f)$, 则固定时间的双脉冲变轨问题可以描述为: 求解变轨时刻 t_1, t_2 和变轨脉冲 $\Delta v_1, \Delta v_2$, 使得航天器从当前时刻开始, 在 t_1 时刻施加冲量 Δv_1 , 在 t_2 时刻再施加冲量 Δv_2 后, 达到终端要求状态, 并且要求燃料消耗最少。这是一个典型的约束极值问题, 描述如下:

$$\begin{cases} \text{Find: } (t_1, t_2, \Delta v_1, \Delta v_2) \\ \min J = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| \\ \text{s. t. } X(t_f) = X(t_f)_{aim} \end{cases} \quad (4)$$

直接求解该问题难度较大, 可结合 Lambert 算法将其分解为一个两层规划问题, 内层通过求解 Lambert 问题得到变轨脉冲, 外层对变轨时刻进行优化求解, 即

$$\begin{cases} \min_{(t_1, t_2)} J = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| \\ \text{s. t. } \begin{cases} (\Delta v_1, \Delta v_2) = \text{Lambert}(t_1, t_2) \\ X(t_f) = X(t_f)_{aim} \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

5 算例及分析

某航天器(质量 8000kg)在当前时刻 $t_0 = 0$ 和终端要求时刻 $t_f = 3500\text{s}$ 的位置、速度参数如表 1 所示, 要求航天器从当前时刻经过两次脉冲变轨, 达到终端要求状态。

表 1 航天器初始时刻和终端时刻状态

Tab. 1 State of spacecraft in initial time and final time

时间(s)	位置(J2000.0坐标系)			速度(J2000.0坐标系)		
	X (km)	Y (km)	Z (km)	v_x (km/s)	v_y (km/s)	v_z (km/s)
$t_0 = 0$	- 2857.34722	- 5747.41314	3638.64187	0.33782	3.80685	6.27840
$t_f = 3500$	1968.06898	3190.38892	- 5637.79602	- 1.82519	- 6.19345	- 4.14001

针对该问题, 建立双层规划模型, 对式(5)进行求解, 内层采用拟牛顿法得到精确变轨脉冲, 外层采用单纯型法进行优化求解, 可得变轨时刻和变轨脉冲如表 2 所示。

表 2 Lambert 双脉冲变轨策略规划结果

Tab. 2 Programming result of two-impulse Lambert transfer scheme

变轨时刻(s)	总脉冲(m/s)	脉冲分量(J2000.0坐标系)		
		v_x (m/s)	v_y (m/s)	v_z (m/s)
$t_1 = 1565.4$	360.3834	- 301.5765	- 149.9150	- 128.2704
$t_2 = 3377.8$	427.8744	- 176.4748	365.2260	- 136.1730

在此变轨策略下, 总的变轨脉冲为 788.2578m/s。当 $t = 3500\text{s}$ 时, 航天器终端状态与要求状态精确吻合。得到的终端状态为: $t_f = 3500\text{s}$, J2000.0 坐标系中的位置速度为

$$\begin{cases} r'_f = (1968.06856\text{km}, 3190.38894\text{km}, - 5637.79601\text{km}) \\ v'_f = (- 1.82519\text{km/s}, - 6.19345\text{km/s}, - 4.14001\text{km/s}) \end{cases}$$

位置误差: $|r_f - r'_f| < 1\text{m}$, 速度误差: $|v_f - v'_f| \approx 0\text{m/s}$ 。

当不进行 Lambert 变轨脉冲修正时,若变轨时刻不变,得到的脉冲情况如表 3 所示,总的变轨脉冲为 3901.8106m/s。采用精确轨道计算模型,按该脉冲情况对航天器进行变轨控制,得到的终端状态为: $t_f = 3500\text{s}$, J2000.0 坐标系中的位置速度为

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_f = (1971.50284\text{km}, 3201.28472\text{km}, -5641.07493\text{km}) \\ \mathbf{v}'_{f0} = (-1.81848\text{km/s}, -6.18063\text{km/s}, -4.14621\text{km/s}) \end{cases}$$

位置误差: $|\mathbf{r}_f - \mathbf{r}'_f| = 11885.32\text{m}$, 速度误差: $|\mathbf{v}_{f0} - \mathbf{v}'_{f0}| = 15.74\text{m/s}$ 。

表 3 不加修正情况下的 Lambert 变轨策略

Tab. 3 Result of Lambert transfer without amendment

变轨时刻(s)	总脉冲(m/s)	脉冲分量(J2000.0 坐标系)		
		v_x (m/s)	v_y (m/s)	v_z (m/s)
$t_1 = 1565.4$	359.7622	- 301.3935	- 146.9913	- 130.3238
$t_2 = 3377.8$	427.4877	- 175.9665	365.9577	- 133.6284

因此,本文提出的修正策略能够对 Lambert 变轨脉冲进行有效修正,满足精确变轨需求。

6 结束语

航天器空间双脉冲变轨可以通过求解 Lambert 问题得到变轨冲量,但由于 Lambert 算法多以二体假设为基础,因而会产生较大的终端状态误差,给精确轨道控制带来一定影响。本文建立了考虑摄动影响的航天器轨道动力学计算模型,在 Lambert 算法基础上,通过拟牛顿法对变轨脉冲进行修正,消除终端状态误差,从而获得精确的变轨脉冲。以精确脉冲为基础可进一步实现航天器大范围轨道机动的精确变轨控制。

参考文献:

- [1] John E P. A Class of Optimal Two-impulse Rendezvous Using Multiple-revolution Lambert Solutions[J]. The Journal of the Astronautical Sciences, 2000, 48(2): 131- 148.
- [2] Shen H, Tsotras P. Optimal Two-impulse Rendezvous Using Multiple-revolution Lambert Solutions[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2003, 26(1): 50- 61.
- [3] 李栋林, 黄福铭. 基于 Lambert 问题的精确拦截与交会问题研究[J]. 飞行力学, 2008, 26(2): 57- 59.
- [4] Vallado D A. Fundamentals of Astrodynamics and Application (Second Edition) [M]. Microcosm Press, 2001.
- [5] Thore J D, Bain R D. Series Reversion/ Inversion of Lambert's Time Function[J]. The Journal of the Astronautical Sciences, 1995, 43(3): 277- 287.
- [6] 朱仁璋, 蒙薇, 胡锡婷. 航天器交会中的 Lambert 问题[J]. 中国空间科学技术, 2006, 26(6): 49- 55.
- [7] 韩潮, 谢华伟. 空间交会中多圈 Lambert 变轨算法研究[J]. 中国空间科学技术, 2004, 24(5): 9- 13.
- [8] 粟塔山, 彭维杰, 周作益, 等. 最优化计算原理与算法程序设计[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2001.