文章编号: 1001- 2486(2009) 03- 0136- 05

基于四元数体上的几个矩阵不等式*

冯良贵, 罗继红
(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 四元数矩阵的特征值与奇异值在四元数矩阵理论的应用中起着重要作用。借助于分块矩阵及相关恒等式, 给出了关于四元数矩阵特征值与奇异值的几个新的不等式, 推广了实或复数域上矩阵特征值与奇异值不等式的相应结果, 它们可望有助于推动四元数代数在量子力学、机器人技术等学科中的进一步应用。

关键词: 自共轭; 正定; 特征值; 奇异值
中图分类号: O241.6 文献标识码: A

Several Matrix Inequalities in Quaternion Algebra

FENG Liang-gui, LUO Ji-hong
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The eigenvalue and the singular value of a quaternion matrix play important roles in the applications of quaternion matrix theory. By virtue of the blocked matrix and the corresponding identities, several inequalities on the eigenvalue and the singular value of quaternion matrices are established, which generalize the corresponding results existing in the real or the complex matrix theory. The results of this paper may help to improve the applications of quaternion algebra in such related fields as quantum mechanics, robot technology and the like.

Key words: self-conjugation; positive definite; singular value; eigenvalue

记 $\mathbf{R}$ 为实数域, $\boldsymbol{Q}=\{q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k+a_3k: a_1, a_2, a_3\in\mathbf{R}\}$为实四元数体, $M_n(\boldsymbol{Q})$ 表示四元数 n 阶方阵集合。设 $A\in M_n(\boldsymbol{Q})$, 四元数 λ 称为 A 的一个右特征值是指存在 n 维非零四元数列向量 α, 使得 $A\alpha=\alpha\lambda$。此时 α 也称为 A 的一个关于 λ 的右特征向量。四元数矩阵的左特征值和左特征向量可类类似地给出。与常规数值矩阵不同, 尽管四元数方阵左、右特征值的存在性已得到证明[1-2], 但四元数矩阵的左、右特征值未必相等。一般说来, 在四元数矩阵理论应用于相关学科如四元数力学分析过程中, 人们只需借助于四元数方阵的右特征值即可满足要求[3-4]。因此在四元数矩阵特征值估计问题中, 人们通常关注右特征值不等式[4,7-8]。本文也不例外, 所涉及的特征值均指右特征值。

将四元数矩阵理论应用于机器人技术过程中所涉及的另一个数值特征是矩阵的奇异值[5-6]。鉴于奇异值在四元数代数及其应用中所处的重要地位, 四元数矩阵奇异值不等式的研究也已成热门话题[7]。

1 关于四元数矩阵特征值的几个不等式

四元数乘法的不可交换性加深了四元数矩阵不等式建立的复杂性。熟知, 关于复矩阵的柯西—许瓦兹不等式对四元数矩阵仍成立, 即设 A 为 n 阶四元数半正定方阵, $x, y\in\boldsymbol{Q}^n$, 则有 $|x^*Ay|^2\leqslant x^*Ax\cdot y^*Ay$, 并且等号可以成立。针对此结果, 我们考虑 x, y 为正交向量的情形。

定理 1 设 n 阶四元数方阵 A 正定, $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$ 为 A 的特征值, 则对任意一对正交向量 x, $y\in\boldsymbol{Q}^n$, 有 $|x^*Ay|^2\leqslant\left(\dfrac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}\right)^2x^*Ax\cdot y^*Ay$。进一步, 存在正交向量 $x, y\in\boldsymbol{Q}^n$ 使得上式的等号成立。

证明 设 $x, y\in\boldsymbol{Q}^n$, 为标准正交向量, 定义 $B=(x, y)^*A(x, y)$, 则 B 是 2×2 阶正定自共轭阵, 记

* 收稿日期: 2008- 09- 12
基金项目: 新世纪优秀人才计划项目(NCET); 国防科技大学基础研究资助项目(JC08- 02- 03)
作者简介: 冯良贵(1968—), 男, 教授, 博士。

其特征值为 $\mu_1 \geqslant \mu_2 > 0$, 于是由文献[7]中的定理 5.3.6 有 $\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_n$。考虑:

$$
\begin{aligned}
1-\frac{|x^* Ay|^2}{(x^* Ax)(y^* Ay)} &= 4\frac{x^* Ax\cdot y^* Ay-|x^* Ay|^2}{(x^* Ay+y^* Ay)^2-(x^* Ax-y^* Ay)^2}\\
&=\frac{4\mu_1\mu_2}{(\mathrm{tr}B)^2-(x^* Ax-y^* Ay)^2}=\frac{4\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2-(x^* Ax-y^* Ay)^2}\\
&\geqslant\frac{4\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2}
\end{aligned}
$$

其中, 等号成立当且仅当 $x^* Ax = y^* Ay$。于是有

$$
\frac{|x^* Ay|^2}{(x^* Ax)(y^* Ay)}\leqslant 1-\frac{4\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2}=\left(\frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}-1}{\frac{\mu_1}{\mu_2}+1}\right)^2
$$

上式右端是 $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 的单调递增函数, 得到: $\frac{|x^* Ay|^2}{(x^* Ax)(y^* Ay)}\leqslant\left(\frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}-1}{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}+1}\right)^2=\left(\frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}\right)^2$。证毕。

上述定理实质上建立了四元数体上的 Wielandt 定理。下面建立四元数体上的 Kantorvich 不等式(Thm2), 进而给出四元数体上 Kantonich 不等式的矩阵形式(Thm3)。

定理 2 设四元数方阵 $A\ n$ 阶正定, λ_1, λ_n 分别为 A 的最大和最小特征值, 则对任意非零向量 x 有: $\frac{x^* Axx^* A^{-1}x}{(x^* x)^2}\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$。当 $x=\frac{\varphi_1+\varphi_n}{\sqrt{2}}$ 时等号成立, 其中 φ_1, φ_n 分别为 λ_1, λ_n 对应的标准正交化的特征向量。

证明 设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$ 为 A 的特征值, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。则有酉阵 U, 使得 $A=U^*\Lambda U$。记 $y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=Ux$, $\xi_i=\frac{|y_i|^2}{\sum_{i=1}^n|y_i|^2}$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$, 于是问题归结为对 $\xi_i\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^n\xi_i=1$ 证明

$$
\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\xi_i\right)\sum_{i=1}^n\left(\frac{\xi_i}{\lambda_i}\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}
$$

定义 u_i, υ_i: $\begin{cases}\lambda_i=\lambda_1u_i+\lambda_n\upsilon_i\\ \frac{1}{\lambda_i}=\frac{u_i}{\lambda_1}+\frac{\upsilon_i}{\lambda_n}\end{cases}$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$, 容易验证 u_i, $\upsilon_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都非负, 再由

$$
1=\frac{1}{\lambda_i}\lambda_i=\left(\frac{u_i}{\lambda_1}+\frac{\upsilon_i}{\lambda_n}\right)(\lambda_1u_i+\lambda_n\upsilon_i)=(u_i+\upsilon_i)^2+\frac{\upsilon_iu_i(\lambda_1-\lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n}
$$

可得: $u_i+\upsilon_i\leqslant 1(i=1,\cdots,n)$。记 $u=\sum_{i=1}^n\xi_iu_i$, $\upsilon=\sum_{i=1}^n\xi_i\upsilon_i$, 则有

$$
u+\upsilon=\sum_{i=1}^n\xi_i(u_i+\upsilon_i)\leqslant\sum_{i=1}^n\xi_i=1
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\xi_i\right)\sum_{i=1}^n\left(\frac{\xi_i}{\lambda_i}\right)&=(\lambda_1u+\lambda_n\upsilon)\left(\frac{u}{\lambda_1}+\frac{\upsilon}{\lambda_n}\right)\\
&=(u+\upsilon)^2+u\upsilon\frac{(\lambda_1-\lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n}=(u+\upsilon)^2\left[1+\frac{4u\upsilon}{(u+\upsilon)^2}\frac{(\lambda_1-\lambda_n)}{4\lambda_1\lambda_n}\right]\\
&\leqslant 1+\frac{(\lambda_1-\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}=\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}
\end{aligned}
$$

可以验证: 当 $x=\frac{\varphi_1+\varphi_n}{\sqrt{2}}$ 时, 等式成立。证毕。

下面给出四元数体上 Kantorovich 不等式的矩阵形式。首先引入下列引理，其证明是初等的。

引理 1　设 $a>0$，则对于任意的 $x\in[a,b]$，有 $\frac{1}{x}\leqslant\frac{a+b}{ab}-\frac{x}{ab}$。

定理 3　设 $A\in \boldsymbol{Q}^{n\times n}$ 正定，X 为 $n\times t$ 阶矩阵，满足 $X^*X=I_t$，则 $X^*A^{-1}X\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)}{4\lambda_1\lambda_n}(X^*AX)^{-1}$，其中 λ_1，λ_n 分别为 A 的最大、最小特征值。

证明　将 A 分解为如下形式 $A=U\Lambda U^*$，这里 U 是 $n\times n$ 酉阵，$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)$，$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$。由上面的引理有 $\frac{1}{\lambda_i}\leqslant\frac{\lambda_1+\lambda_n}{\lambda_1\lambda_n}-\frac{\lambda_i}{\lambda_1\lambda_n}(i=1,\cdots,n)$，从而

$$\Lambda^{-1}\leqslant\frac{\lambda_1+\lambda_n}{\lambda_1\lambda_n}I_n-\frac{1}{\lambda_1\lambda_n}\Lambda$$

用 X^*U 和 U^*X 分别左乘和右乘上式两边，得到 $X^*A^{-1}X\leqslant\frac{\lambda_1+\lambda_n}{\lambda_1\lambda_n}I_n-\frac{1}{\lambda_1\lambda_n}X^*AX$，于是有

$$\begin{aligned}X^*A^{-1}X&\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}(X^*AX)^{-1}-\frac{1}{\lambda_1\lambda_n}\left[\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4}(X^*AX)^{-1}-(\lambda_2+\lambda_n)I_n+X^*AX\right]\\&=\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}(X^*AX)^{-1}-\frac{1}{\lambda_1\lambda_n}\left[\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}(X^*AX)^{-1/2}-(X^*AX)^{1/2}\right]^2\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)}{4\lambda_1\lambda_n}(X^*AX)^{-1}\end{aligned}$$

证毕。

为得到四元数凸函数的矩阵不等式，先回顾四元数自共轭矩阵函数的定义。在四元数体上，设 A 是一个 n 阶自共轭方阵，则总存在一个酉阵 U，使得 $A=U^*\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U$，这里的 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 A 的特征值。设 $f(x)$ 是一个实数域上的连续函数，此时定义 $f(A)=U^*\mathrm{diag}(f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n))U$。易知 $f(A)$ 的定义无歧义[7]，从而得到下面的命题：

命题 1　设 $A\in\boldsymbol{Q}^{n\times n}$ 自共轭，X 为 $n\times l$ 矩阵，且满足 $X^*X=I_l$。若 $f(t)$ 为 $[\lambda_n,\lambda_1]$ 上一个连续凸函数，其中 λ_1，λ_n 分别为 A 的最大和最小特征值，则有

$$X^*f(A)X\leqslant\frac{\lambda_1 f(\lambda_n)-\lambda_n f(\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_n}I_l+\frac{f(\lambda_1)-f(\lambda_n)}{\lambda_1-\lambda_n}X^*AX$$

证明　由于 $f(t)$ 为 $[\lambda_n,\lambda_1]$ 上一个连续凸函数，于是对于任意的 $a\in[\lambda_n,\lambda_1]$，有 $f(a)\leqslant\frac{\lambda_1-a}{\lambda_1-\lambda_n}f(\lambda_n)+\frac{a-\lambda_n}{\lambda_1-\lambda_n}f(\lambda_1)$，由矩阵函数的定义可得结论。证毕。

2　四元数矩阵奇异值不等式

本节旨在给出关于四元数矩阵奇异值的几个新的不等式，并引进四元数矩阵条件数概念，继而给出 2 个正定四元数矩阵和的条件数估计。

定理 4　在四元数体上任给半正定矩阵块 $\begin{bmatrix}M&K\\K^*&N\end{bmatrix}$，其中 $M\in M_m(Q)$，$N\in N_n(Q)$，$r\equiv\min(n,m)$，有 $2s_j(K)\leqslant s_j\begin{bmatrix}M&K\\K^*&N\end{bmatrix}(j=1,\cdots,r)$。这里 $s_j(\cdot)$ 表示矩阵的奇异值。

证明　设 $Q=\begin{bmatrix}0&K\\K^*&0\end{bmatrix}$，从而有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\begin{bmatrix}I_m&0\\0&-I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M&K\\K^*&N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_m&0\\0&-I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M&-K\\-K^*&N\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}M&K\\K^*&N\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0&K\\K^*&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M&K\\K^*&N\end{bmatrix}-2Q\end{aligned}$$

于是 $2Q \leqslant \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$。由韦尔单调性原理有

$$2\lambda_j\left(\begin{bmatrix} 0 & K \\ K^* & 0 \end{bmatrix}\right) = 2\lambda_j(Q) \leqslant \lambda_j\left(\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}\right), \quad j = 1, \cdots, m+n$$

注意到 Q 的谱为 $\sigma(Q) = \{s_1(K), \cdots, s_r(K), 0, \cdots, 0, -s_r(K), \cdots, -s_1(K)\}$,最后得到

$$2s_j(K) \leqslant s_j\left(\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}\right), \quad j = 1, \cdots, r$$

定理得证。

定理 5 在四元数体上,如下陈述等价:

(1) 对任给的半正定阵 A, B, $s_j(A-B) \leqslant s_j(A \oplus B)\ (j = 1, \cdots, n)$;

(2) 对任意的 $X, Y \in M_n$, $2s_j(XY^*) \leqslant s_j(X^*X + Y^*Y)\ (j = 1, \cdots, n)$;

(3) 任意给定半正定分块矩阵 $\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$,其中 $M, N \in M_n$,有

$$2s_j(K) \leqslant s_j\left(\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}\right), \quad j = 1, \cdots, r$$

证明 (1) ⇒(2)。对任意的 $X, Y \in M_n$,设 $C = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}$,由(1)有

$$2s_j\left(\begin{bmatrix} YX^* & 0 \\ 0 & XY^* \end{bmatrix}\right) = 2s_j\left(\begin{bmatrix} 0 & XY^* \\ YX^* & 0 \end{bmatrix}\right) = s_j(CC^* - DD^*) \leqslant s_j\left(\begin{bmatrix} CC^* & 0 \\ 0 & DD^* \end{bmatrix}\right)$$

$$= s_j\left(\begin{bmatrix} C^*C & 0 \\ 0 & D^*D \end{bmatrix}\right) = s_j\left(\begin{bmatrix} X^*X + Y^*Y & 0 \\ 0 & X^*X + Y^*Y \end{bmatrix}\right)$$

从而有 $2s_j(XY^*) \leqslant s_j(X^*X + Y^*Y)\ (j = 1, \cdots, n)$。

(2) ⇒(3)。由 $\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$ 半正定,知存在 $S, T \in M_{2n,n}$,使得下式成立:

$$(S, T)^*(S, T) = \left(\begin{bmatrix} S^*S & S^*T \\ T^*S & T^*T \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} \geqslant 0$$

于是由(2)有

$$2s_j(K) = 2s_j(S^*T) \leqslant s_j(SS^* + TT^*) = s_j\left(\begin{bmatrix} S^*S & S^*T \\ T^*S & T^*T \end{bmatrix}\right)$$

$$= s_j\left(\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}\right), \quad j = 1, \cdots, n$$

(3) ⇒(1)。对任意的半正定四元数方阵 $A, B \in M_n$,由下面的酉相似变换:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & -I \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \geqslant 0$$

可得: $s_j(A-B) \leqslant s_j\left(\begin{bmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} \end{bmatrix}\right) = s_j\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right)\ (j = 1, \cdots, n)$。证毕。

由定理4并结合定理5知,针对四元数阵的奇异值有如下恒成立的三个不等式:

①任给半正定的四元数 n 阶方阵A 和B,总有 $s_j(A-B) \leqslant s_j(A \oplus B)\ (j = 1, \cdots, n)$;

②对任意的 n 阶四元数方阵X 和Y,恒有 $2s_j(XY^*) \leqslant s_j(X^*X + Y^*Y)\ (j = 1, \cdots, n)$;

③任意给定的半正定分块四元数阵$\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$，其中 $M, N \in M_n(\boldsymbol{Q})$，有

$$2s_j(K) \leqslant s_j\left(\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}\right), \quad j=1, \cdots, n$$

推论 1　设半正定四元数方阵 $A, B \in M_n$，则

$$2s_j[A^{\frac{1}{2}}(A+B)^{m-1}B^{\frac{1}{2}}] \leqslant s_j((A+B)^{m-1})$$

证明　设 $X = \begin{bmatrix} A^{1/2} & 0 \\ B^{1/2} & 0 \end{bmatrix}$，则有 $(X^*X)^m = \begin{bmatrix} (A+B)^m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。

$$(XX^*)^m = X(X^*X)^{m-1}X^* = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}}(A+B)^{m-1}A^{\frac{1}{2}} & A^{\frac{1}{2}}(A+B)^{m-1}B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}(A+B)^{m-1}A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}}(A+B)^{m-1}B^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

由定理 5 的(3)有

$$2s_j(A^{\frac{1}{2}}(A+B)^{m-1}B^{\frac{1}{2}}) \leqslant s_j((XX^*)^m) = s_j((X^*X)^m) \leqslant s_j((A+B)^m), \quad j=1, \cdots, n$$

证毕。

矩阵的条件数在矩阵的扰动分析理论中具有特别重要的地位。设 A 为可逆的四元数矩阵。我们定义 A 的条件数为 $\kappa(A) = \dfrac{s_1(A)}{s_n(A)}$，其中 $s_1(A)$ 和 $s_n(A)$ 分别为可逆矩阵 A 的最大与最小奇异值。作为本节的结束，我们给出一个针对四元数正定矩阵和的条件数的估计不等式。

命题 2　设矩阵 $A, B \in \boldsymbol{Q}^{n\times n}$ 为正定的，则 $\kappa(A+B) \leqslant \max\{\kappa(A), \kappa(B)\}$，特别地，$\kappa(A+aI) \leqslant \kappa(A)$，其中 $a \in Q^n$ 为任意常数。

证明　不妨设 $\kappa(A) \leqslant \kappa(B)$，于是问题归结为证明：$\kappa(A+B) \leqslant \kappa(B)$。

由熟知的 Weyl 定理有：$\lambda_1(A+B) \leqslant \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$，$\lambda_n(A+B) \geqslant \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$，所以有 $\kappa(A+B) = \dfrac{\lambda_1(A+B)}{\lambda_n(A+B)} \leqslant \dfrac{\lambda_1(A)+\lambda_1(B)}{\lambda_n(A)+\lambda_n(B)} \leqslant \kappa(B)$，证毕。

注意：定理 5 中(2)在复矩阵情形下便是所谓的复矩阵奇异值的算术—几何平均不等式。Zhan 在文献[8]中证明了它等价于“对任意半正定复方阵 A 和 B，恒有 $s_j(A-B) \leqslant s_j(A \oplus B)$，$j=1, \cdots, n$。”从而 Zhan 实际上证明了若限制在复数域上，定理 5 中的(1)和(2)总是真的。事实上，本文正是受 Zhan 等证明上述结果的启发才得以完成定理 5 的整个证明。

参 考 文 献：

[1] Wood R M. Quaternionic Eigenvalues[J]. Bull. London Math. Soc., 1985, 34(2): 187–193.

[2] Zhang F. Quaternions and Matrices of Quaternions[J]. Linear Alg. Appl., 1997, 251: 21–57.

[3] De Leo S, Scolarici G, et al. Quaternionic Eigenvalue Problem[J]. J. Math. Phys., 2002, 43(11): 5815–5829.

[4] De Leo S. Scolarici G. Right Eigenvalue Equation in Quaternionic Quantum Mechanics[J]. J. Phys. A, 2000, 33: 2971–2995.

[5] Bihan N L, Mars J. Singular Value Decomposition of Quaternion Matrices: A New Tool for Vector-sensor Signal Processing[J]. Signal Process, 2004, 84: 1177–1199.

[6] Miron S, Bihan N L, Mars J. High Resolution Vector-sensor Array Processing Based on Biquaternions[C]// IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (Toulouse: France), 2006: 1077–1080.

[7] 庄瓦金. 体上矩阵理论导引[M]. 北京：科学出版社, 2006.

[8] Zhan X Z. Matrix Inequalities[M]. Lecture Notes in Mathematics Vol. 1790, Springer-verlage Berlin Heidelberg, New York: 2002.

[9] 冯良贵. 四元数矩阵的列左秩[J]. 自然科学进展, 2006, 5: 537–542.