

文章编号: 1001- 2486(2009) 05- 0112- 08

# 超声速混合层发展情况的非线性时间序列分析\*

于江飞, 晏至辉, 刘卫东

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 采用大涡模拟数值方法, 模拟了具有工程应用背景的二维超声速湍流混合层, 通过非线性时间序列分析伪相图、关联维数和 Lyapunov 指数, 得到了混合层发展情况的混沌特性。结果表明, 混合层中心线沿流向位置的伪相图可定性地表示混合层的稳定性, 关联维数分布可定量描述混合层经历的线性失稳、非线性失稳和混合层阶段等发展情况, 最大 Lyapunov 指数分布作为关联维数分析结果的验证。对于相应的超声速混合层实验, 采用非线性时间序列分析方法研究混合层发展情况具有通用性。

**关键词:** 超声速混合层; 大涡模拟; 非线性时间序列; 混沌

中图分类号: V212.1 文献标识码: A

## Non-linear Time Series Analysis of Evolution Status of Supersonic Mixing Layer

YU Jiang-fei, YAN Zhi-hui, LIU Wei-dong

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Coherent structures of two-dimensional supersonic turbulent mixing layer with engineering background are investigated by using the method of Large Eddy Simulation (LES). Chaos characteristics of evolution status are obtained by the non-linear time series analysis of pseudo-phase portrait, Lyapunov exponent and correlation dimension. The results show that the pseudo-phase portrait of pressure can denote the stability of mixing layer. The distribution of correlation dimensions can be used to measure the evolution status of mixing layer quantitatively, and the distribution of maximal Lyapunov exponents can be used to validate the measure results above. In corresponding experiments for mixing layer, the universality of studies on evolution status of mixing layer by the method of non-linear time series analysis is testified.

**Key words:** supersonic mixing layer; large eddy simulation; non-linear time series; chaos

双燃烧室冲压发动机技术<sup>[1]</sup>和双模态超燃冲压发动机技术<sup>[2]</sup>是高超声速空天飞行器的核心技术, 其关键在于寻找促进超声速流动的空气与燃料充分混合的办法, 因此超声速湍流混合层的研究极具价值。通过实验研究和数值模拟, 研究者对超声速混合流动有了一定程度的了解。在混合层混合增强研究方面, 研究者了解到通过在混合层入口外加一定的人工强迫激励可以增强混合效果, 这在理论和工程上有着重要意义<sup>[3-5]</sup>。在流体运动稳定性方面, 罗俊荣等<sup>[6]</sup>给出了混合层沿流向从线性向非线性转变的失稳过程的混沌特征量, 并对非线性失稳过程进行了分析, 然而人们对超声速混合流动失稳过程仍缺乏完整而清晰的认识。

### 1 单变量非线性时间序列方法

瞬态压力场的脉动是湍流研究中复杂的非线性问题之一。多年来, 人们尝试从不同的角度来揭示湍流的本质和规律, 力争揭示湍流拟序结构的机理和产生原因。近 30 多年, 人们发展混沌这一数学理论, 试图解决协同问题, 并认为拟序结构有着强吸引子、湍流与时空混沌有着密切关系等。人们尝试用分形理论来解决湍流问题<sup>[7]</sup>。经过人们的研究, 现在已经知道, 包括分形数和多重分形在内的分形理论

\* 收稿日期: 2008- 12- 23

基金项目: 国家部委基金资助项目

作者简介: (1984-), 男, 博士生。

并不能解决湍流问题, 但是, 这些理论却可以对湍流进行分维测量, 以表明湍流的确存在分形特征, 也反映湍流内部的标度不变性。瞬态压力场对湍流的拟序涡流及稳定性和大气运动等研究有重要意义。

本文对超声速混合层采用非定常大涡模拟(LES)数值方法, 在混合层稳定发展的一个时间段内, 提取了流场某些位置点的脉动压力时间序列, 进行单变量非线性时间序列分析, 以研究混合层的发展情况和混合效果。一般来说, 在进行非线性时间序列分析之前, 需要进行观测时间序列的平稳性检验和处理, 因为混沌时间序列分析主要针对平稳时间序列。非线性检验时间序列若来自非线性系统, 或确定性检验序列若来自确定性系统, 试验数据还须采用小波降噪等方法进行降噪处理<sup>[8]</sup>。本文所研究的对象——混合层和湍流是由 N-S 方程主导的, 可认为该系统确定性很大而随机性较小, 假定为非线性确定性系统; 数据取自于仿真结果, 无实验噪声干扰, 相对于长时间混合层是稳定发展的, 数据基本上是平稳时间序列。故忽略次要因素直接对提取的脉动压力时间序列进行非线性时间序列分析。

## 2 计算方法及验证

### 2.1 控制方程

经过滤的大涡模拟控制方程如下:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij} + \bar{\tau}_{ij}^*)}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{E})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{E} + P) \bar{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial (\bar{q}_j + \bar{Q}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial [\bar{u}_j (\bar{\tau}_{ij} + \bar{\tau}_{ij}^*)]}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$\text{此处 } \bar{\tau}_{ij} = 2\mu_i S_{ij}, \bar{\tau}_{ij}^* = 2\mu_i^{sgs} S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)。$$

一方程亚格子模型对应的湍动能方程<sup>[9]</sup>:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{k})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{k} \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu_i + \frac{\mu_i^{sgs}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + P_k - C_d \bar{\rho} \frac{\bar{k}^{\frac{3}{2}}}{\Delta} \quad (4)$$

其中  $\mu_i^{sgs} = C_\mu \bar{\rho} \bar{k}^{\frac{1}{2}} \Delta$ ,  $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ ,  $P_k = -\bar{\tau}_{ij} (\partial \bar{u}_i / \partial x_j)$ 。

经验常数  $\sigma_k$  取 1.0。利用 Menon 等提出的 LDKM 模型<sup>[9]</sup> (Localized Dynamic Ksgs Model), 对湍动能方程在网格滤波的基础上再进行一次检验滤波(以  $\hat{\cdot}$  表示), 最后可得到

$$C_\mu = -\frac{L_{ij} D_{ij}}{2D_{ij} D_{ij}} \quad (5)$$

其中

$$L_{ij} = \overline{\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j} - \frac{\overline{\bar{\rho} \bar{u}_i} \overline{\bar{\rho} \bar{u}_j}}{\hat{\rho}} - \frac{1}{3} \hat{\rho} \left( \overline{\bar{\rho} \bar{u}_k \bar{u}_k} - \frac{\overline{\bar{\rho} \bar{u}_k} \overline{\bar{\rho} \bar{u}_k}}{\hat{\rho}} \right) \delta_{ij}, \quad D_{ij} = \hat{\rho} \hat{\Delta} \left( \frac{\overline{\bar{\rho} \bar{u}_k \bar{u}_k}}{2\hat{\rho}} - \frac{\overline{\bar{\rho} \bar{u}_k} \overline{\bar{\rho} \bar{u}_k}}{2\hat{\rho} \hat{\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \widehat{S}_{ij} - \frac{1}{3} \widehat{S}_{kk} \delta_{ij} \right),$$

$$C_d = \frac{\hat{\rho} \hat{\Delta} \frac{\partial \overline{\bar{\rho} \bar{u}_j} \partial \overline{\bar{\rho} \bar{u}_j}}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\overline{\bar{\rho} \bar{u}_j}}{\hat{\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\overline{\bar{\rho} \bar{u}_j}}{\hat{\rho}} \right)}{\hat{\rho} \left( \overline{\bar{\rho} \bar{u}_k \bar{u}_k} - \frac{\overline{\bar{\rho} \bar{u}_k} \overline{\bar{\rho} \bar{u}_k}}{2\hat{\rho} \hat{\rho}} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

组分标量方程经过 Favre 平均和空间滤波后:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{y}_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{y}_m - \bar{\rho} \bar{D}_{im} \frac{\partial \bar{y}_m}{\partial x_i} + \phi_{i,m}^{sgs} + \theta_{i,m}^{sgs}) = 0 \quad (6)$$

这里  $\phi_{i,k}^{sgs}$ 、 $\theta_{i,k}^{sgs}$  分别代表的是亚格子组分对流通量、亚格子扩散质量通量。忽略掉亚格子项  $\theta_{i,k}^{sgs}$ , 通常认为  $\phi_{i,m}^{sgs} = \bar{\rho} [\overline{\bar{u}_i \bar{y}_m} - \bar{u}_i \bar{y}_m] = - (u_i^{sgs} / Sc_m) (\partial \bar{y}_m / \partial x_i)$ ,  $Sc_m$  是组分  $m$  的施密特数。

## 2.2 数值方法和边界条件

采用有限体积方法对控制方程进行空间离散。离散化方程采用隐式耦合求解方法,点隐式线性方程解法与代数多重网格(AMG)方法相结合。求解时,无粘项采用 Roe 格式进行求解,并使用 MUSCL 方法实现三阶精度,粘性项采用二阶中心差分格式,用二阶隐式双时间法进行时间推进。采用双时间法时,非定常物理时间步跨度不能太大,低于特征时间 4 个量级左右较为合适,在如此小的时间内可认为混合层发展是准定常过程,虚拟时间步长取 10 的量级即可满足要求。

壁面采用无滑移条件和绝热条件。燃烧室出口边界条件由内点外插得到。燃烧室入口采用压力远场边界条件,给定来流的马赫数、静压、静温、湍流参数以及上下入口气流的质量分数。

## 2.3 算例验证

本文用 Goebel 等<sup>[10-11]</sup>的超声速混合层实验对程序计算超声速混合层流场的适用性和准确性进行了验证。为了将计算结果与实验结果相对照,所有条件均与 Goebel 的实验条件相对应。实验中的混合区长度为 500mm,上下流入口高度均为 24mm,尖劈的厚度为 0.5mm,气流夹角  $2.5^\circ$ ,试验段等直,上下均为固体壁面。计算中为了方便,根据实验的结果取混合区的长度为 450mm。表 1 给出了实验入口来流参数,对流马赫数  $Ma = 0.46$ 。数值计算上下入口湍流强度均给定为 1%。

以通流时间的 3 倍为时间段,把计算得到的结果时均化,并与实验结果相比较(见图 1(a), 1(b))。可以发现在  $X = 100\text{mm}$ 、 $X = 150\text{mm}$  处的时均统计的速度剖面与试验结果吻合较好,这表明本文的模拟方法是完全可行的。

将  $X = 150\text{mm}$  处湍流强度的时均统计结果与实验结果对照(见图 1(c), 1(d)),可以发现在 150mm 时均统计预报结果流向脉动速度和横向脉动速度值均大于实验值,尤其是横向脉动速度,约为实验值的两倍。该结果是因为二维数值模拟与混合层实际的三维特性相悖,但二维混合层的研究在一定程度上反映了流体流动混合规律,具有重要研究价值和参考意义。

表 1 Goebel 混合层实验的流动参数  
Tab. 1 Flow conditions of the Goebel experiment

	<i>Air<sub>down</sub></i>	<i>Air<sub>up</sub></i>
<i>Ma</i>	1.91	1.36
<i>U</i> (m/s)	700	399
<i>T</i> (K)	334	215
<i>P</i> (kPa)	49	49

## 3 物理模型和网格划分

本文所研究的物理模型如图 2 所示,可见本文研究的特定混合层与文献[3]有很大不同,发展空间受上下壁面的限制,并且隔板后缘底部有一定厚度  $d = 4\text{mm}$ 。

采用多区拼接网格技术划分计算域网格,为提高网格品质,全计算域一律采用结构化网格,局部区域采用网格自适应加密。LES 计算网格的要求比较严格,本文流向采用了较密网格以减少非定常湍流发展计算中的截断误差;在具有大涡结构的混合层区域,纵向的最大网格与最小网格面积比不能过大,否则数值耗散很严重,致使计算得到的大涡结构沿流向消失。

## 4 计算结果与分析

### 4.1 混合层发展情况与混沌特征量的关系

在 Goebel 实验模型混合层中心线沿流向设置 13 个空间压力监测点,进行 LES 数值模拟,提取混合层稳定发展的  $5 \times 10^{-4}\text{s}$  时间段内这些点压力数据进行分析,研究单变量非线性时间序列方法得到的混沌特征量与超声速混合层的发展情况的关系。图 3 为混合层发展某一稳定时刻瞬态流场图和空间压力监测点位置。

由混合层中心线压力频谱图分析,混合层向下游发展,混合层中涡结构出现卷起和对并,涡的尺度变大,相应频率降低,沿流向监测点的压力脉动频率也降低。表 2 为由互信息量法<sup>[12]</sup>计算得到的空间各监测点压力时间序列的时间延迟,可看出混合层沿流向位置,各点压力时间序列用于重构相空间时

间延迟逐渐增加。

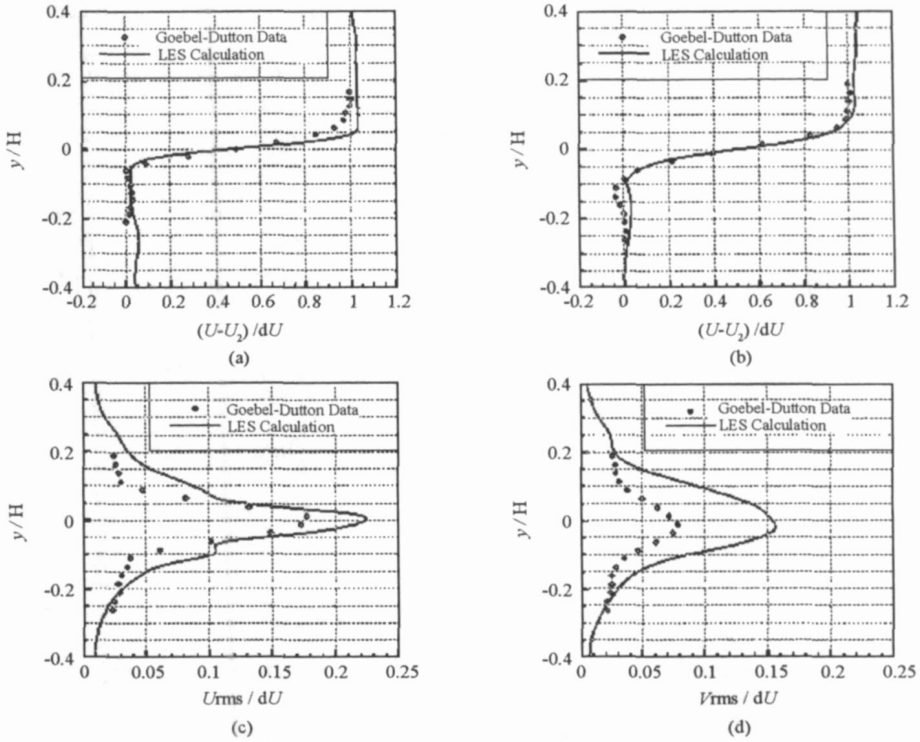


图1 Goebel混合层时均量的计算与实验结果对比

(a), (b) 为  $X = 100\text{mm}$  和  $150\text{mm}$  处的时均速度剖面, (c), (d) 为  $X = 150\text{mm}$  处的流向和横向湍流强度剖面

Fig.1 Time-averaged variables comparison for goebel mixing layer between calculation and experiment

(a), (b) Time-averaged streamwise velocity profiles for  $X = 100\text{mm}$  &  $150\text{mm}$ , (c), (d) Profiles of turbulent intensity for  $X = 150\text{mm}$

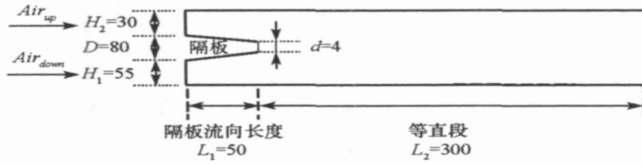


图2 物理模型简图

Fig.2 Schematic of physical model

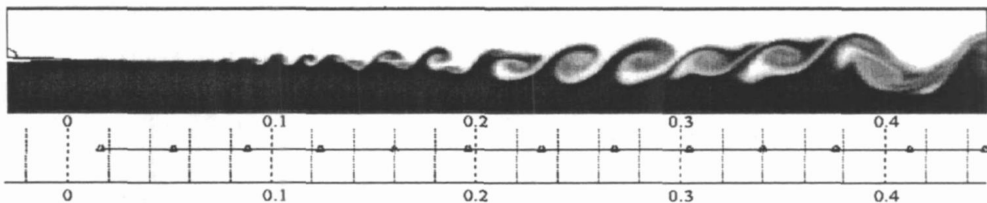


图3 Goebel模型瞬态流场上层空气质量分数云图与空间压力监测点位置

Fig.3 Contours of air-up mass fraction of instantaneous flowfield and locations of watch points for Goebel Model

表2 Goebel 模型流向不同位置监测点压力时间序列的时间延迟

Tab.2 Time delay of pressure-time serial for watch point of different streamwise location for Goebel Model

点序列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x/m$	0.016	0.052	0.088	0.124	0.160	0.196	0.232	0.268	0.304	0.340	0.376	0.412	0.449
$\tau$	24	42	58	64	108	114	174	194	218	242	228	286	284

伪相图可以定性表示某点的混沌程度,图4所示的监测点1~12压力伪相图可以表示混合层的稳定性。点1的伪相图为一圆环,说明在此位置混合层完全没有发展;混合层流向位置点1~12段的伪相图,可以表示混合层的发展历程,伪相图中曲线,开始时基本收敛在一个吸引子上,随着混合层向下游发展,相轨迹逐渐变得发散,位置点的流动状态很复杂,这时就需要计算伪相图对应的混沌特征量对流动状态进行定量分析了。

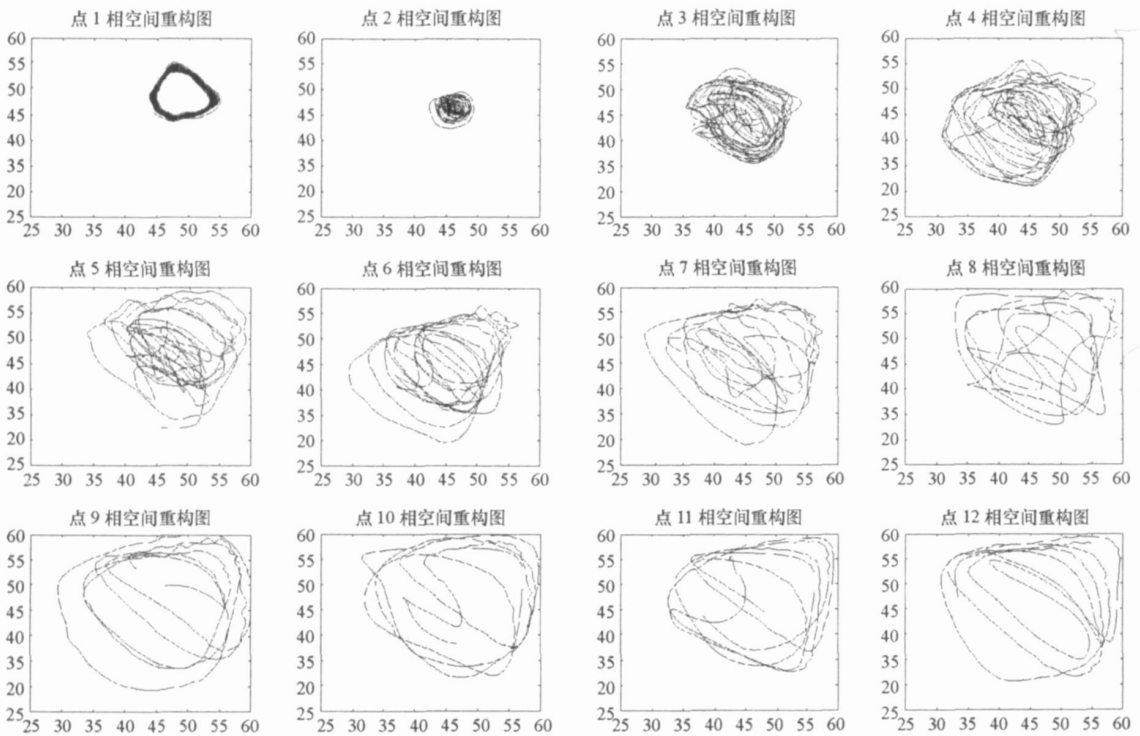


图4 Goebel 模型混合层中心线监测点1~12压力伪相图

Fig.4 Pressure pseudo-phase portrait of points 1~12 in the centre line of the mixing layer for Goebel model

混沌特征量——关联维数  $D$  和最大 Lyapunov 指数可以定量刻画混合层的发展情况。图5、图6分别为各监测点压力时间序列关联维数分布图和最大 Lyapunov 指数分布图。由图5可知,混合层流向位置点1~4段,混合层经历了线性失稳阶段,并开始进入非线性失稳阶段,非线性耗散现象在空间上有明显的发展,关联维数  $D$  增加很快;流向位置点5~8段,随着涡合并过程的进行,  $D$  略有减小;流向位置点8~12段,拟序结构暂时稳定发展,尺度不变,  $D$  也不变;流向位置点12~13段,涡再次开始合并,  $D$  也再次减小。这与频谱图的分析结果基本相同,说明了采用关联维数  $D$  刻画混合层发展情况的可行性。图6的最大 Lyapunov 指数分布图中,流向位置点4~10段,该特征量逐渐增加,这显示了非线性失稳的整个过程阶段。最大 Lyapunov 指数分布反映混合层的发展情况不太清晰,可以作为关联维数  $D$  分析结果的验证和补充。

#### 4.2 超声速混合层发展情况分析

本文物理模型的入口空气流基本参数如表3所示,对流马赫数  $Mc=0.26$ ,入口湍流参数给定湍流强度为3%,记为工况1。在低速流入口加沿流向振荡的工况记为工况2。对其进行LES计算,并分别提取两工况冷流流场超声速混合层稳定发展  $6 \times 10^{-4}$  s 时间段内混合层中心线沿流向13个点压力数据进

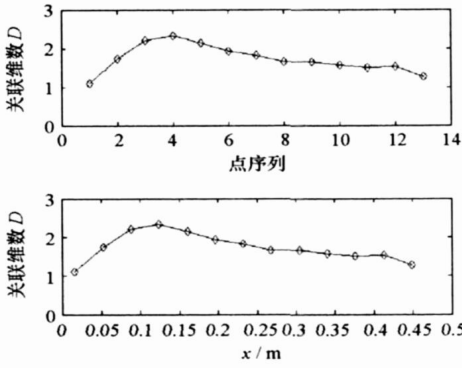


图5 Goebel 模型混合层中心线压力时间序列关联维数分布图

Fig. 5 Distribution of correlation dimensions of pressure-time serial in the centre line of the mixing layer for Goebel model

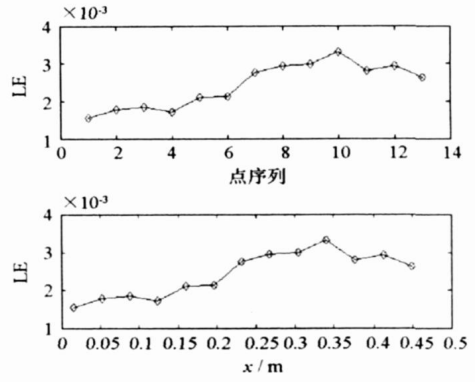


图6 Goebel 模型混合层中心线压力时间序列最大 Lyapunov 指数分布图

Fig. 6 Distribution of maximal Lyapunov exponents of pressure-time serial in the centre line of the mixing layer for Goebel model

行分析, 研究单变量非线性时间序列方法在超声速混合层的发展情况方面的应用。

表3 物理模型入口气流基本参数

Tab. 3 Basic parameters at entrance of physic model

Flow	$P/ \text{kPa}$	$T/ \text{K}$	$Ma$	Mass fraction	
				$Air_{up}$	$Air_{down}$
$Air_{up}$	60	667	2.77	1	0
$Air_{down}$	60	1328	1.6	0	1

低速流入口加沿流向振荡后的流速公式为

$$u_2 = U_2 + \frac{U_1 + U_2}{2} A \sin\left(W \frac{t}{t^*}\right), \quad \left( t^* = \frac{L}{U}, \quad U = \frac{U_1 + U_2}{2} \right) \quad (7)$$

其中  $U_1, U_2$  分别为高速流入口(下入口)、低速流入口(上入口)气流平均速度,  $A$  为振荡幅值,  $W$  为振荡频率,  $t$  为时间,  $t^*$  为流动特征时间, 是特征长度  $L$  与特征速度  $U$  之商, 特征长度定义为隔板后缘厚度  $d$  的一半。本文工况选取  $A = 0.05, W = 0.2$ 。

图7为两工况混合层分别发展到某一稳定时刻的瞬态流场上层空气质量分数云图, 图8为工况1、2混合层中心线监测点压力频谱图。由工况1的频谱图可看出, 随混合层中涡的配对合并, 涡主频减小; 而对于工况2, 外加强迫激励——低速流入口的沿流向振荡的频率一直主导着混合层涡的主频率, 此时就不能从频谱图分析得出混合层发展情况了。

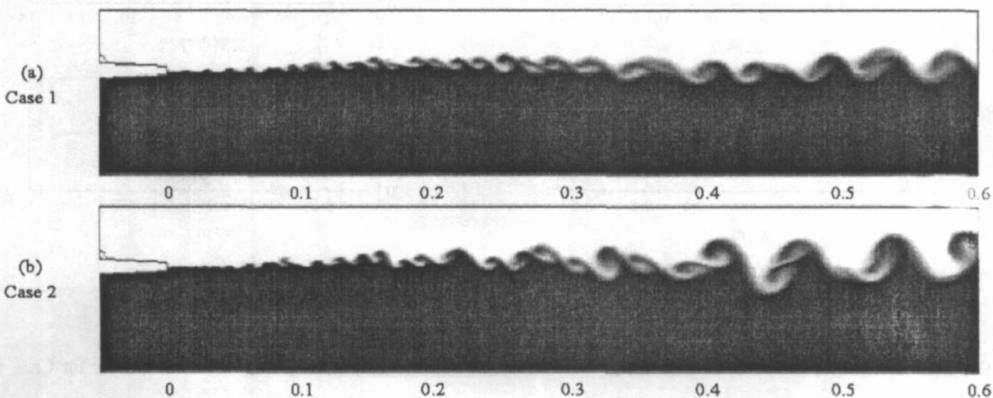


图7 两工况混合层瞬态流场上层空气质量分数云图

Fig. 7 Contours of air-up mass fraction for instantaneous flowfield of mixing layer for Case 1 & 2

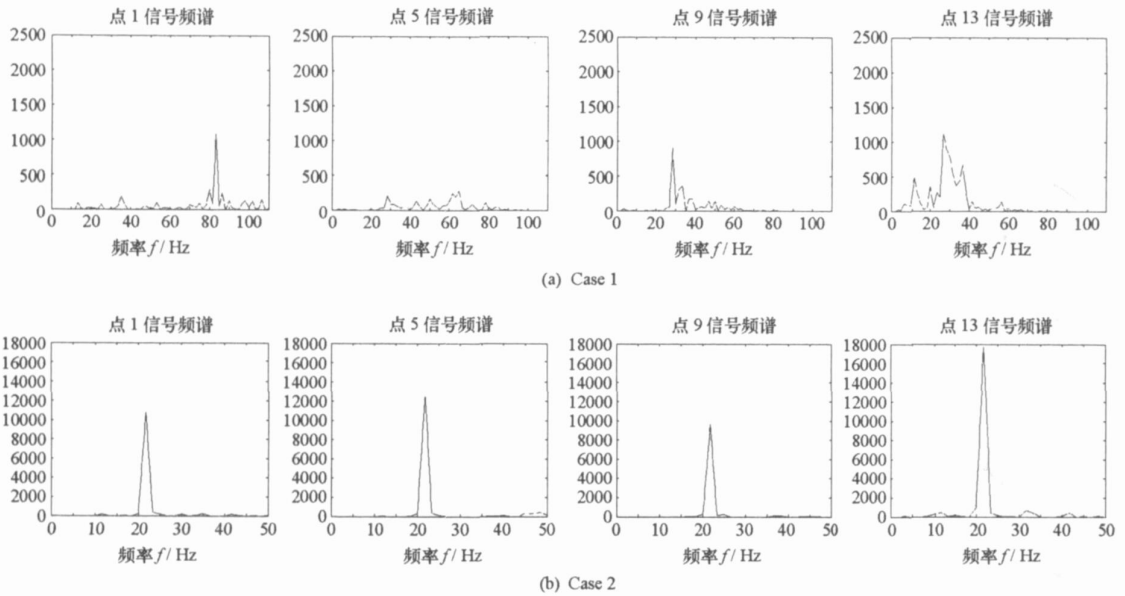


图 8 两工况混合层中心线监测点压力频谱图(点 1、5、9、13)

Fig. 8 FFT of unsteady pressure data for different streamwise location points ( 1, 5, 9, 13) in the mixing layer for Case 1 & 2

表 4 为由互信息量法计算得到的工况 1 和 2 的混合层中心线空间各监测点压力时间序列的时间延迟。图 9、图 10 分别为工况 1、2 混合层中心线压力时间序列关联维数分布图和最大 Lyapunov 指数分布图。

表 4 两工况混合层中心线各监测点压力时间序列的时间延迟

Tab. 4 Time delay of pressure-time serial for watch point of different streamwise location for Case 1 & 2

点序列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$x/m$	0.023	0.071	0.119	0.167	0.215	0.263	0.311	0.360	0.408	0.456	0.504	0.552	0.6
Case 1	24	32	38	44	48	54	62	66	72	98	78	110	90
Case 2	134	46	66	62	76	124	64	96	98	90	68	120	138

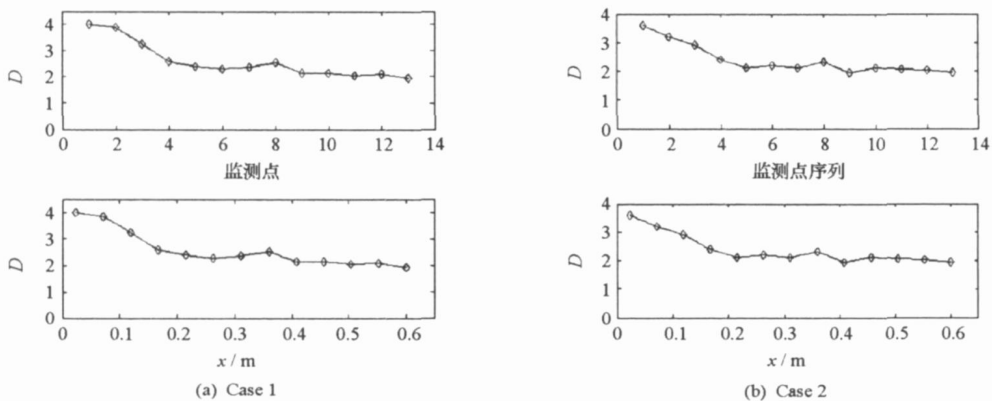


图 9 两工况混合层中心线压力时间序列关联维数分布图

Fig. 9 Distribution of correlation dimensions of pressure-time serial in the centre line of the mixing layer for Case 1 & 2

由图 9 可知,对于两工况,由于隔板后缘厚度较大,混合层在初始位置发展很快,均直接进入了非线性涡合并阶段,随着涡合并,关联维数  $D$  减小;混合层发展到一定阶段,工况 1 在流向位置点 4 处,工况 2 在流向位置点 5 处,混合层分别进入稳定发展阶段,  $D$  不再变化。两工况在  $D$  的数值上基本没有区

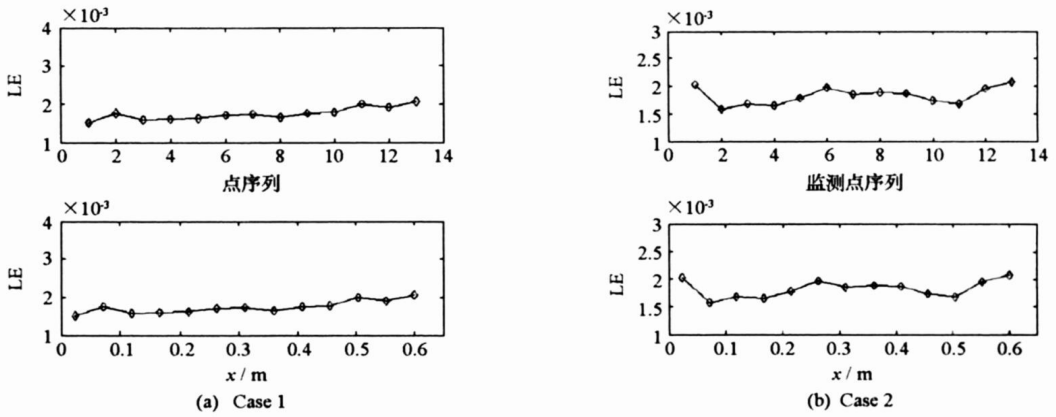


图 10 两工况混合层中心线压力时间序列最大 Lyapunov 指数分布图

Fig. 10 Distribution of maximal Lyapunov exponents of pressure-time serial in centre line of mixing layer for Case 1 & 2

别。由图 10, 两工况监测点的最大 Lyapunov 指数, 总体上沿混合层流向均有稍许增加, 且工况 2 的最大 Lyapunov 指数数值比工况 1 要普遍高一点。

所以, 可以利用混合层中心线上特征量的分布来分析混合层的发展情况及稳定性。入口加入人工单频强迫激励时, 利用混合层中心线上不同流向位置的频率分析混合层发展情况不再适用, 而采用非线性分析方法研究混合层的发展情况具有普遍性。

## 5 结论

本文对有厚度隔板且空间受限的二维超声速混合层进行非定常 LES 数值模拟, 在混合层稳定发展的一个时间段内, 提取了流场某些位置点的脉动压力时间序列, 进行单变量非线性时间序列分析以研究混合层的发展情况。

一般地, 从混合层中心线沿流向位置的频谱图中压力脉动主频的变化可以分析混合层的发展情况, 其压力伪相图可以定性表示混合层的稳定性。采用关联维数定量描述混合层经历的线性失稳、非线性失稳和湍合并阶段, 与频谱图的分析结果基本相同, 说明了采用关联维数定量刻画混合层发展情况是完全可行的。最大 Lyapunov 指数分布可以作为关联维数分析结果的验证和补充。同时, 举例验证了利用混合层中心线上特征量的分布来分析混合层的发展情况及稳定性的可行性。对于相应的超声速混合层实验, 入口加入人工单频强迫激励时, 利用混合层中心线上不同流向位置高频压力传感器连续采集的瞬时压力的频率来分析混合层发展情况不再适用, 而采用非线性分析方法研究混合层的发展情况具有普遍性。下一步工作将进行相应的超声速混合层实验, 来验证本文非线性压力时间序列分析的结论, 且将在条件具备的情况下, 把本文 LES 计算结果与有关实验或 DNS 计算结果进行细致对比, 以验证计算结果应用于非线性分析的可信度和所提取数据的有效性。

## 参考文献:

- [1] 于江飞, 晏至辉, 刘卫东. 双燃烧室冲压发动机为动力的高超声速飞行器[J]. 导弹与航天运载技术, 2008(5): 26-30.
- [2] 乐嘉陵, 胡欲立, 刘陵. 双模态超燃冲压发动机研究进展[J]. 流体力学实验与测量, 2000, 4(1): 1-12.
- [3] Wang G R, Fiedler H E. Some Flow Phenomena in a Confined Plane Wake[C]//International Conference on Flow Interaction cum Exhibition/Lectures on Interaction of Science & Art, 2nd, Berlin: HF Institut, TV Berlin, 1997: 12-14.
- [4] 罗纪生, 张哲, 周恒. 增强可压缩混合层混合的一种方法[J]. 中国科学 A 辑, 2000, 30(11): 1033-1039.
- [5] 曹伟, 周恒. 二维超音速混合层增强混合的研究[J]. 中国科学 A 辑, 2002, 32(2): 150-157.
- [6] 罗俊荣, 等. 二维超声速剪切层的非线性失稳过程分析[J]. 空气动力学学报, 2002, 20(3): 282-288.
- [7] 黄真理. 湍流的分形特征[C]//湍流研究最新进展. 北京: 科学出版社, 2001.
- [8] 王海燕, 卢山. 非线性时间序列分析及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [9] Menon S, Yeung P K, Kim W W. Effect of Subgrid Models on the Computed in-Termscale Energy Transfer in Isotropic Turbulence[J]. Computers and Fluids, 1996, 25(2): 165-180.
- [10] Goebel S G, Dutton J C. Experimental Study of Compressible Turbulent Mixing Layers[J]. J. AIAA, 1991, 29(4): 538-546.
- [11] Georgiadis N J, Alexander J I D, Reshotko E. Hybrid Reynolds-averaged Navier-stokes/Large-eddy Simulations of Supersonic Turbulent Mixing[J]. J. AIAA, 2002, 41(2): 218-229.
- [12] Fraser A M, Swinney H L. Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information[J]. Phys. Rev. A, 1986, 33: 1134-1140.