国 防 科 技 大 学 学 报
第 32 卷第 1 期 JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY Vol.32 No.1 2010

文章编号: 1001-2486(2010)01-0159-04

关于半鞅的可料表示性*

屈田兴, 金治明
(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 利用鞅空间 $\mathscr{H}^1$ 的泛函表示定理、泛函分析中的Hahn-Banach定理、半鞅向量随机积分的Girsanov定理, 获得了半鞅可料表示性的特征。由于使用的是半鞅的向量随机积分, 它推广了经典的结论。

关键词: 半鞅; $\mathscr{H}^1$ 鞅; 局部鞅; 局部绝对连续的概率测度; 鞅变换; 可料表示性
中图分类号: O211.6 文献标识码: B

On the Semi-martingale Predictable Representation

QU Tian-xing, JIN Zhi-ming
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The characteristics for semi-martingale predictable representation are obtained (theorem 2.2), which is derived from the functional representation theorem in martingale space, the Hahn-Banach theorem in functional analysis, and the Girsanov theorem for the semi-martingale vector stochastic integral. In light of the semi-martingale vector stochastic integral used, this method is a generalization of the classical result.

Key words: semi-martingale; $\mathscr{H}^1$ martingale; local martingale; local absolutely continuous probability measure; martingale transform; predictable representation

半鞅的可料表示性不仅是随机分析的一个重要内容, 而且对于金融市场完备性与期权定价理论的研究有着积极意义[3,5,12]。然而运用向量随机积分对半鞅可料表示性的研究, 其理论性更强, 理论与应用价值更高, 所以运用向量随机积分对半鞅可料表示性的探讨是十分有意义的。主要结论定理 6 使用半鞅向量随机积分给出了半鞅可料表示性的刻画。由于半鞅按分量的随机积分是半鞅向量随机积分的特款, 定理 6 推广了经典的结果。

1 预备知识

设$(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{F},P)$是带滤基完备概率空间, 滤基$\mathrm{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$满足通常条件, 且$\mathscr{F}_\infty=\mathscr{F}$。以下总以$(\Omega,\mathscr{F},\mathrm{F},P)$作为基本空间, 且所涉及的随机积分是指向量随机积分[3]。用 $\mathscr{M}$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}^d$分别表示一致可积鞅、一维半鞅与 d 维半鞅的全体。对 $X\in\mathscr{S}^d(P)$, 用 $L(X;P)$ 表示关于 P 在半鞅向量随机积分意义下对X 可积的d 维可料过程的全体。若$H\in L(X;P)$, 则相应的随机积分记为$(P)H\cdot X$。如果问题只涉及概率测度 P, 则上述记号中的 P 可省略, 例如这时$\mathscr{S}(P)$就简记为 $\mathscr{S}$。

定理 1[1] (半鞅向量随机积分的Girsanov定理) 设$X\in\mathscr{S}^d(P)$, $H\in L(X;P)$。若概率测度 Q 关于 P 局部绝对连续, 则 $X\in\mathscr{S}^d(P)$, $H\in L(X;P)$, 且$(P)H\cdot X$ 与$(Q)H\cdot X$ 是Q-无区别的。

在泛函分析中有一个简单结果: 设A, B 是赋范线性空间E 的闭子空间, 且A, B 中至少有一个是有限维的, 则代数和$A+B=\{x+y\mid x\in A, y\in B\}$是 E 的闭子空间。由于鞅空间 $\mathscr{H}^1$ 是 Banach 空间[4], 利用它可直接得到关于 $\mathscr{H}^1$ 的稳定子空间[3]的一个有用性质。

定理 2 设 $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$都是 $\mathscr{H}^1$ 的稳定闭子空间。如果 $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$中至少有一个是有限维的, 则 $\mathscr{K}+\mathscr{L}$ 也是 $\mathscr{H}^1$ 的稳定闭子空间。

---

* 收稿日期: 2009-09-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60673090)
作者简介: 屈田兴(1957—), 男, 副教授, 博士。

定理3[3] 设 X 是 d 维半鞅，记 $\mathscr{L}_0(X)=\{H\cdot X\mid H\in L(X)\}$，则空间

$$\mathscr{L}_0^1(X)=\mathscr{L}_0(X)\cap\mathscr{H}^1=\{H\cdot X\mid H\in L(X),H\cdot X\in\mathscr{H}^1\}$$

是鞅空间 $\mathscr{H}^1$ 的稳定闭子空间。

证明 设(H_n)是一列关于 X 可积的可料过程，$(H_n\cdot X)\subset\mathscr{L}_0^1(X)$。如果 $H_n\cdot X\xrightarrow{\mathscr{H}^1}Z$，则 $H_n\cdot X\xrightarrow{\mathscr{S}}Z$。进而由 $\mathscr{L}_0(X)$ 是一维半鞅拓扑空间的闭子空间[7]得出，存在 $H\in L(X)$，使 $Z=H\cdot X$，故 $Z\in\mathscr{L}_0^1(X)$。因此 $\mathscr{L}_0^1(X)$ 是 $\mathscr{H}^1$ 的闭子空间。其次，若 τ 是停时，$A\in\mathscr{F}_0$，$M\in\mathscr{L}_0^1(X)$，记 $M=H\cdot X$，则 $I_AM^\tau=(I_AHI_{[0,\tau]})\cdot X\in\mathscr{L}_0^1(X)$。因此 $\mathscr{L}_0^1(X)$ 是鞅空间 $\mathscr{H}^1$ 的稳定子空间。 □

定理4[3] 设 X 是 d 维半鞅，记 $\mathscr{L}(X)=\{x+H\cdot X\mid x\in\mathbf{R},H\in L(X)\}$，则空间

$$\mathscr{L}^1(X)=\mathscr{L}(X)\cap\mathscr{H}^1=\{x+H\cdot X\mid x\in\mathbf{R},H\in L(X),H\cdot X\in\mathscr{H}^1\}$$

是鞅空间 $\mathscr{H}^1$ 的稳定闭子空间。

证明 令 $\mathscr{K}$ 是 $\mathscr{H}^1$ 中恒等于常数的过程的全体，则 $\mathscr{K}$ 显然是 $\mathscr{H}^1$ 的一维稳定子空间。于是由定理2、定理3以及 $\mathscr{L}^1(X)=\mathscr{K}+\mathscr{L}_0^1(X)$ 得出结论。 □

评注1 定理4的证明与文献[3]中的证明相比，不仅方法不同，并且简单得多。

2 主要结果

本节总设 $\mathscr{F}_0$ 是由 $\mathscr{F}$ 中 P 零集的全体生成的 σ 代数，$X=(X^1,\cdots,X^d)$ 是 d 维半鞅。

定义1 (1)称关于 P 绝对连续(相应地，局部绝对连续)的概率测度 Q 为关于 X 绝对连续的鞅测度(相应地，局部绝对连续的鞅测度)，如果 $X\in\mathscr{M}^d(Q)$。

(2)称关于 P 绝对连续(相应地，局部绝对连续)的概率测度 Q 为关于 X 绝对连续的局部鞅测度(相应地，局部绝对连续的局部鞅测度)，如果 $X\in\mathscr{M}_{loc}^d(Q)$。

定义2 称概率测度 Q 为关于 X 绝对连续(相应地，局部绝对连续)的鞅变换[3,9-11]测度，如果 Q 关于 P 绝对连续(相应地，局部绝对连续)，并且 X 在 Q 下是鞅变换。

下面的概念是文献[3]中关于半鞅可料表示性概念在形式上的推广。

定义3 设 Q 是关于 P 局部绝对连续的概率测度，称 d 维半鞅 X 在 Q 下具有可料表示性，如果 $\mathscr{M}_{loc}(Q)\subset\mathscr{L}(X;Q)$，其中 $\mathscr{L}(X;Q)=\{x+(Q)H\cdot X\mid x\in\mathbf{R},H\in L(X;Q)\}$。也就是说，对于任意的一维 Q 局部可积鞅 M，存在在 Q 下关于 X 可积的 d 维可料过程 H，使得对一切 $t\geqslant0$，都有

$$M_t=M_0+(Q)(H\cdot X)_t,\quad Q-a.s.$$

定理5(半鞅可料表示性的刻画) 设 Q 是关于 d 维半鞅 X 局部绝对连续的鞅变换测度，则下述条件等价：

(1) $\mathscr{L}^1(X;Q)=\mathscr{H}^1(Q)$，其中 $\mathscr{L}^1(X;Q)=\mathscr{L}(X;Q)\cap\mathscr{H}^1(Q)$；

(2) X 在 Q 下有可料表示性；

(3) $\mathscr{M}^\infty(Q)\subset\mathscr{L}(X;Q)$。

证明 (1)⇒(2)：设(1)成立，则对于任意的 $M\in\mathscr{H}^1(Q)$，$M\in\mathscr{L}^1(X;Q)$。于是存在 $x\in\mathbf{R}$，$H\in L(X;Q)$，使得 $M=x+(Q)H\cdot X$。注意到 $\mathscr{M}_{loc}(Q)=(\mathscr{H}^1(Q))_{loc}$，用拼贴的方法就可推出上式对 $M\in\mathscr{M}_{loc}(Q)$ 成立。因此 X 在 Q 下有可料表示性。

(2)⇒(3)是明显的。

(3)⇒(1)：设 $N\in\mathscr{H}^1(Q)$，则由有界鞅全体 $\mathscr{M}^\infty(Q)$ 是 $\mathscr{H}^1(Q)$ 的稠密子空间[4]得出，存在一列 $(N^n)\subset\mathscr{M}^\infty(Q)$，使 $\|N^n-N\|_{\mathscr{H}^1(Q)}\to0$。然而由(3)可知，$(N^n)\subset\mathscr{L}(X;Q)$。于是 $(N^n)\subset\mathscr{L}^1(X;Q)$，故由定理4得出，$N\subset\mathscr{L}(X;Q)$。因此(1)成立。 □

引理1 设 Q 是关于 P 局部绝对连续的概率测度，则在 $\mathscr{F}_0$ 上 $Q=P$，即 $Q|_{\mathscr{F}_0}=P|_{\mathscr{F}_0}$。进而对任意的 $\mathscr{F}_0$ 可积的随机变量 f，都有 $E_Q[f]=E_P[f]$ 为常数。

证明 由于 $\mathscr{F}_0$ 是由 P 零集全体生成的 σ 代数，所以对任意的 $A\in\mathscr{F}_0$，都有 $P(A)=0$ 或 1。如果

$P(A)=0$, 则 $Q(A)=0$; 如果 $P(A)=1$, 则 $P(A^c)=0$, 于是 $Q(A^c)=0$, 从而 $Q(A)=1$。因此 $Q|_{\mathscr{F}_0}=P|_{\mathscr{F}_0}$。后一结论是显然的。 □

定理 6(半鞅可料表示性的刻画) 设关于 d 维半鞅 $X=(X^1,\cdots,X^d)$ 存在等价鞅变换测度 Q, 则下述条件等价:

(1) 关于 X 存在唯一的局部绝对连续的鞅变换测度;

(2) 关于 X 存在唯一的绝对连续的鞅变换测度;

(3) 关于 X 存在唯一的等价鞅变换测度;

(4) X 在 Q 下有可料表示性。

证明 (1) ⇒(2) ⇒(3) 是明显的。以下不妨设 $X_0=0$。

(3) ⇒(4) : 设关于 X 存在唯一的等价鞅变换测度, 则该测度就是 Q。下证 X 在 Q 下有可料表示性。由定理 5, 只要证

$$\mathscr{L}^1(X;Q)=\mathscr{H}^1(Q) \tag{1}$$

假若不然, 则由定理 3 得出, $\mathscr{L}^1(X;Q)$ 是 $\mathscr{H}^1(Q)$ 的真闭子空间。由 $\mathscr{H}^1(Q)$ 的对偶空间与 $\mathscr{BMO}(Q)$ 的关系[4] 以及 Hahn-Banach 定理, 存在 $N\in\mathscr{BMO}(Q)$, $N\neq 0$, 使

$$E_Q([M,N]_\infty)=0,\quad M\in\mathscr{L}^1(X;Q) \tag{2}$$

注意到 $\mathscr{BMO}\subset\mathscr{M}^\infty_{loc}$ 以及 $N\neq 0$, 存在停时 τ 使得

$$N^\tau\in\mathscr{M}^\infty,\quad N^\tau\neq 0 \tag{3}$$

由文献[4] 中定理 7. 17(局部鞅基本定理) 、定理 6. 4 及定理 6. 28 得出

$$E_Q(M_\infty N^\tau_\infty)=E_Q([M,N^\tau]_\infty)$$

而

$$[M,N^\tau]=[M,N]^\tau=[M^\tau,N]$$

由上述两式、定理 3 及式(2) 知

$$E_Q(M_\infty N^\tau_\infty)=E_Q([M^\tau,N]_\infty)=0,\quad M\in\mathscr{L}^1(X;Q) \tag{4}$$

注意到 $\mathscr{F}_0$ 是由所有 $P-$ 零集生成的 σ− 代数以及 Q 与 P 等价, 推出对任意 $A\in\mathscr{F}_0$, 都有 $I_A\in\mathscr{L}^1(X;Q)$, 从而由式(4) 得到

$$E_Q(I_A N^\tau_0)=E_Q(I_A N^\tau_\infty)=0$$

故 $N^\tau_0=0, a.s$, 由此得出 $N_0=N^\tau_0=0, a.s$, 令

$$Z_t=1+\frac{N^\tau_t}{2\|N^\tau\|_{\mathscr{M}^\infty(Q)}}$$

则

$$\frac{1}{2}\leqslant Z\leqslant\frac{3}{2},\quad E_Q(Z_t)=E_Q(Z_0)=1 \tag{5}$$

$$E_Q(Z_\infty M_\infty)=0,\quad M\in\mathscr{L}^1(X;Q) \tag{6}$$

由 Q 是关于 X 的等价鞅变换测度得出, 存在严格正的一维可料过程 φ 与 d 维 $\mathscr{H}^1(Q)$ 鞅 $Y=(Y^1,\cdots,Y^d)$, 使得

$$\varphi\in L(Y^i;Q),\quad X^i=(Q)\ \varphi\bullet Y^i,\quad i=1,\cdots,d$$

进而由文献[3] 中定理 4. 7 得出 $\mathscr{L}^1(X;Q)=\mathscr{L}^1(Y;Q)$。因此 $\mathscr{L}^1_0(X;Q)=\mathscr{L}^1_0(Y;Q)$。令测度 $\tilde{Q}$ 为 $\frac{\mathrm{d}\tilde{Q}}{\mathrm{d}Q}=Z_\infty$, 则由式(5) 得出 $\tilde{Q}$ 是与 Q 等价的概率测度。对 $0\leqslant u\leqslant v$, $A\in\mathscr{F}_u$, $i=1,\cdots,d$。形如

$$M_t=I_A(Y^i_{t\wedge v}-Y^i_{t\wedge u})=I_A((Y^i)^v_t-(Y^i)^u_t))$$

的过程属于 $\mathscr{L}^1_0(Y;Q)$, 从而属于 $\mathscr{L}^1_0(X;Q)$。故由式(6) 得出 $E_{\tilde{Q}}(M_\infty)=E_Q(Z_\infty M_\infty)=0$。这表明 Y 是 $\tilde{Q}$ 鞅。根据定理 1 推出

$$X^i=(Q)\ \varphi\bullet Y^i=(\tilde{Q})\ \varphi\bullet Y^i,\quad i=1,\cdots,d$$

故 Q 是关于 X 的等价鞅变换测度。由关于 X 的等价鞅变换测度的唯一性得出 $Q= Q$, 这意味着 $Z_{\infty}=1$。从而 $N^{\tau}=0$, 此与 $N^{\tau}\neq 0$ 相矛盾。

(4) ⇒(1) : 设 X 在 Q 下有可料表示性, 来证关于 X 存在唯一的局部绝对连续的鞅变换测度。由于 Q 是关于 X 的等价鞅变换测度, 所以它也是关于是 X 的局部绝对连续的鞅变换测度。因此只要证唯一性。设 Q 是关于 X 的局部绝对连续的鞅变换测度, 下证 $Q= Q$。

任取 f 为有界的 $\mathscr{F}$ 可测函数, 令 $M=(M_t)_{t\geqslant 0}$ 为有界过程 $(E_Q[f|\mathscr{F}_t])_{t\geqslant 0}$ 的右连左极修正, 则 $M_0 = E_Q[f]$。于是由 X 在 Q 下有可料表示性推出, 存在 $H\in L(X;Q)$ 使

$$M= M_0+(Q)H\bullet X$$

由于 Q 关于 P 局部绝对连续, 而且 Q 与 P 等价, 所以 Q 关于 Q 局部绝对连续。从而由定理 1 得出, 在 Q 无区别的意义下

$$(Q)H\bullet X=(Q)H\bullet X \tag{7}$$

再由 Q 是关于 X 局部绝对连续的鞅变换测度推出, 存在 d 维 $\mathscr{H}^1(Q)$ 鞅 $Y=(Y^1,\cdots,Y^d)$ 与严格正的一维可料过程 φ, 使得

$$\varphi\in L(Y^i;Q),\quad X^i=(Q)\varphi\bullet Y^i,\quad i=1,\cdots,d$$

根据文献[3]中定理 4.7, $K=\varphi H\in L(Y;Q)$, 并且

$$(Q)H\bullet X=(Q)K\bullet Y \tag{8}$$

注意到 Q 关于 Q 局部绝对连续, 得出在 Q 下的有界过程 $(Q)H\bullet X$ 在 Q 下也是有界过程。于是由式(7)、式(8)可知, $(Q)(K\bullet X)$ 是一维有界 Q 局部鞅, 从而它是 Q 有界鞅。因此

$$E_Q(M_0)=E_Q(M_{\infty})=E_Q[f]$$

由引理 1 得 $E_Q(M_0)=E_Q(M_0)$。故 $E_Q[f]=E_Q[f]$。因此 $Q= Q$。 □

定理 5 与定理 6 给出了多维半鞅可料表示性的特征刻画。由于在金融数学的期权定价理论中, 资产定价基本定理具有基础性的地位, 我们应用定理 6 扩展了文献[3]中的资产定价第二基本定理, 所得的结论将另文给出。

参 考 文 献:

[1] 屈田兴, 金治明. 关于半鞅向量随机积分的两个结果[J]. 国防科技大学学报, 2008, 30(2): 135- 138.

[2] Cherny A, Shiryaev A. On Stochastic Integrals up to Infinity and Predictable Criteria for Integrability [J]. Seminaire de Probabilities xxx Ⅷ, 2005, 1857: 165- 185.

[3] Shiryaev A N, Chernyi A S. Vector Stochastic Integrals and the Fundamental Theorems of Asset Pricing[J]. Tr.MIAN, 2002, 237: 12- 56.

[4] 何声武, 汪嘉冈, 严加安. 半鞅与随机分析[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[5] 金治明. 数学金融学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[6] Ĝmery M. Une Topologie Sur Lespace Des Semimartingales[J]. Lecture Notes in Mathem- atics, 1979, 721: 152- 160.

[7] Memin J. Espaces de Semi-martingales Et Changement de Probabilit [J]. Zeitschrift f r Wahrscheinlichkeits-theorie und Verwandte Gebiete, 1980, 52: 9- 39.

[8] Delbaen F, Schachermayer W. A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing[J]. Mathematische Annalen, 1994, 300(3): 463- 520.

[9] Delbaen F, Schachermayer W. The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes [J]. Mathematical Annalen, 1998, 312: 215- 250.

[10] Chou C S. Caract risation Dune Classe de Semimartingales[J]. Lecture Notes in Mathemat- ics, 1979, 721: 250- 252.

[11] Émery M. Compensation de Processus a Variation Finie Non Localement Integrables[J]. Lecture Notes in mathematics, 1980, 784: 152- 160.

[12] Yan J A. Introduction to Martingale Methods in Option Pricing [R]. LN in Math. 4, Liu Bie Ju Centre for Mathematical Sciences, City University of Hong Kong, 1998.