

文章编号: 1001- 2486(2010) 02- 0012- 05

分布式卫星系统相对运动的 Hamilton 力学建模及求解方法研究*

张跃东, 陈琪锋, 戴金海

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:介绍了地球扁率摄动下分布式卫星系统(DSS, Distributed Satellite System)相对运动的 Hamilton 动力学模型, 给出 DSS 相对运动的 Hamilton 正则方程; 针对地球扁率摄动下 DSS 相对运动的两点边值问题, 提出了一种基于生成函数的打靶求解法, 应用该方法对地球扁率摄动下 DSS 高精度构型调整问题进行了计算, 结果表明该算法具有较高的计算效率, 可有效避免维数灾难问题。

关键词: 分布式卫星系统; 相对运动; Hamilton 动力学模型; 两点边值问题

中图分类号: V412 文献标识码: A

Study on Hamiltonian Dynamic Model and Solving Method of Distributed Satellite System Relative Motion

ZHANG Yue-dong, CHEN Qi-feng, DAI Jin-hai

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The Hamiltonian dynamic model of distributed satellite system(DSS) relative motion under earth oblateness perturbation was introduced, and the Hamilton's equation of DSS relative motion was also obtained. Aiming at solving relative two-point boundary value problems of DSS under earth oblateness perturbation, a shooting method based on solving generating function was proposed. High precision formation adjusting problems of DSS under earth oblateness perturbation was calculated. Results demonstrate that the algorithm has high computational efficiency and can avoid the problem of dimension disaster.

Key words: distributed satellite system; relative motion; Hamiltonian dynamic model; two-point boundary value problems

随着现代微小卫星技术的迅速发展, 由多颗物理上互不相连的小卫星协同工作, 形成一个“卫星编队”或“虚拟卫星”共同完成空间任务, 成为一种潜力巨大的空间系统部署方式, 称为分布式卫星系统(DSS, Distributed Satellite System)。DSS 依靠特定的相对运动关系实现空间任务目标, 如何建立 DSS 相对运动的动力学模型成为研究的关键内容之一。目前, Hill 方程被广泛用于分析 DSS 的相对运动^[1], 但最初由 Hill 提出的 Hill 方程仅适用于分析无摄动近圆参考轨道的 DSS 相对运动, 某些改进型的 Hill 方程也只适用于一些特定的情况, 比如 Schweighart 等在 Hill 方程右端加入了线性化的 J_2 摄动项^[2]; Vadali 等采用平均根数法, 在有进动“平均”圆参考轨道假设下, 导出了考虑 J_2 项的 Hill 方程^[3]。

Guibout 等应用 Hamilton 正则方程、正则变换理论以及 Hamilton-Jacobi 方程, 建立了 DSS 相对运动的 Hamilton 动力学模型^[4]。该模型建立在对相对运动方程进行泰勒展开的基础上, 具有以下特点: ①依据计算精度的要求, Hamilton 动力学模型可以考虑任意阶的地球扁率摄动项和任意阶的非线性项; ② Hamilton 动力学模型适用于计算任意类型参考轨道 DSS 的相对运动。生成函数法(Method of Solving Generating Function)^[5]可用于求解该模型下的两点边值问题, 但生成函数法却存在维数灾难问题。

针对使用生成函数法时出现的维数灾难问题, 本文提出了基于生成函数的打靶法(Shooting Method Based on Solving Generating Function)。计算实例表明: 在相同计算精度条件下, 基于生成函数的打靶法的计算量要远小于生成函数法的计算量, 能够有效避免维数灾难。

* 收稿日期: 2009- 06- 05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10802094)

作者简介: 张跃东(1981-), 男, 博士生。

1 DSS 相对运动的 Hamilton 动力学模型

地球引力场中单位质量卫星在地心赤道惯性坐标系中运动的 Hamilton 函数为^[6]

$$H(q, p, t) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}} \left(1 - \sum_{k=2} J_k L_k \cos \frac{q_z}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}} \right) \quad (1)$$

式中, μ 为地球引力常数, J_k 为地球非球形的 k 阶带谐系数, L_k 为 k 次勒让德函数, q_x, q_y, q_z 和 p_x, p_y, p_z 分别为广义坐标 q 和广义动量 p 在地心赤道惯性坐标系中的三轴分量。

设 DSS 由参考星 A 和环绕星 B 组成, A, B 星在地心赤道惯性坐标系中运动的 Hamilton 正则方程为

$$\dot{X}^A = J \cdot \dot{H}(q^A, p^A, t) \quad (2)$$

$$\dot{X}^B = J \cdot \dot{H}(q^B, p^B, t) \quad (3)$$

$$X^A = \begin{bmatrix} q^A \\ p^A \end{bmatrix}, \quad X^B = \begin{bmatrix} q^B \\ p^B \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, X^A, q^A 和 p^A 分别表示 A 星的广义状态、广义坐标和广义动量; X^B, q^B 和 p^B 分别表示 B 星的广义状态、广义坐标和广义动量; $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, I 为 3×3 单位阵。(3) 式减(2) 式, 并令 $X^r = X^B - X^A$ 可得

$$\dot{X}^r = J \left(\dot{H}(q^B, p^B, t) - \dot{H}(q^A, p^A, t) \right) \quad (5)$$

式中, X^r 表示 DSS 相对运动的广义状态, X^r 由相对运动的广义坐标 q^r 和相对运动的广义动量 p^r 组成:

$$X^r = \begin{bmatrix} q^r \\ p^r \end{bmatrix} \quad (6)$$

由 DSS 飞行的特点可知, X^A, X^B 相互接近, 因此可认为 X^r 与 X^B, X^A 相比为小量, 将 $\dot{H}(X^B, t)$ 在 X^A 处做泰勒展开:

$$\dot{X}^r = JA_7 X^r + J \begin{bmatrix} (X^r)^T A_{11} X^r \\ \vdots \\ (X^r)^T A_{66} X^r \end{bmatrix} + J \begin{bmatrix} (X^r)^T B_{11} X^r & \dots & (X^r)^T B_{16} X^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X^r)^T B_{61} X^r & \dots & (X^r)^T B_{66} X^r \end{bmatrix} X^r + \dots \quad (7)$$

式中, $A_i (i = 1, \dots, 7)$ 和 $B_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, 6)$ 为 6×6 的时变系数矩阵。

若定义矩阵算子:

$$\Psi[M] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 M}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial p} \\ \frac{\partial^2 M}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 M}{\partial p^2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

则 $A_i = \frac{1}{2} \Psi \left[\frac{\partial H}{\partial X_i} \right] \Big|_{X_i^A} (i = 1, \dots, 6)$, $A_7 = \Psi[H] \Big|_{X_i^A}$, $B_{ij} = \frac{1}{6} \Psi \left[\frac{\partial^2 H}{\partial X_i \partial X_j} \right] \Big|_{X_i^A} (i, j = 1, \dots, 6)$ 。

(7) 式可写成 Hamilton 正则方程的形式:

$$\dot{X}^r = J \cdot \dot{H}^r(q^r, p^r, t) \quad (9)$$

式中, $H^r(q^r, p^r, t)$ 为 DSS 相对运动的 Hamilton 函数^[5]:

$$H^r(q^r, p^r, t) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m_1+m_2+\dots+m_6=0}^k \frac{1}{m_1! \dots m_6!} \partial(q_x)^{m_1} \dots \partial(q_z)^{m_3} \partial(p_x)^{m_4} \dots \partial(p_z)^{m_6} \Big|_{X_i^A} (q_x^r)^{m_1} \dots (p_z^r)^{m_6} \quad (10)$$

式中, 下标 x, y, z 表示广义坐标和广义动量在地心赤道惯性坐标系中的三轴分量。由(2)、(3)、(9)和(10) 式可以得出这样一个结论: Hamilton 系统的小偏差相对运动仍是 Hamilton 系统。

设 $F_{i,k}^r$ 为 N 自由度系统相对运动相流逆变换(Inverse Phase Flow Transformation) 产生的生成函数, I, K 为相流逆变换前后独立的广义坐标的个数, I, K 为相流逆变换前后独立的广义动量的个数, I, K, I, K 有下面的关系:

$$I = 2N - I, \quad K = 2N - K$$

由(10)式即可写出相对运动相流逆变换的 Hamilton-Jacobi 方程为^[7]

$$H^r(q^r, p^r, t) + \frac{\partial F_{I,K}^r(q^r, p^r, \left(\begin{smallmatrix} q_0^r \\ p_0^r \end{smallmatrix}\right)_K, \left(\begin{smallmatrix} q_0^r \\ p_0^r \end{smallmatrix}\right)_K, t)}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

式中, q^r, p^r 和 $\left(\begin{smallmatrix} q_0^r \\ p_0^r \end{smallmatrix}\right)_0, \left(\begin{smallmatrix} q_0^r \\ p_0^r \end{smallmatrix}\right)_0$ 分别表示相流逆变换前后独立的广义坐标和广义动量。

2 DSS 相对运动两点边值问题的求解方法

2.1 生成函数法

由(10)式可知, 相对运动的 Hamilton 函数由相对运动相空间变量的级数构成。由(11)式可将 $F_{I,K}^r$ 写成如下形式:

$$F_{I,K} \left(q_I, p_I, \left(q_0 \right)_K, \left(p_0 \right)_K, t \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{2n}=0 \\ i_1 + \dots + i_{2n} = k}}^k f_{k, j_1, \dots, j_{2n}}(t) y^{i_1} \dots y^{i_{2n}} \quad (12)$$

式中, $y = \left[q_I, p_I, \left(q_0 \right)_K, \left(p_0 \right)_K \right]$, 下标 $1, \dots, 2n$ 表示 y 在相空间中的 $2n$ 个分量, $f_{k, j_1, \dots, j_{2n}}(t)$ 为与时间相关的系数矩阵, 此处略去用于表示 DSS 相对运动的上标“ r ”(下文按此法省略)。

将(12)式代入(11)式, 可得到关于 $f_{k, j_1, \dots, j_{2n}}(t)$ 的耦合微分方程组。理论上通过数值方法可解出 $f_{k, j_1, \dots, j_{2n}}(t)$, 进而得到 $F_{I,K}^r$ 表达式, 但在实际求解过程会遭遇以下问题: ①奇异点, 包括边界奇异点和积分奇异点两种。奇异点的出现给求解 $f(t)$ 造成了困难, 虽然可以使用 Legendre 变换或相对运动的 Hamilton 正则方程进行回避, 但又会涉及非奇异生成函数的选取和奇异点位置判断等问题, 从而导致算法过于繁琐; ②维数灾难。求解 $f_{k, j_1, \dots, j_{2n}}(t)$ 的计算量随着(7)式泰勒展开项数和相空间维数的增多呈指数型增长。

2.2 基于生成函数的打靶法

为了克服生成函数法求解相对运动两点边值问题过程中所遇到的维数灾难问题, 本文将打靶法和生成函数法结合起来用于 DSS 相对运动两点边值问题的求解, 形成了基于生成函数的打靶法。

打靶法的难点在于如何对未知边界值进行初始估计, 不恰当的初始估计可能会导致整个打靶算法无法收敛; 而生成函数法在低阶近似情况下(即(7)式中的泰勒展开式只取低阶项)十分容易求解。因此可以将生成函数法的低阶近似解作为打靶法的初始解, 并利用高精度的误差校正公式不断地修正初始解, 从而实现初始解向高精度解的收敛。

设 X_0^L 和 X_0^H 分别为某个边值问题在 t_0 时刻的低阶解和高阶解, 由 X_0^L 和 X_0^H 出发可分别得到任意时刻相对运动的广义状态 X_t^L 和 X_t^H 。记 X_t^L 和 X_t^H 的差值为 X_t^* :

$$X_t^* = X_t^H - X_t^L \quad (13)$$

由于 X_t^L 和 X_t^H 的差别只是由求解精度不同造成的, 因此可以认为 X_t^* 与 X_t^L 和 X_t^H 相比为小量; 应用“Hamilton 系统的小偏差相对运动仍是 Hamilton 系统”这个结论可知, X_t^* 满足(9)式所表示的 Hamilton 正则方程。由此打靶法对 X_0^L 的修正问题就成为相对运动的两点边值问题。该两点边值问题可以使用低阶近似的生成函数法求解, 边值条件由修正解代入高精度的误差校正公式给出。

需要说明的是, 本文采用辛龙格-库塔(SIRK, Symplectic Implicit Runge-Kutta)法积分单星 Hamilton 正则方程, 并通过取绝对运动之差的方式得到相对运动的状态值。在修正 X_0^L 的过程中, 该方法被用于求取边值条件。

2.3 计算代价分析

将打靶法引入相对运动两点边值问题的求解过程能够起到降低求解难度、减少计算量的作用。下面以求解 3 自由度系统中的相对运动两点边值问题为例, 对生成函数法和基于生成函数的打靶法进行

对比:

(1) 生成函数法

当使用生成函数计算 3 自由度系统的相对运动两点边值问题时, 若保留(7)式泰勒展开式的前 k 项, 则求解 F_{p, K_r}^r 的表达式需要一次性求解 $(6^{k-1} + \dots + 6^0) \times 6^2$ 个耦合微分方程组。当 $k=6$ 时, 耦合微分方程数达 335 916 个之多! 对于目前计算机的计算能力而言, 一次性求解 335 916 个耦合微分方程组的难度可想而知。

(2) 基于生成函数的打靶法

设基于 m 近似生成函数的打靶法需要迭代 n 次, 以达到 k 阶生成函数法的计算精度。 $m=1$ 时, 使用基于生成函数的打靶法在求得初始解和每次修正初始解的过程中只需求解 36 个耦合微分方程组; $m=2$ 时, 也只需求解 252 个耦合微分方程组。与生成函数法不同的是, 基于生成函数的打靶法将一次性求解大规模耦合微分方程组转变为若干次求解小规模耦合微分方程组, 从而降低了求解难度。

可以证明基于生成函数的打靶法是 m^2 收敛的, 限于篇幅的原因这里将不给出证明。由于迭代过程是针对前一次迭代结果的各阶项进行 m 阶近似, 所以 n, k, m 有以下关系成立:

$$n \ll \frac{6^{k-1} + \dots + 6^0}{6^{m-1} + \dots + 6^0} \quad (m < k) \quad (14)$$

那么在相同计算精度条件下, 基于 m 近似生成函数的打靶法所需求解的耦合微分方程的总数远小于 k 阶生成函数法所需要计算的耦合微分方程的总数。

基于以上两个方面的分析, 基于生成函数的打靶法能够有效避免维数灾难。为了验证基于生成函数的打靶法的有效性及其在计算上的优势, 下面给出两个具体算例。

3 应用举例

3.1 圆参考轨道 DSS 的构形调整

假定参考星的初始轨道长半轴为 6 878 137m, 偏心率为 0, 轨道倾角为 30° , 升交点赤经为 0° , 近地点幅角为 0° , 平近点角为 0° 。在地心赤道惯性坐标内, 初始时刻 ($t_0=0$ s) DSS 的运动状态为 $[0, -866.025, -500.000, 0.553392, 0.276696, -0.479251]^\top$ (国际单位制, 下同), 最终时刻 ($t_f=6000$ s) DSS 的运动状态为 $[900.550, -357.676, 20.7674, 0.586840, -0.987557, 0.390258]^\top$ 。要求在初始时刻和最终时刻对环绕星施加冲量控制, 使得 DSS 从 t_0 时刻的构形调整到 t_f 时刻的期望构形。

表 1 列出了使用基于线性近似生成函数的打靶法和二阶近似生成函数法两种方法求得的控制冲量大小, 同时列出了 DSS 在冲量控制下 t_f 时刻的实际构型与期望构型之间的偏差。

表 1 圆参考轨道 DSS 构形调整计算结果

Tab. 1 Results of formation adjusting problem of DSS in circular reference orbit

| 求解方法 | t_0 时刻的控制冲量 | t_f 时刻的控制冲量 | t_f 时刻的构型偏差 | |
|----------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 二阶生成函数法 | 2. 88558 | 2. 30367 | 0. 176413 | |
| | - 0. 736166 | 0. 756015 | - 0. 233693 | |
| | 1. 18568 | 0. 392393 | - 0. 132115 | |
| 基于线性 近似生成 函数的打 靶法 | 2. 88623 | 2. 30451 | - 5. 74782 | |
| | 初始解 | - 0. 735491 | 0. 756689 | 12. 2066 |
| | 近似生成 | 1. 18636 | 0. 393073 | 6. 94377 |
| | 函数的打 | 2. 88580 | 2. 28811 | - 0. 00487036 |
| | 靶法 | - 0. 736157 | 0. 750703 | - 0. 00183796 |
| | 一次修正解 | 1. 18570 | 0. 389278 | - 0. 00289186 |

注: 控制冲量和构型偏差以地心赤道惯性坐标系三轴分量的形式给出(国际单位制)

由表 1 可以看出, 使用基于线性近似生成函数的打靶法的初始解对 DSS 进行构形调整时, t_f 时刻的构型偏差要大于使用二阶生成函数法时的构型偏差; 但使用基于线性近似生成函数的打靶法的一次修正解时, 控制精度就明显好于二阶生成函数法的控制精度, 而在此种情况下, 基于线性近似生成函数的

打靶法只求解了 36×2 个耦合微分方程组, 二阶生成函数法却需要求解 252 个耦合微分方程组。可见, 在降低求解难度、减少计算量和提高解的精度方面, 基于生成函数的打靶法确实要优于生成函数法。

图 1 在参考星轨道坐标系中给出了环绕星相对参考星绕飞的初始构形、最终期望构形以及基于线性近似生成函数的打靶法求解的二冲量构形调整过程。

3.2 椭圆参考轨道 DSS 的构形调整

假定参考星的初始轨道长半轴为 20 000 000m, 偏心率为 0.65, 轨道倾角为 30° , 升交点赤经为 0° , 近地点幅角为 0° , 平近点角为 0° 。初始时刻 ($t_0 = 0s$) DSS 的相对运动状态为 $[0, -866.025, -500, 0.111608, 0.055804, -0.096655]^T$, 要求最终时刻 ($t_f = 18000s$) DSS 的相对运动状态为 $[811.984, -607.554, -1059.69, 0.162106, -0.007943, -0.136412]^T$, 求在初始时刻和最终时刻施加的冲量控制。

同样, 使用基于线性近似生成函数的打靶法和二阶生成函数法分别求解, 求得的控制冲量及构形偏差列于表 2。分析表 2 中的构形偏差值, 仍然可以得到与例 1 相同的结论。

表 2 椭圆参考轨道 DSS 构形调整计算结果

Tab. 2 Results of formation adjusting problem of DSS in elliptic reference orbit

| 求解方法 | t_0 时刻的控制冲量 | t_f 时刻的控制冲量 | t_f 时刻的构形偏差 | |
|----------------------------|---------------|---------------|---------------|-----------|
| 二阶生成函数法 | 0.623240 | -0.038422 | 0.068631 | |
| | -0.436380 | 0.112109 | -0.031815 | |
| | 0.735267 | 0.031756 | -0.018203 | |
| | 0.623248 | -0.039795 | 8.80110 | |
| 基于线性 近似生成 函数的打 靶法 | 初始解 | -0.436528 | 0.112061 | -4.79148 |
| | | 0.735753 | 0.031618 | -2.28732 |
| | 一次修正解 | 0.623240 | -0.038433 | -0.003160 |
| | | -0.436380 | 0.112108 | 0.001286 |
| | 0.735267 | 0.031756 | 0.000902 | |

注: 控制冲量和构形偏差以地心赤道惯性坐标系三轴分量的形式给出(国际单位制)

图 2 在参考星轨道坐标系中显示了不施加冲量时环绕星相对参考星绕飞的运动(初始构形)、18 000s 后的期望运动以及由基于线性近似生成函数的打靶法得到的二冲量构形调整过程。

4 结论

本文将打靶法和生成函数法结合起来, 提出了一种可用于求解 DSS 相对运动两点边值问题的新方法——基于生成函数的打靶法。该方法的初始估计值由低阶近似的生成函数法解出, 利用高精度的误差校正公式修正初始估计值, 修正过程被归结为相对运动的两点边值问题, 由生成函数法求解并得出修正量。与生成函数法相比, 在相同计算精度条件下, 基于生成函数的打靶法的计算量要远小于生成函数法的计算量, 有效地避免了维数灾难。

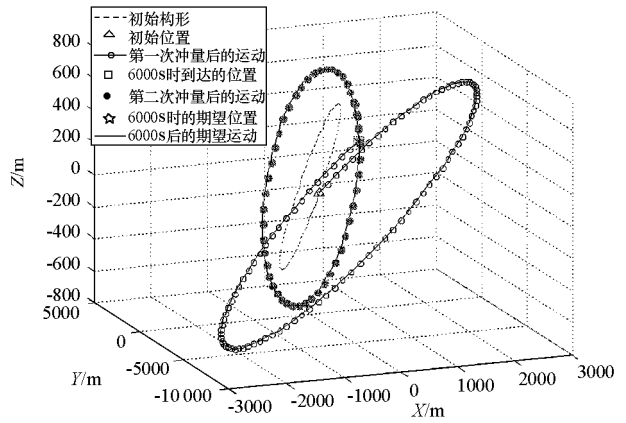


图 1 二冲量构型调整(圆参考轨道)

Fig. 1 Two impulse formation adjusting (circular reference orbit)

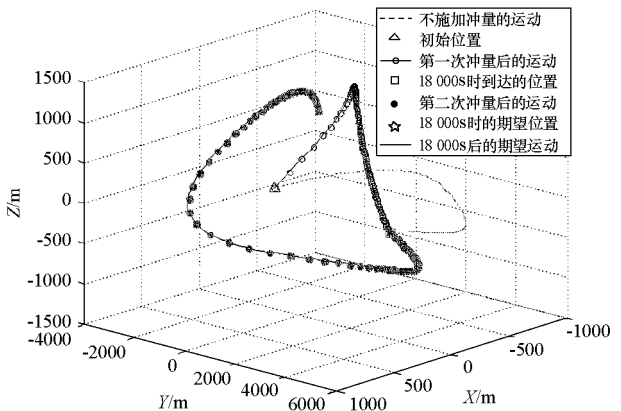


图 2 二冲量构型调整(椭圆参考轨道)

Fig. 2 Two impulse formation adjusting (elliptic reference orbit)

6 结论与展望

自由返回轨道是载人登月任务首选的一类转移轨道。文章提出了一种设计自由返回轨道的有效方法, 该方法可用于载人登月工程与嫦娥后期工程的转移轨道设计, 也可用于搭载发射的微型月球探测器的轨道设计。通过 STK 的仿真, 验证了该方法设计的标称轨道能够实现绕月后自由返回的任务。经过对误差传递的分析可知, 多数变量的微小扰动会对后续轨道产生明显影响, 对于精度要求高的任务需要采取中途修正。

Hybrid 轨道由自由返回与非自由返回轨道组合而成, 文中给出了一条典型的 Hybrid 轨道设计过程与结果。Hybrid 轨道所受约束要弱于自由返回轨道, 因此设计起来灵活性较大, 例如可以实现比自由返回轨道更长或更短的转移轨道飞行时间, 从而更好地满足发射与着月两端因地理位置、光照及测控条件等对时间上提出的要求^[9]; 还可以实现更高的着月点纬度, 从而增加任务的月面探测范围^[2]。Hybrid 轨道不足之处是在近月制动无法顺利进行情况下, 飞船不能自行返回地球; 此时若要保障航天员安全, 需在近月点后适当时刻进行机动, 将飞船送入可返回地球的轨道, 这也是需要进一步研究的课题。

参考文献:

- [1] Ocampo C, Hayes S, Twiggs R. Single Injection Earth Return Trajectory Options for Small Spacecraft Missions to the Moon [C]//SSC01- III- 3, 15th Annual USU Conference on Small Satellites, Utah, August 2001.
- [2] Berry R L. Launch Window and Translunar, Lunar Orbit, and Transearth Trajectory Planning and Control for the Apollo 11 Lunar Landing Mission [C]//AIAA70- 0024, AIAA 8th Aerospace Sciences Meeting, New York, January 19- 21, 1970.
- [3] Beksinski E D, Jr. Abort Trajectories for Manned Lunar Missions [D]. University of Maryland, 2007.
- [4] Solar System Exploration Division, Johnson Space Center. A Site Selection Strategy for a Lunar Outpost [R]. Conclusion of a Workshop, August 13 - 14, 1990.
- [5] Betts J T. Survey of Numerical Methods for Trajectories Optimization [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1998, 21(2): 193- 207, 1998.
- [6] Liu X L, Duan G R. Designs of Optimal Free-return Orbit for Moon Landing [C]//International Conference on Robotics and Biomimetics, Sanya, China, December 15- 18, 2007.
- [7] 曾国强, 等. 借助月球引力发射地球静止卫星研究[J]. 空间科学学报, 2000, 20(2): 177- 184.
- [8] 白玉铸, 等. 月球探测器返回轨道特性分析[J]. 国防科技大学学报, 2008, 30(4): 11- 16.
- [9] 白玉铸, 等. 软着月任务窗口与轨道设计方法研究[J]. 宇航学报, 2009, 30(6): 2092- 2098.

(上接第 16 页)

参考文献:

- [1] Burns R, Craig A. TechSat21: Formation Design, Control and Simulation [C]//IEEE Aerospace Conference Proceedings, New York, 2000: 19- 25.
- [2] Schweighart S A. Development and Analysis of High Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flying [D]. Thesis of Master of Science, Massachusetts Institute of Technology, June 2001.
- [3] Vadali S R, Alfriend K T, Vaddi S. Hill's Equation, Mean Orbital Elements and Formation Flying of Satellites [R]. AAS00- 258, 2000.
- [4] Guibout V M, Scheeres D J. Solving Relative Two-point Boundary Value Problems: Spacecraft Formation Flight Transfers Application [J]. Journal of Control, Guidance and Dynamics, 2004, 27(4): 693- 704.
- [5] Guibout V M, Scheeres D J. Spacecraft Formation Dynamics and Design [J]. Journal of Control, Guidance and Dynamics, 2004, 29(1): 121 - 133.
- [6] 肖峰. 人造地球卫星轨道摄动理论 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995.
- [7] 韩广才, 李鸿, 商大中. 分析力学 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2003.