

文章编号: 1001- 2486(2010) 02- 0068- 05

## 基于 MCMC 方法的 Lorenz 混沌系统的参数估计\*

曹小群<sup>1</sup>, 宋君强<sup>1</sup>, 张卫民<sup>1</sup>, 蔡其发<sup>2</sup>, 张理论<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学 计算机学院, 湖南 长沙 410073; 2. 中国人民解放军 61741 部队, 北京 100071)

**摘要:** 基于贝叶斯理论, 提出用马尔科夫链蒙特卡罗(MCMC)方法来估计 Lorenz 混沌系统的未知参数。首先导出了未知参数分布规律的后验概率密度函数; 接着采用自适应 Metropolis 算法构造 Markov 链; 然后截取收敛的链序列, 计算混沌系统参数的估计值。数值试验表明: 该方法具有很高的估计精度, 同时具有较好的抗噪声性能。

**关键词:** Lorenz 混沌系统; 参数估计; 马尔科夫链蒙特卡罗方法

**中图分类号:** O302 **文献标识码:** A

## Estimating Parameters of Lorenz Chaotic System with MCMC Method

CAO Xia-qun<sup>1</sup>, SONG Jun-qiang<sup>1</sup>, ZHANG Wei-min<sup>1</sup>, CAI Qi-fa<sup>2</sup>, ZHANG Li-lun<sup>1</sup>

(1. College of Computer, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. 61741 Troops of PLA, Beijing 100071, China)

**Abstract:** Based on Bayesian theorem, a method is proposed to estimate the unknown parameters of Lorenz chaotic system using Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method. Firstly, the posterior probability density function for unknown parameters is deduced. Secondly, taking the posterior probability as the invariant distribution, the Adaptive Metropolis algorithm is used to construct the Markov Chains. Thirdly, the converged samples are used to calculate the mathematic expectation of the unknown parameters. The results of numerical experiments show that the parameters estimated by the new method have high precision and the noise is filtered effectively from observations at the same time.

**Key words:** Lorenz chaotic system; parameter estimation; Markov Chain Monte Carlo method

自 Lorenz 于 1963 年发现第一个混沌吸引子后, 混沌控制和同步大量应用于信息科学、保密通信、化学和生命科学等领域, 相应的理论和方法已经得到广泛发展<sup>[1-3]</sup>。在实际应用中, 由于混沌系统的复杂性, 某些参数不可测; 或者出于保密通信的要求, 系统的某些参数不可知。因此在混沌控制和同步领域, 估计混沌系统的未知参数成为一个关键问题。近几年研究人员不断提出估计混沌系统参数的新方法<sup>[4-7]</sup>。混沌系统的参数估计问题实质上是动力系统反问题, 和正问题不同, 它是通过试验或运行中的观测数据来反求模型中的未知参数。由于测量信息不准确、不充分和系统自身的非线性等性质, 因而反问题的求解经常是不确定的, 即解不一定存在; 即使解存在也不唯一, 在解存在唯一条件下也不稳定(解不连续依赖于观测数据)<sup>[8]</sup>, 因此混沌动力系统参数估计问题必须采用特殊方法<sup>[4-7]</sup>求解。

## 1 MCMC 方法

在贝叶斯统计方法<sup>[10-11]</sup>中, 认为总体分布中的未知参数向量  $m$  本身就是随机向量, 在对  $m$  进行统计推断时, 首先必须对  $m$  设置一个先验分布  $p(m)$ 。先验分布是在观测前所有关于未知参数信息的概率表述。在观测发生后, 使用贝叶斯公式可将未知参数的先验分布改进为后验分布。根据贝叶斯理论, 参数的后验分布、观测信息和先验分布之间有如下关系:

$$p(m|d) = p(d|m)p(m)/p(d) \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2009- 10- 13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40775064; 40505023)

作者简介: 曹小群(1980—), 男, 助理研究员, 博士。

其中,  $\mathbf{m}^T = (m_1, m_2, \dots, m_N)$ , 表示长度为  $N$  的未知随机向量,  $\mathbf{d}^T = (d_1, d_2, \dots, d_M)$  是包含  $M$  个观测资料的列向量。因为观测数据已经给出, 所以  $p(\mathbf{d})$  是一个与  $\mathbf{m}$  无关的常数, 式(1)可写成

$$p(\mathbf{m} | \mathbf{d}) \propto p(\mathbf{d} | \mathbf{m})p(\mathbf{m}) \quad (2)$$

式(2)是本文利用MCMC算法估计混沌系统未知参数的出发点。其中, 条件概率密度  $p(\mathbf{d} | \mathbf{m})$  又称似然函数, 也写作  $L(\mathbf{d} | \mathbf{m})$ , 表示估计的模式参数和实际观测数据的拟合程度, 值越大表明拟合程度越好, 反之越差。将先验信息和观测信息结合起来, 就得到反映未知随机向量  $\mathbf{m}$  综合信息的后验概率密度  $p(\mathbf{m} | \mathbf{d})$ , 它定义在整个解空间, 表示了问题的“完全”解, 即可能解集合中任意一个解出现的概率。

理论上从后验分布函数可以获得未知随机向量的任何统计特征, 但在实际应用中除了极其简单的情形,  $p(\mathbf{m} | \mathbf{d})$  都无明确的数学表达式。另外, 采用通常的数值积分方法(例如, Monte Carlo 方法<sup>[12-13]</sup>)也存在极大的困难: 计算量随向量维数的增多而呈指数增长。上述原因使得贝叶斯方法很难直接解决实际问题, 而近期发展的MCMC算法能有效克服该困难。

MCMC算法能对定义在高维随机向量空间  $M$  上无明确数学表达式的概率分布  $p$  进行抽样, 基本思想是产生大量服从分布  $p$  的随机向量序列  $\{m_1, m_2, \dots, m_l\}$ , 其中  $l$  为抽样数。如果向量序列满足马尔可夫性质: 向量  $m_{i+1}$  的产生仅依赖于前一个向量  $m_i$ , 而与过去时刻  $i-1, i-2, \dots, 1$  的状态向量  $m_{i-1}, m_{i-2}, \dots, m_1$  都无关, 则称此序列为马尔可夫链。马尔可夫性质的另一种表述是: 若抽样算法当前访问的是  $m_j$  点, 则下一步访问另一点  $m_i$  的概率只依赖于  $m_j$ , 而与以前访问点无关。马尔可夫性质意味着抽样算法完全可由转移概率矩阵  $P$  描述, 矩阵元素  $p_{ij}$  表示算法在当前访问  $m_j$  的条件下接着将要访问  $m_i$  的条件概率。按照构造Markov链所用转移概率矩阵的不同, MCMC方法的主要抽样算法有: Gibbs 抽样器算法<sup>[14]</sup>、Metropolis-Hastings 算法<sup>[15]</sup> 和自适应Metropolis 算法<sup>[16]</sup>。

本文采用自适应Metropolis 算法以混沌系统未知参数的后验分布为不变极限分布来构造Markov链。自适应Metropolis 算法是Haario在2001年提出的一种改进MCMC抽样算法<sup>[14]</sup>。与传统的Metropolis-Hastings 算法相比, 自适应Metropolis 算法不需要预先确定参数的推荐分布, 而是由后验参数的协方差矩阵来估算参数分布<sup>[14]</sup>。后验参数的协方差矩阵在每一次迭代后都要自适应地调整。如此, 第  $i$  步参数的推荐分布就是均值为  $m_i$ 、协方差矩阵为  $C_i$  的多元正态分布。协方差的计算公式如式(3)所示, 在初始  $i_0$  次迭代中, 协方差矩阵  $C_i$  取固定值  $C_0$ , 之后进行自适应更新。 $\hat{m}_i$  是未知模式参数向量  $\mathbf{m}$  中某个元素在第  $i$  次迭代的估计值。

$$C_i = \begin{cases} C_0, & i \leq i_0 \\ s_d \text{Cov}(\hat{m}_0, \dots, \hat{m}_{i-1}) + s_d \mathbf{I}_d, & i > i_0 \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $\varepsilon$  是一个非常小的数, 引进目的是确保  $C_i$  不成为奇异矩阵,  $\text{Cov}(\hat{m}_0, \dots, \hat{m}_{i-1})$  表示  $\hat{m}_0, \dots, \hat{m}_{i-1}$  的协方差阵;  $s_d$  是比例因子, 依赖于未知随机向量空间的维数  $d$ , 目的是保证接受率在一个合适的范围内; 在本文中  $\varepsilon$  和  $s_d$  分别取为:  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $s_d = 2.4^2/d$ 。  $\mathbf{I}_d$  为  $d$  维单位矩阵。当进行第  $i+1$  次迭代时, 由式(3)可导出协方差的计算式:

$$C_{i+1} = \frac{i-1}{i} C_i + \frac{s_d}{i} [i m_{i-1} m_{i-1}^T - (i+1) m m^T + m m^T + \mathbf{I}_d] \quad (4)$$

其中,  $m_{i-1}$  和  $m_i$  是前面  $i-1$  次和  $i$  次迭代的参数均值。自适应Metropolis 算法的计算流程如下:

- (1) 设定  $i=0$ , 对不同变量进行初始化;
- (2) 随机量的生成和接受, 构造Markov链:
  - (a) 利用式(3)计算协方差矩阵  $C_i$ ;
  - (b) 产生服从正态分布的推荐参数值  $m^* \sim N(m_i, C_i)$ ;
  - (c) 利用下式计算接受概率  $\alpha = \min\left\{1, \frac{p(\mathbf{d} | m^*)p(m^*)}{p(\mathbf{d} | m_i)p(m_i)}\right\}$ ;
  - (d) 产生服从均匀分布的随机数  $u \sim U(0, 1)$ ;
  - (e) 若  $u < \alpha$ , 则接受  $m_{i+1} = m^*$ , 否则  $m_{i+1} = m_i$ 。
- (3) 重复上面的步骤(a)~(e), 直到产生预先指定数量的样本为止。

自适应 Metropolis 算法的最大优点是推荐分布随计算过程自动更新,不需要预先指定。同时,相比 Metropolis-Hastings 算法<sup>[16]</sup>,由于参数不再需要分组更新,所以计算量大大减少。

## 2 Lorenz 混沌系统的参数估计

下面以典型的 Lorenz 混沌系统为例,说明利用 MCMC 算法对混沌系统的未知参数进行估计的有效性。Lorenz 系统可由如下的常微分方程组表示:

$$\begin{cases} dx/dt = \sigma(y-x) \\ dy/dt = \gamma x - xz - y \\ dz/dt = xy - bz \end{cases} \quad (5)$$

系统(5)的一个简单物理实现是在下方加热而在上方冷却时热对流管中的环流。其中  $x$  表示流体速度,  $y$  和  $z$  分别为水平和垂直温差;  $\sigma$  和  $\gamma$  分别与流体的 Prandtl 数和 Rayleigh 数成比例,  $b$  是与空间相关的常数。当参数  $\sigma = 10$ ,  $\gamma = 28$  和  $b = 8/3$  时,式(5)表示的系统呈现混沌现象。数值试验中采用四阶龙格-库塔算法求解常微分方程,步长设置为  $h$ 。观察数据的采集过程如下:先让 Lorenz 系统自由演化,在经历暂态过程之后任取混沌状态的某一点作为初值,并以此时刻作为初始时刻,然后任其演化至  $Th$  时刻。这样就得到 Lorenz 系统在离散时间序列  $\{0, h, 2h, \dots, Th\}$  上的标准状态  $(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, T$ ),而且这些状态量都处于系统的混沌状态。标准状态量可直接作为观测数据  $(x_o(t_i), y_o(t_i), z_o(t_i))$ ,也可加入随机噪声得到更真实的模拟观测资料。

本文的目标是在已知部分观测资料的条件下,采用 MCMC 方法估计出 Lorenz 混沌系统的多个未知参数。下面利用贝叶斯公式来导出 Lorenz 混沌系统未知参数的后验概率密度函数。假设方程(5)中影响模式状态量的 3 个参数  $(\sigma, \gamma, b)$  都是未知的,即对三个参数进行联合反演。模式初始状态量是  $(x_0, y_0, z_0)$ ,观察资料为  $\mathbf{d} = (x_o(t_i), y_o(t_i), z_o(t_i))$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ),表示只使用部分观察资料。根据贝叶斯公式(1),且不考虑分母表示的常数项,则混沌系统未知参数的后验分布  $p(\mathbf{m} | \mathbf{d}) = p(\sigma, \gamma, b | \mathbf{d})$  通过下式进行计算:

$$p(\sigma, \gamma, b | \mathbf{d}) = p(\mathbf{d} | \sigma, \gamma, b) p(\sigma, \gamma, b) \quad (6)$$

式(6)已经假设  $\mathbf{d} = M(\sigma, \gamma, b) + \omega$ ,其中  $M(\sigma, \gamma, b)$  表示 Lorenz 系统的离散正模式,  $\omega$  为包含观测误差的独立分布的随机噪声,并且假定随机噪声  $\omega$  服从均值为零、标准偏差为  $\sigma_o$  的正态分布,即  $\omega \sim N(0, \sigma_o^2)$ 。同时假设由数值求解算子  $M$  引进的误差远小于观测误差。通过上述假设,可以得到以下形式的似然函数:

$$L(\mathbf{d} | \mathbf{m}) = L(\mathbf{d} | \sigma, \gamma, b) = \frac{1}{(2\pi\sigma_o^2)^{n/2}} \exp[-\|\mathbf{d} - M(\sigma, \gamma, b)\|^2 / (2\sigma_o^2)] \quad (7)$$

式中  $n$  表示观察资料数量,  $\|\cdot\|$  表示欧几里得范数。

在贝叶斯推理中,首先要设定每个未知参数的先验分布。在本文中假设所有未知参数的先验分布都满足独立的均匀分布,参数  $\sigma$ ,  $\gamma$  和  $b$  分别满足  $U(\sigma)$ ,  $U(\gamma)$  和  $U(b)$  表示的均匀分布,则总的先验分布表示为

$$p(\mathbf{m}) = U(\sigma) U(\gamma) U(b) \quad (8)$$

均匀分布是一种最简单的先验分布,虽然只能指定未知参数变化的上下界,但是可以缩小对参数随机抽样的目标区域,有利于提高参数的估计精度,该结论在下面的数值试验中将得到验证。一般来说,可以通过经验知识和历史统计确定更准确和复杂的先验分布。自适应 Metropolis 算法的一个优点是对于  $\mathbf{m}$  的任何先验分布都能够收敛于目标分布。由式(6)、(7)和(8)可得,在给定观测数据的条件下混沌系统未知参数的后验概率密度函数为

$$p(\sigma, \gamma, b | \mathbf{d}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_o^2)^{n/2}} \exp[-\|\mathbf{d} - M(\sigma, \gamma, b)\|^2 / (2\sigma_o^2)] \cdot U(\sigma) U(\gamma) U(b) \quad (9)$$

## 3 数值试验结果

在数值试验中,模式初始状态量  $(x_0, y_0, z_0)$  取为  $(-0.2028, 2.5418, 24.0873)$ ,是 Lorenz 系统混沌状

态中一点。以该状态为初值,取积分步长  $h=0.01$ , 设定时间积分区间为  $[0, 8]$  (单位为 s), 然后对模式进行积分, 就可以得到系统在离散时间序列  $0h, 1h, 2h, \dots, 800h$  上的标准状态变量值。试验中只取部分状态变量值作为观测量, 抽取  $0h, 40h, 80h, \dots, 200h$  时刻的状态量作为  $n=6$  个观测数据。在所选状态量上叠加高斯随机数作为观测噪声, 观测噪声的均值取为 0、标准偏差取为  $\sigma_0=0.1$ 。未知参数  $\sigma, \gamma$  和  $b$  的先验分布分别取如下形式:

$$U(\sigma) = \begin{cases} 1/15, & 0 < \sigma < 15 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

$$U(\gamma) = \begin{cases} 0.02, & 0 < \gamma < 50 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

$$U(b) = \begin{cases} 0.1, & 0 < b < 10 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

以上面加入高斯噪声的状态量作为观测资料。三个先验分布概率密度取式(10)~(12)所示的表达式, 则未知参数的后验概率密度函数表示为

$$p(\mathbf{m} | \mathbf{d}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^3} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^6 \|d^i - M^i(\mathbf{m})\|^2\right] \cdot U(\sigma) U(\gamma) U(b) \quad (13)$$

其中  $d^i = (x_0^i, y_0^i, z_0^i)$  表示所选的第  $i$  个观测向量;  $M^i(\mathbf{m})$  表示对向量  $\mathbf{m} = (\sigma, \gamma, b)$  进行更新后, 由 Lorenz 离散模式积分到对应观测时刻得到状态量  $(x, y, z)$  的计算值。

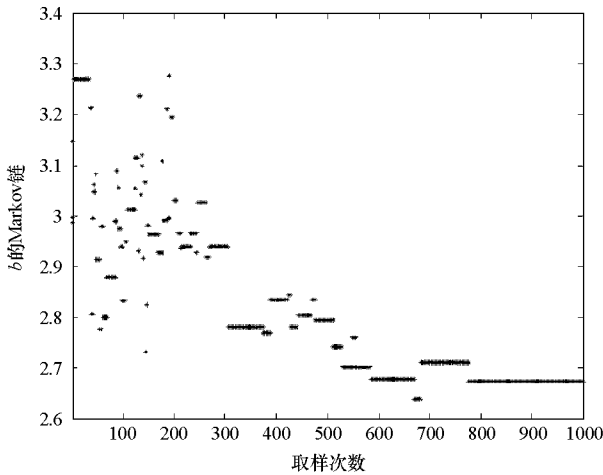


图1 参数  $b$  的 Markov 链

Fig. 1 Markov chain of parameter  $b$

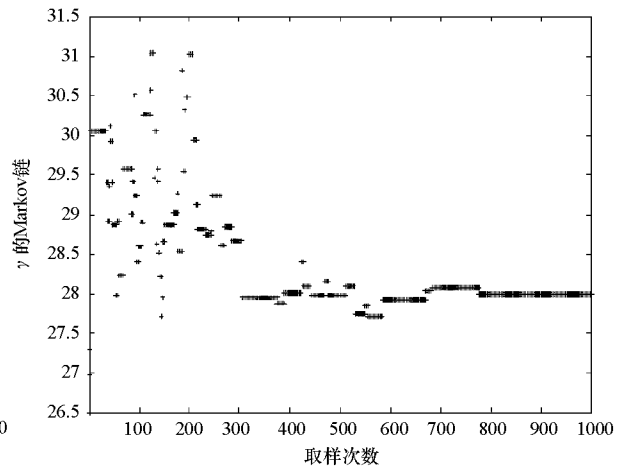


图2 参数  $\gamma$  的 Markov 链

Fig. 2 Markov chain of parameter  $\gamma$

确定后验概率密度函数的表达式后, 就可以利用 MCMC 方法对未知参数进行随机抽样, 预先指定抽样次数为 1000, 参数初始值取对应的先验均匀分布中的随机值。自适应 Metropolis 算法在进行抽样时, 每次对未知随机向量进行更新后, Lorenz 模式都要在研究的时间区间上进行一次积分, 计算后验概率密度函数的值。然后, 通过和上一步后验密度函数值的比较, 来决定是否对未知随机向量进行更新。三个未知参数的 Markov 链分别如图 1、2 和 3 所示, 可以看出马尔科夫链在大约经历 800 多次迭代后达到收敛。取 800~1000 步的链序列并采用后验均值方法计算参数估计值, 分别得到  $\sigma=10.001$ 、 $\gamma=28.021$  和  $b=2.6828$ 。分析图中所示的试验结果可得如下结论: 采用 MCMC 方法估计的未知参数具有较高的准确性; 在相同的取样次数情况下, 参数  $\sigma$  具有最高的估计精度, 这与指定的先验分布的准确性有关: 相对于另外两个参数, 参数  $\sigma$  的先验分布更接近真实值。采用 MCMC 方法估计出  $(\sigma, \gamma, b)$  的值后, 代入 Lorenz 混沌系统的离散模式可以得到所有状态量  $(x, y, z)$  的估计轨迹。图 4、5 和 6 分别显示了  $x$ 、 $y$  和  $z$  的估计轨迹、观测值和离散时间点上的真实值, 从图中可知, 估计轨迹和真实值在 7.5s 之前非常吻合, 验证了用 MCMC 算法同时对多个未知参数进行估计的正确性, 同时也表明了从部分较少的观测数据成功估计出混沌系统参数的可能性。由于混沌系统的特性, 即使参数估计值与真实值非常接近,

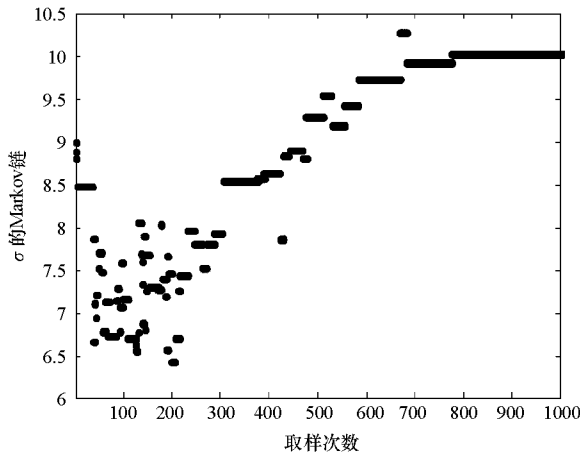


图3 参数  $\sigma$  的 Markov 链  
Fig. 3 Markov chain of parameter  $\sigma$

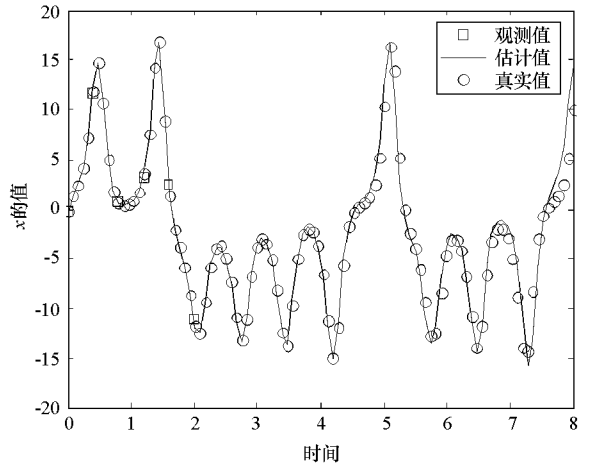


图4 状态量  $x$  的比较图  
Fig. 4 Comparison of state variable  $x$

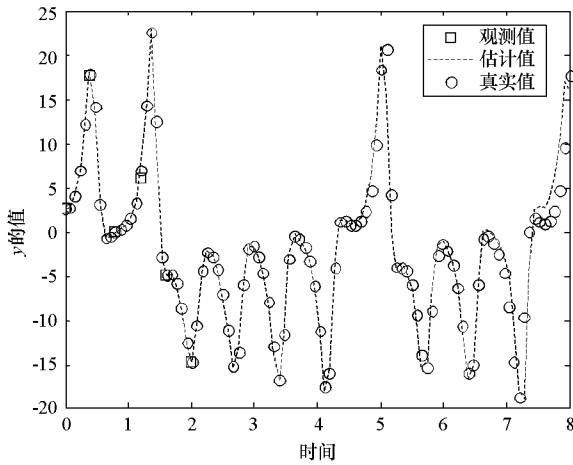


图5 状态量  $y$  的比较图  
Fig. 5 Comparison of state variable  $y$

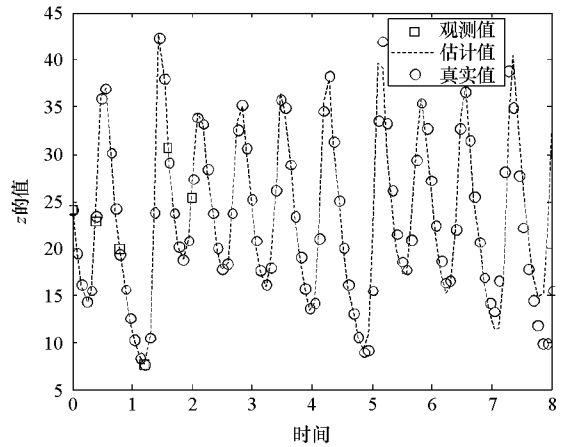


图6 状态量  $z$  的比较图  
Fig. 6 Comparison of state variable  $z$

也仅能在短时间内有意义。从图4~6可知,随着系统的长时间演化,在7.5s之后估计参数所表征系统的状态量开始偏离真实状态量。

### 4 结论

本文在贝叶斯理论的框架下,利用马尔科夫链蒙特卡罗(MCMC)算法来估计 Lorenz 混沌系统中的未知参数。主要结论归纳如下:

(1) 即使观测资料中包含观测噪声,利用MCMC方法都能准确地估计出混沌系统参数;利用少量观测资料,估计参数所表征系统的状态量和真实状态量之间的误差很小。验证了利用MCMC方法估计混沌系统参数的有效性。

(2) 在相同的随机抽样次数情况下,如果对某参数指定的先验分布准确性越高,则此参数的估计精度也越高。

总之,MCMC方法是一种通过构造 Markov 链进行随机模拟的方法,通过和贝叶斯理论进行结合,构造 Markov 链的过程实际上是在由先验分布界定的空间内对未知参数进行随机最优搜索的过程。本研究的结果表明,MCMC方法和许多确定性方法<sup>[4-7]</sup>一样能准确估计混沌系统的多个未知参数,同时具有较好的抗噪声性能。

## 4 结论

文中提出了一种混合模型时域仿真方法,该方法通过设置散射体数量阈值实现了点散射模型方法与单元散射模型方法之间的无缝切换,既克服了单元散射模型方法在散射体数量较少情况下高斯分布假设带来的计算误差,又克服了点散射模型方法在散射体数量较多情况下计算复杂的问题。针对发射信号为窄带信号的情况,为降低计算量,设计了先计算混响包络进而得到混响信号的方法,适用于满足采样定理的任意采样率。最后,针对不同带宽、不同散射体密度情况仿真了混响信号,仿真结果与理论混响在频谱特性以及统计特性方面的一致性反映了仿真结果的合理性,针对统计特性的仿真试验则验证了混合模型方法的优越性。

## 参考文献:

- [1] Abraham D A, Lyons A P. Simulation of Non-Rayleigh Reverberation and Clutter[J]. IEEE J. Oceanic Eng., 2004, 29(2): 347- 362.
- [2] 徐新盛,张燕,李海森,等. 海底混响仿真研究[J]. 声学学报,1998,23(2): 141- 148.
- [3] 蔡平,梁国龙,葛凤翔,等. 界面混响信号的仿真研究[J]. 哈尔滨工程大学学报,2000, 21(4): 31- 35.
- [4] Abraham D A, Lyons A P. Novel Physical Interpretations of K-distributed Reverberation[J]. IEEE J. Oceanic Eng., 2002,27(4): 800- 813.
- [5] LePage K D. Statistics of Broad-band Bottom Reverberation Predictions in Shallow-water Waveguides[J]. IEEE J. Oceanic Eng., 2004, 29(2): 330- 346.
- [6] 杨俊岭,黄晓斌,万建伟. 基于高斯序列乘积和的相干非高斯分布杂波模拟新方法[J]. 国防科技大学学报,2006, 28(5): 58- 62.

(上接第72页)

## 参考文献:

- [1] 刘福才,梁晓明. H non 混沌系统的广义预测控制与同步快速算法[J]. 物理学报,2005, 54(10): 4584- 4589.
- [2] 李丽香,彭海朋,卢辉斌,等. H non 混沌系统的追踪控制与同步[J]. 物理学报,2001, 50(4): 629- 632.
- [3] 王兴元,武相军. 不确定 Chen 系统的参数辨识与自适应同步[J]. 物理学报,2006, 55(2): 605- 609.
- [4] 贺明峰,穆云明,赵立中. 基于参数自适应控制的混沌同步[J]. 物理学报,2000, 49(5): 830- 832.
- [5] 关新平,彭海朋,李丽香,等. Lorenz 混沌系统的参数辨识与控制[J]. 物理学报,2001, 50(1): 26- 29.
- [6] 戴栋,马西奎,李富才,等. 一种基于遗传算法的混沌系统参数估计方法[J]. 物理学报,2002, 51(1): 2459- 2462.
- [7] 李丽香,彭海朋,杨义先,等. 基于混沌蚂蚁群算法的 Lorenz 混沌系统的参数估计[J]. 物理学报,2007, 56(1): 51- 55.
- [8] 黄思训,伍荣生. 大气科学中的数学物理问题[M]. 北京: 气象出版社,2001: 411- 412.
- [9] Gilks W R, Richardson S, Spiegelhalter D J. Markov Chain Monte Carlo in Practice [M]. London: Chapman & Hall, 1996.
- [10] 张金槐. 多层验前正态总体动态参数的 Bayes 融合估计[J]. 国防科技大学学报,2003,25(4): 97- 101.
- [11] 李鹏波,谢红卫,张金槐. 考虑验前信息可信度时的 Bayes 估计[J]. 国防科技大学学报,2003,25(4): 107- 110.
- [12] 王同权,张若棋,沈永平,等. 高能离子在材料中输运的蒙特卡罗模拟[J]. 国防科技大学学报,2001, 23(1): 105- 109.
- [13] 王同权,张树发,王尚武,等. 电子在材料中输运的蒙特卡罗模拟[J]. 国防科技大学学报,2000, 22(11): 81- 84.
- [14] Smith A F M, Robert G O. Bayesian Computation Via the Gibbs Sampler and Related Markov Chain Monte Carlo Methods[J]. Journal of Royal Statistical Society Series B,1993, 55: 3- 23.
- [15] Tierney L. Markov-chains for Exploring Posterior Distributions[J]. Annals of Statistics,1994,22: 1701- 1762.
- [16] Haario H, Saksman E, Tamminen J. An Adaptive Metropolis Algorithm[J]. Bernoulli,2001, 7(2): 223- 242.