

文章编号: 1001- 2486(2010) 02- 0103- 06

AWGN 信道下线性分组码的差错概率下界分析*

许拔¹, 何英亮², 杨少华³, 张仲明¹, 张尔扬¹(1. 国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073; 2. 湖南大学 计算机与通信学院, 湖南 长沙 410082;
3. 中国人民解放军 92665 部队, 湖南 慈利 427200)

摘要: 提出了一种线性分组码的最大似然译码(ML-decoding) 差错概率下界的计算方法。差错概率的下界优化实质上是对联合事件概率下界的优化, 算法结合改进的 Dawson-Sankoff 界的优化准则, 提出了 AWGN 信道下线性分组码差错冗余事件的判决准则, 得到了误码率下界的计算表达式。该表达式只依赖码字的 Hamming 重量分布与信噪比, 较之类 de Caen's 界与类 KAT 界, 本算法得到的下界更紧, 计算量更低。针对 LDPC 等线性分组码的数值结果证明了算法的优越性能。

关键词: LDPC; 最大似然译码; Hamming 重量分布函数; KAT 界; 误码率

中图分类号: TN911. 22 文献标识码: A

Analysis of Lower Bound for the Error Probability of Linear Block Codes over the AWGN Channel

XU Ba¹, HE Ying-liang², YANG Shao-hua³, ZHANG Zhong-ming¹, ZHANG Er-yang¹

(1. Colleges of Electronics Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Colleges of Computer and Communication, Hunan University, Changsha 410082, China;

3. PLA Unit 92665, Cili 427200, China)

Abstract: A lower bound on the error rate of linear binary block codes (under maximum likelihood decoding) over BPSK-modulated AWGN channels is proposed in the current study. The essence of the optimization to the lower error rate bound is to optimize the lower bound on the union probability of finite events. Combined with the optimizing rule of the improved Dawson-sankoff bound, we obtain the judge rule of the redundant error events and obtain the calculation expression about lower bound of SER which solely depends on the Hamming weight enumerator function of the code and the signal-to-noise ratio (E_b/N_0). The algorithm can get the tighter lower bound and has lower complexity than the de Caen's kind bound and the KAT kind bound, which has been proved by the numerical results applying to LDPC codes and the others.

Key words: low density parity check codes; maximum likelihood decoding; Hamming weight enumerator function; kuai-alajai-takahara bound; symbol error rate

性能界的分析是一种不同于计算机仿真用来估计纠错码性能的方法: 对于给定参数(码率、码长等)的码字集合, 利用概率论与排列组合等知识能够推导出错误概率的上、下界关于信噪比的表达式; 或者对于特定的纠错码, 只需要知道码字的汉明重量分布(Hamming Weight Enumerator function, WEF)或输入-输出重量分布函数(IOWEF-Input-Output Weight Enumerator function)可以得到误码率或误比特率的上、下界。性能界的研究与分析一直以来备受学者的关注, 是理论分析码字性能、了解码字结构对性能影响的重要手段, 为好码的构造提供理论依据, 对于信息论与编码理论的发展具有重要意义。

对性能界的研究包括两个方面: 性能上界和性能下界, 本文主要针对下界进行研究。随着数学理论的发展, 利用联合概率事件的下界来估计码字的纠错性能受到越来越多的青睐^[1-5]。文献[4]将文献[9]提出的 de Caen's 不等式应用于二进制线性分组码的性能估计, 得到了 BPSK-modulated AWGN 信道下的误码率的下界, 该下界仅仅依赖于码字的 WEF, 当信噪比(E_b/N_0) 趋于无穷大时, 该性能界收敛于码

* 收稿日期: 2009- 09- 17

作者简介: 许拔(1981-), 男, 博士生。

字的联合上界(Union Upper Bound);文献[3]在文献[4]的基础上,通过在 de Caen's 不等式中引入优化函数,根据优化的参数的数目分为三种性能下界: norm bound、dot-product bound 和 Seguin's bound,而 Seguin's bound 是前两种界的特殊情况,也就是文献[4]得到的结果,因此文献[3]得到的 norm bound、dot-product bound 较之文献[4]得到的 Seguin's bound 更紧,性能更好。文献[10]提出了联合概率的 KAT 界,并证明了该下界比 de Caen 界^[9]与 Dawson & Sankoff 界^[11]更接近联合概率的真实值,为下界的发展指明了新的方向。文献[2]利用 KAT 界^[10]得到了 AWGN 信道下高阶调制的非编码信号的误码率与误比特率下界的表达式;文献[1]在文献[2]的基础上分析了 BPSK-modulated AWGN 信道下编码信号的性能,提出了两种简化的下界计算方法:LB-f 和 LB-s,两种算法在降低计算复杂度的同时,提高了性能估计的精度,其中,LB-f 仅利用最小 Hamming 重量码字的 WEF 和码字两两之间乘积的重量分布;LB-s 只需知道码的 WEF。

目前,基于联合概率下界的研究主要沿两方面进行:(1)在已有的界的基础上简化算法实现的复杂度,满足基于图论的现代编码理论发展的需要,拓展现有性能下界在长码、高码率中的应用;(2)深化概率论的理论研究,发现新的更紧的下界,并将其应用于编码调制信道中,推导出误码率与误比特率的下界。根据思路(1),本文在文献[6]分析的基础上,提出了基于改进的 Dawson & Sankoff 界的 AWGN 信道下线性分组码差错冗余事件的判决准则,推导出误码率下界的计算表达式,并给出了针对 LDPC 码、Golay 码与 BCH 码的数值结果,验证了该下界的优异性能。

1 Dawson & Sankoff 界

1.1 传统的 Dawson & Sankoff 界

Dawson & Sankoff 界最早于 1967 年在文献[11]中提出,具体描述如下定理 1 所示。

定理 1 假设 A_1, A_2, \dots, A_N 是概率空间 (Ω, P) 上的有限事件集合,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) \geq \frac{(1-\theta)S_1^2}{2S_2 + (1-\theta)S_1} + \frac{\theta S_1^2}{2S_2 + (2-\theta)S_1} \quad (1)$$

其中: $S_1 \triangleq \sum_{i=1}^N P(A_i)$, $S_2 \triangleq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} P(A_i \cap A_j)$, $\theta \triangleq \frac{2S_2}{S_1} - \frac{2S_2}{S_1}$ 。

定理 1 中得到的 Dawson & Sankoff 界仅仅依赖于单个事件的概率和事件成对出现的联合概率;但当 N 很大时,计算复杂度仍然很大,文献[10]严格证明了该下界是 KAT 界的特例,性能不如 KAT 界紧。

1.2 Dawson & Sankoff 界的改进

为了简化 Dawson & Sankoff 界的计算,同时提高其性能,Hoppe 在文献[6]中通过理论与实例证明:通过移除满足优化准则的冗余事件可以提高联合概率的下界。这里以定理 2 的形式给出文献[6]的结果,相关证明详见文献[6]。

定理 2 假设 A_1, A_2, \dots, A_N 是概率空间 (Ω, P) 上的有限事件集合,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) \geq \max \left[\frac{[1-\theta(I)] \cdot S_1^2(I)}{2S_2(I) + [1-\theta(I)] \cdot S_1(I)} + \frac{\theta(I) \cdot S_1^2(I)}{2S_2(I) + [2-\theta(I)] \cdot S_1(I)} \right] \quad (2)$$

这里, $I \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, $S_1(I) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, $S_2(I) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I, j < i} P(A_i \cap A_j)$, $\theta(I) = \frac{2S_2(I)}{S_1(I)} - \frac{2S_2(I)}{S_1(I)}$ 。

其中,式(2)右边的最大值在 $I = I^*$ 时取得,而对于 $\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$, 当且仅当:

$$A_j \subseteq \bigcup_{i \in I^*} A_i; \quad P(A_j) - \frac{1}{K} \cdot \sum_{i \in I^*} P(A_j \cap A_i) < 0 \quad (3)$$

成立时, $A_j \notin A_{I^*}$ 。这里有: $A_{I^*} \triangleq \{A_i \mid i \in I^*\}$, $K \triangleq 1 + \frac{2S_2(A_{I^*} \cup A_j)}{S_1(A_{I^*} \cup A_j)}$ 。

式(3)即为去除冗余事件的优化准则,通过判断该式是否成立来决定是否从 I^* 中移除当前事件。因此根据式(2)能得到更紧的下界,同时简化了下界计算的复杂度。

2 基于改进 Dawson & Sankoff 界的差错概率下界分析

线性分组码码长 N , 编码后码字个数为 M , 经 BPSK 调制后形成 M 个等能量的信号 s_0, s_1, \dots, s_{M-1} 。假设 s_t 经 AWGN 信道传输后, 接收的信号为 R , s_0, s_1, \dots, s_{M-1} 与 R 均为 N 维矢量, 有

$$R = s_t + n \quad (4)$$

n 为 N 维随机变量, 各分量为相互独立的、均值为 0、方差为 $N_0/2$ 的高斯随机变量。接收端采用最大似然译码 (ML) 算法将 R 译成与其欧氏距离最短的信号。因此, 在传送 s_t 的条件下发生译码错误的概率为

$$P(\varepsilon | s_t) = \Pr\left[\bigcup_{\substack{i=0 \\ i \neq t}}^{M-1} \varepsilon_i | s_t\right] \quad (5)$$

其中: $\varepsilon_i \triangleq \{R | \|R - s_i\| \leq \|R - s_t\|\}$, 即欧氏空间中距离 s_i 比 s_t 近接收矢量集合; $\|\cdot\|$ 表示信号之间的欧氏距离。

文献[7]的 Proposition 1 指出: 在对称无记忆信道中, 线性分组码的条件译码错误概率与传输的码字无关, 即: $P(\varepsilon | s_t) = P(\varepsilon | s_i) = P(\varepsilon | s_0)$ ($i, t \neq 0; i \neq t$), 证明可参考文献[7]的 Appendix B。因此,

$$P(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{M-1} P(\varepsilon | s_i) \times P(s_i) = P(\varepsilon | s_0) \cdot \left[\sum_{i=0}^{M-1} P(s_i)\right] = P(\varepsilon | s_0) = \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{M-1} \varepsilon_i | s_0\right] \quad (6)$$

其中, s_0 表示全 0 码字经 BPSK 调制后对应的信号; $\sum_{i=0}^{M-1} P(s_i) = 1$ 。

2.1 基于传统 Dawson & Sankoff 界的误码率下界推导

在式 (1) 中, 令: $A_i \triangleq \varepsilon_{0i} = \{R | \|R - s_i\| \leq \|R - s_0\|\}$, $A_i \cap A_j \triangleq \varepsilon_{0i} \cap \varepsilon_{0j} = \{R | \|R - s_i\| \leq \|R - s_0\|, \|R - s_j\| \leq \|R - s_0\|\}$, 则

$$P(\varepsilon) = \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{M-1} \varepsilon_{0i} | s_0\right] = \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{M-1} A_i\right] \quad (7)$$

而根据文献[4]可知

$$P(A_i) = Q\left(\frac{\|s_i - s_0\|}{\sqrt{2N_0}}\right); \quad P(A_i \cap A_j) = \Psi\left(\rho_j, \frac{\|s_i - s_0\|}{\sqrt{2N_0}}, \frac{\|s_j - s_0\|}{\sqrt{2N_0}}\right) \quad (8)$$

其中,

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2/2) dt; \quad \rho_j = \frac{\langle s_i - s_0, s_j - s_0 \rangle}{\|s_i - s_0\| \cdot \|s_j - s_0\|} \quad (9)$$

$$\Psi(\rho, x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \cdot \int_x^\infty \int_y^\infty \exp\left[-\frac{t^2 - 2\rho ts + s^2}{2(1-\rho^2)}\right] dt ds$$

又由 BPSK 调制原理知

$$\|s_i - s_0\| = 2 \sqrt{E_s \cdot w(c_i)}; \quad \langle s_i - s_0, s_j - s_0 \rangle = 2E_s \cdot \left(w(c_i) + w(c_j) - w(c_i \dot{\vee} c_j)\right) \quad (10)$$

其中“ $\dot{\vee}$ ”表示“异或”运算。根据式(9)、(10)有: $\rho_j = \frac{w(c_i \leftarrow c_j)}{\sqrt{w(c_i)} \cdot \sqrt{w(c_j)}}$, “ \leftarrow ”表示对应元素相乘, 故有

$$\rho_j \leq \delta_j \triangleq \min\left\{\frac{w(c_i \leftarrow c_j)}{\sqrt{w(c_i)} \cdot \sqrt{w(c_j)}}, \frac{w(c_i) + w(c_j) - D_{\min}}{2 \sqrt{w(c_i)} \cdot \sqrt{w(c_j)}}\right\} \quad (11)$$

其中, D_{\min} 表示码字的最小汉明距离, 对线性码而言, 也代表了码字的最小汉明重量。

综合式(1)与式(7)~(11)知

$$P(\varepsilon) \geq \frac{(1-\theta) \cdot \left[\sum_{i \neq 0} B_i \cdot Q\left(\frac{\sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}}{\sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}}\right)\right]^2}{\sum_{i \neq 0} \left\{ (B_i - 1) \cdot \Psi\left(\rho_i, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}\right) + \sum_{j \neq 0, i} B_j \cdot \Psi\left(\rho_j, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}, \sqrt{2j \cdot \frac{E_s}{N_0}}\right) \right\} + (1-\theta) \cdot \left[\sum_{i \neq 0} B_i \cdot Q\left(\sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}\right)\right]^2}$$

$$+ \frac{\theta \cdot \left[\sum_{i \neq 0} B_i \cdot Q \left(\sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) \right]^2}{\sum_{i \neq 0} \left\{ (B_i - 1) \cdot \Psi \left(\rho_i, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) + \sum_{j \neq 0, i} B_j \cdot \Psi \left(\rho_j, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}, \sqrt{2j \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) \right\} + (2 - \theta) \cdot \left[\sum_{i \neq 0} B_i \cdot Q \left(\sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) \right]} \quad (12)$$

其中, $B_i = |\{c \mid c \in C, w(c) = i\}|$, 即 Hamming 重量等于 i 的码字个数, 且

$$\theta = \frac{\sum_{i \neq 0} \left\{ (B_i - 1) \cdot \Psi \left(\rho_{ii}, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) + \sum_{j \neq 0, i} B_j \cdot \Psi \left(\rho_j, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}, \sqrt{2j \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) \right\}}{\sum_{i \neq 0} B_i \cdot Q \left(\sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right)} - \frac{\sum_{i \neq 0} \left\{ (B_i - 1) \cdot \Psi \left(\rho_i, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) + \sum_{j \neq 0, i} B_j \cdot \Psi \left(\rho_j, \sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}}, \sqrt{2j \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) \right\}}{\sum_{i \neq 0} B_i \cdot Q \left(\sqrt{2i \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right)} \quad (13)$$

式(12)得到的误码率的下界不仅需要知道码字的 WEF, 还需知道码字两两之间乘积的重量分布。用式(11)中的 δ_j 代替 ρ_j , 误码率下界可由码字的 WEF 完全决定。文献[4]中利用 Hermite 多项式与偏微分证明了函数 $\Psi(\rho, x, y)$ 是参数 ρ 的递增函数, 故上述替代导致式(12)分母变大, 从而使式(12)右边变小, 误码率的下界变小, 下界性能变差。

2.2 基于改进 Dawson & Sankoff 界的误码率下界推导

根据定理 2 知, 改进 Dawson & Sankoff 界的关键是判断概率事件是否满足优化条件, 即是否满足式(3)。如果满足, 则当前事件将被去除; 否则, 当前事件将被保留, I^* 中加入当前事件将改善下界的性能。为了有效利用改进的 Dawson & Sankoff 界推导误码率的下界, 首先初始化: $I^*(0) = \{i \mid w(c_i) = D_{\min}\}$, 即所有 Hamming 重量最小的码字组成的集合; 同时, 还需推导出对应的优化准则, 假设当前事件 $A_j = \varepsilon_{0j} = \{R \mid \|R - s_j\| \leq \|R - s_0\|\}$, 而信号 s_j 对应的码字 c_j 的 Hamming 重量为 $w(c_j)$, 则式(3)转化为

$$Q \left(\sqrt{2w(c_j) \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) - \frac{1}{K} \cdot \sum_{i \in I^*} \Psi \left(\delta_j, \sqrt{2w(c_i) \cdot \frac{E_s}{N_0}}, \sqrt{2w(c_j) \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) < 0 \quad (14)$$

即: 当式(14)满足时, $A_j \notin A_{I^*}$, 其中, $A_{I^*} \triangleq \{A_i \mid i \in I^*\}$; $K \triangleq 1 + \frac{2S_2(A_{I^*} \cup A_j)}{S_1(A_{I^*} \cup A_j)}$ 。

上式中计算 K 的关键是计算 $S_1(A_{I^*} \cup A_j)$ 与 $S_2(A_{I^*} \cup A_j)$, 由定理 2 中对两者的定义可以很容易得出

$$\begin{cases} S_1(A_{I^*} \cup A_j) = Q \left(\sqrt{2w(c_j) \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) + S_1(A_{I^*}) \\ S_2(A_{I^*} \cup A_j) = \sum_{i \in I^*} \Psi \left(\delta_j, \sqrt{2w(c_i) \cdot \frac{E_s}{N_0}}, \sqrt{2w(c_j) \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right) + S_2(A_{I^*}) \end{cases} \quad (15)$$

在已知 $S_1(A_{I^*})$ 与 $S_2(A_{I^*})$ 的前提下, 根据式(15)能够很快地求出 $S_1(A_{I^*} \cup A_j)$ 与 $S_2(A_{I^*} \cup A_j)$, 因此可以很容易判断出式(14)是否满足, 而式(14)也就是差错冗余事件的判断准则。

结合 2.1 小节与上面的分析, 得到基于改进 Dawson & Sankoff 界的误码率下界算法, 其具体步骤如表 1 所示。

3 数值结果与分析

为了验证基于改进 Dawson & Sankoff 界的误码率下界的性能, 分别针对 Regular-LDPC (128, 3, 4)、BCH(63, 10) 和 Golay(23, 12) 对各种界的性能进行了对比, 其中: Regular-LDPC(128, 3, 4) 的构造来自 David J. C. Mackay 的主页^[12], 后两种码均出自文献[1]。

表 1 基于改进 Dawson & Sankoff 界的误码率下界算法

Tab. 1 Algorithm of the lower bound on SER based on the improved Dawson & Sankoff bound

(1) 初始化 $I^* : I^*(0) = \{i w(c_i) = D_{\min}\}$, 令迭代次数 $l = 0$, 并计算 $S_1(A_I^*)$ 与 $S_2(A_I^*)$: $S_1(A_I^*(0)) = B_{D_{\min}} \times Q \left[\sqrt{2D_{\min} \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right]; \quad S_2(A_I^*(0)) = B_{D_{\min}} (B_{D_{\min}} - 1) \times \Psi \left[1, \sqrt{2D_{\min} \cdot \frac{E_s}{N_0}}, \sqrt{2D_{\min} \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right] \Big 2$ $= B_{D_{\min}} (B_{D_{\min}} - 1) \times Q \left[\sqrt{2D_{\min} \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right] \Big 2$
(2) 选取剩余码字中 Hamming 重量最小的 c_j 对应的 A_j 进行考虑, 根据式 (15) 计算 $S_1(A_I^*(l) \cup A_j)$ 与 $S_2(A_I^*(l) \cup A_j)$, 并判断式 (14) 是否满足: ① 如果满足, 则 $A_j \in A_I^*$, $I^*(l+1) = I^*(l)$, $S_1(A_I^*(l+1)) = S_1(A_I^*(l))$, $S_2(A_I^*(l+1)) = S_2(A_I^*(l))$, $l = l + 1$, 并转步骤 (3); ② 否则, $A_j \in A_I^*$, $I^*(l+1) = I^*(l) \cup \{j\}$, 并对 $S_1(A_I^*(l+1))$ 与 $S_2(A_I^*(l+1))$ 重新进行赋值: $S_1(A_I^*(l+1)) = S_1(A_I^*(l) \cup A_j); \quad S_2(A_I^*(l+1)) = S_2(A_I^*(l) \cup A_j)$ 同时令 $l = l + 1$, 并转步骤 (3);
(3) 判断所有事件是否处理完毕, 如果尚未完成, 则转步骤 (2); 否则, 转步骤 (4);
(4) 计算 $\theta(I^*(l)) = \frac{2S_2(A_I^*(l))}{S_1(A_I^*(l))} - \frac{2S_2(A_I^*(l))}{S_1(A_I^*(l))} - 1$, 并通过下式得到误码率下界: $P(\varepsilon) = \Pr \left[\bigcup_{i=1}^{M-1} \varepsilon_{0i} \mid s_0 \right] = P \left(\bigcup_{i=1}^N A_i \right)$ $\geq \frac{[1 - \theta(I^*(l))] \cdot S_1^2(A_I^*(l))}{2S_2(A_I^*(l)) + [1 - \theta(I^*(l))] \cdot S_1(A_I^*(l))} + \frac{\theta(I^*(l)) \cdot S_1^2(A_I^*(l))}{2S_2(A_I^*(l)) + [2 - \theta(I^*(l))] \cdot S_1(A_I^*(l))}$

图 1 给出了针对 Regular-LDPC (128, 3, 4) 码的数值结果, 分别画出了文献 [1] 中提出的 LB-S 下界、文献 [4] 的 Seguin's Bound、本文所提出的下界与 Union Upper Bound 的性能曲线, 为了进一步判断本文所提下界的性能, 同时给出了和积译码算法的仿真结果(迭代次数设为 50)。从图中可以看出, 在图中所示的信噪比 (E_b/N_0) 范围内: $[-1, 5]$ (单位: dB), 本文提出的下界比 LB-S 下界和 Seguin's Bound 性能更紧, 得到的 SER 更接近迭代译码算法仿真获得的结果, 与 Union Upper Bound 的距离更近; 并且当信噪比增大时, 上述三种下界趋于 Union Upper Bound, 与文献 [4] 中 Section V 证明的结果相一致。

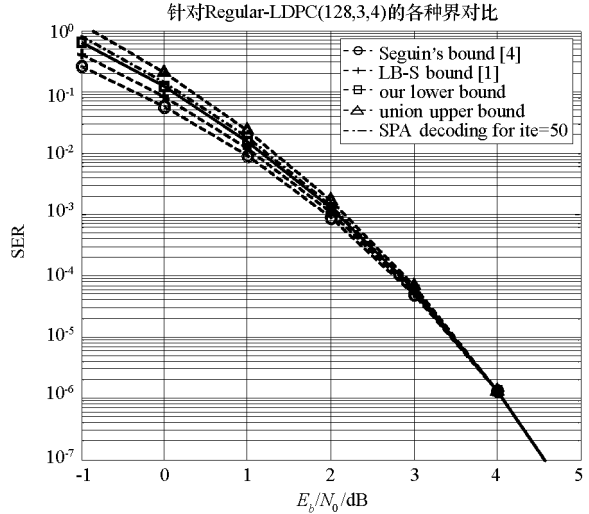


图 1 针对 Regular-LDPC (128, 3, 4) 的各种界对比
 Fig. 1 Comparison of various bounds applying to Regular-LDPC(128, 3, 4)

图 2 针对 Golay (23, 12) 码, 比较了文献 [3] 提出的 norm bound、dot-product bound 和本文提出的下界的性能。在低信噪比时, 因为表 1 算法中 I^* 包含的事件数较少, 本文得到的下界比 dot-product bound 稍低, 性能稍差; 而随着信噪比的增加, 性能很快超过 dot-product bound, 这从图 2 (b) 的放大图中可以看出, 本文的下界在 dot-product bound 的上方; 同时, 从图 2 (a) 还可以看出, 信噪比在 $[-1, 8]$ 的范围内, 本文所提下界的性能均优于 norm bound; 从图 2 还看出本文下界的性能与译码仿真的结果相距不大, 特别是在高信噪比时性能趋于译码仿真所得的结果。

针对 BCH (63, 10) 码, 分别从 SER、运行时间、被选事件集合中最大的 Hamming 重量、被选集合中 Hamming 重量为 S_{\max} 的码字个数 $B_{S_{\max}}(I_1)$ 四个方面对 LB-S Bound 与本文下界进行了对比, 如表 2 所示。从表中可以看出, 本文下界的性能优于 LB-S Bound, SER 更高; 同时, 运行时间缩短, 特别是当信噪比较

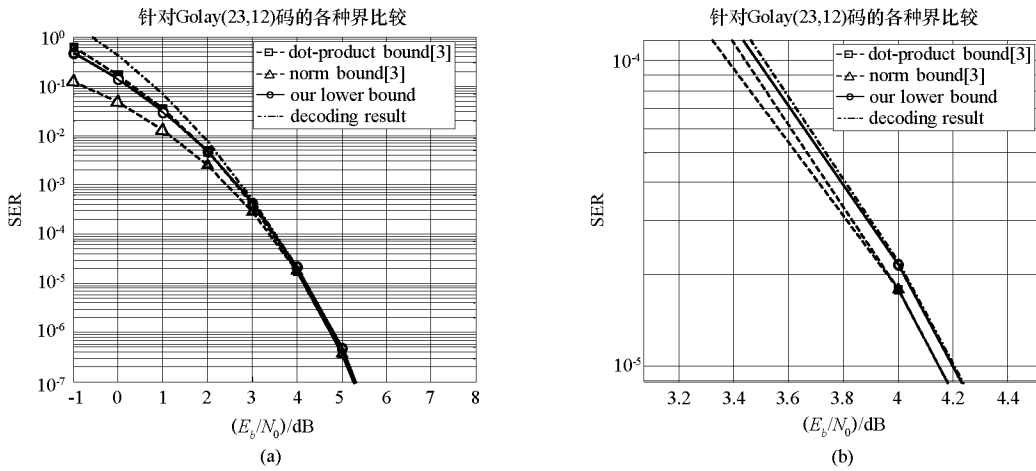


图2 针对 Golay(23, 12) 的各种界对比
Fig. 2 Comparison of various bounds applying to Golay(23, 12)

大时, 被选事件集合的范围变大, 运算速度的优势更明显。除了信噪比在 4dB 处, 两者的集合大小不同外, 其它情况下集合完全相同。

表2 针对 BCH(63, 10) 码的性能对比(本文下界 VS LB-S bound[1])

Tab. 2 Performance comparison between our lower bound and LB-S bound applying to BCH(63, 10)

E_b/N_0 (dB)	2	4	8	
LB-S Bound [1]	$\max_{weight} S_{max} B_{S_{max}}(I_1)$ SER run time	27 196 3. 868599e- 03 4. 1s	28 206 1. 832994e- 04 6. 6s	36 196 2. 762258e- 11 9. 2s
Our Lower Bound	$\max_{weight} S_{max} B_{S_{max}}(I^*)$ SER run time	27 196 5. 985969e- 03 3. 1s	28 252 6. 39193e- 04 4. 5s	36 196 9. 63548e- 11 7. 3s

4 结束语

本文在文献[6] 的基础上提出了 AWGN 信道下线性分组码差错概率事件冗余的判断准则, 推导了 SER 下界的表达式, 对 LDPC、BCH、Golay 等码的数值结果证明: 该下界较之类 de Caen's 界与类 KAT 界更紧, 计算量更小, 运行速度更快。

参考文献:

[1] Behnamfar F, Alajaji F, Linder T. Improved Lower Bounds for the Error Rate of Linear Block Codes [C]// Proceedings 43rd Allerton Conference on Control, Computing and Communications, Monticello, Illinois, USA, 2005: 2227- 2236.
 [2] Kuai H, Alajaji F, Takahara G. Tight Error Bounds for Nonuniform Signaling over AWGN Channels [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2000, 46 (7): 2712- 2718.
 [3] Cohen A, Meharav N. Lower Bounds on the Error Probability of Block Codes Based on Improvements on de Caen's Inequality [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2004, 50(2): 290- 310.
 [4] Seguin G E. A Lower Bound on the Error Probability for Signals in White Gaussian Noise [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1998, 44(7): 3168 - 3175.
 [5] Sason I, Shamai S. Performance Analysis of Linear Codes Under Maximum-Likelihood Decoding: A Tutorial [M]. Foundations and Trends in Communications and Information Theory, 2006, 3(1- 2): 1- 222.
 [6] Hoppe F M. The Effect of Redundancy on Probability Bounds [J]. Discrete Mathematics, 2009: 123- 127.
 [7] Hof E, Sason I, Shamai S. Performance Bounds for Nonbinary Linear Block Codes over Memoryless Symmetric Channels [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2009, 55(3): 977- 996.
 [8] McEliece R J. How to Compute Weight Enumerators for Convolutional Codes [M]. Communications and Coding, 1998: 121- 141.
 [9] de Caen D. A Lower Bound on the Probability of a Union [J]. Discrete Mathematics, 1997, 169: 217- 220.
 [10] Kuai H, Alajaji F, Takahara G. A Lower Bound on the Probability of a Finite Union of Events [J]. Discrete Mathematics, 2000, 215: 147- 158.
 [11] Dawson D A, Sankoff D. An Inequality for Probabilities [C]// Proc. Amer. Math. Soc., 1967, 18: 504- 507.
 [12] Mackay D J C. [http:// www. inference. phy. cam. ac. uk/ mackay/ CodesFiles. html](http://www.inference.phy.cam.ac.uk/mackay/CodesFiles.html) [EB], 2008.