

文章编号: 1001- 2486(2010) 03- 0075- 07

基于降低运算复杂度的子空间跟踪算法稳健性分析*

钱林杰^{1,2}, 程 翥¹, 石斌斌¹, 万建伟¹

(1. 国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073; 2. 重庆通信学院, 重庆 400030)

摘要: FDPM 和 FOOJA 是目前两种最为有效的适用于主、次子空间跟踪的方法, 属于低复杂度算法。进一步降低算法运算复杂度, 对保证算法的实时性具有非常重要的意义。以降低算法运算复杂度为背景, 通过对 FDPM、FOOJA 算法的分析, 指出存在两种简化运算量的 FDPM _1st_col、FOOJA _1st_col 方法。在有限精度运算条件下, 对四种方法的稳定性、数值鲁棒性进行了深入分析和讨论。通过实验仿真, 对分析的结论进行了验证。

关键词: 子空间跟踪; 运算复杂度; 鲁棒性; 稳定性; 标准正交

中图分类号: TN911. 72 **文献标识码:** A

Stability and Robustness Analysis for Subspace Tracking Based on Reducing Computational Complexity

QIAN Lin-jie^{1,2}, CHENG Zhu¹, SHI Bin-bin¹, WAN Jian-wei¹

(1. College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Chongqing Communication Institute, Chongqing 400030, China)

Abstract: FDPM and FOOJA, which belong to the low complexity class, are the most efficient algorithms for principal or minor subspace tracking. Reducing computational cost is crucial for guaranteeing the real time implementation. Under lower computational complexity background, it was found that there exist two other simplified methods (FDPM _1st_col and FOOJA _1st_col) through analysis of FDPM and FOOJA. Under the finite word length condition, the stability and numerical robustness were analyzed and compared with the former two algorithms. Simulation results verified our conclusion.

Key words: subspace tracking; computational complexity; robustness; stability; orthonormality

子空间分析广泛应用于通信、自适应滤波、到达角估计、阵列天线处理等许多信息处理领域。目前许多子空间跟踪算法依据运算复杂度对算法进行分类。假设 N 表示天线阵列个数, L 表示我们感兴趣的子空间维数, 通常满足 $L \ll N$, 算法运算复杂度为 $O(N^2)$ 或 $O(N^2L)$, 称为高复杂度算法; 运算复杂度为 $O(NL^2)$, 称为中等复杂度算法; 运算复杂度为 $O(NL)$, 称为低复杂度算法。

本文重点关注 DPM 类^[1]、OJA 类^[2]算法, 其中最具代表的是适用于主、次子空间跟踪, 属于低复杂度的 FDPM 算法^[3]和 FOOJA 算法^[4]。在对 DPM 类、OJA 类算法分析的基础上, 以降低算法运算复杂度为前提, 指出存在两种简化运算量的 FDPM _1st_col、FOOJA _1st_col 方法。考虑有限精度运算带来的舍入误差累积以及算法的跟踪性能, 对 FDPM、FOOJA、FDPM _1st_col、FOOJA _1st_col 四种方法的鲁棒性和稳定性进行分析, 并得出一些有益的结论。通过实验仿真验证了文中的分析结论。

1 DPM 类、OJA 类子空间跟踪算法

子空间跟踪主要用于实时信号处理, 所以自适应子空间跟踪算法的运算复杂度以及数值的稳健性是算法有效性的关键^[5-8]。基于子空间跟踪的自适应信号处理, 假设一系列 $N \times 1$ 维随机观测数据矢量 $x(i)$, 其协方差矩阵为 $R = E[x(i)x^H(i)]$, 其中上标 H 表示共轭转置。通过 L 维 ($L < N$) 观测数据矢

* 收稿日期: 2009- 04- 07

基金项目: 国家部委资助项目(41901140401)

作者简介: 钱林杰(1970—), 男, 博士生。

量,形成协方差矩阵的 L 个特征值张成的子空间。

DPM 类算法更新公式可以表示为 $T(i) = w(i) \pm \beta x(i) r^H(i)$, OJA 类算法更新公式可以表示为 $T(i) = w(i) \pm \beta p(i) r^H(i)$, 采用 Householder 反射^[9] 实现正交化过程, 再对子空间基各列标准化, 就形成 FDPM 算法和 FOOJA 算法, 其中 $\beta \geq 0$ 表示步长因子, w 表示 $N \times L$ 维跟踪子空间基, $p(i) = x(i) - w(i) r(i)$ 。FDPM 算法运算量包括 $6NL + 3L$ 次乘法, $6NL$ 次加法, $L + 1$ 次除法和 $L + 1$ 次平方根运算, FOOJA 算法运算量包括 $7NL + 4L$ 次乘法, $6NL$ 次加法, $L + 1$ 次除法和 $L + 1$ 次平方根运算, 两者均属于低复杂度算法。

Householder 反射^[9] H_n 可以描述为

$$H_n = I_L - \frac{2}{\|\alpha(i)\|^2} \alpha(i) \alpha^H(i) \quad (1)$$

令 $Z(i) = T(i) H_n$, 对 FDPM 算法有

$$\begin{aligned} Z^H(i) Z(i) &= H_n^H [w(i) \pm \beta x(i) r^H(i)]^H [w(i) \pm \beta x(i) r^H(i)] H_n \\ &= I_L \pm 2\beta H_n^H r(i) r^H(i) H_n + \beta^2 H_n^H r(i) \|x(i)\|^2 r^H(i) H_n \\ &= I_L + (\pm 2\beta + \beta^2 \|x(i)\|^2) \|r(i)\|^2 e_1 e_1^H \\ &= I_L + \delta_1(i) \|r(i)\|^2 e_1 e_1^H \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\delta_1(i) = (\pm 2\beta + \beta^2 \|x(i)\|^2)$ 。

对 FOOJA 算法则有

$$\begin{aligned} Z^H(i) Z(i) &= H_n^H [w(i) \pm \beta p(i) r^H(i)]^H [w(i) \pm \beta p(i) r^H(i)] H_n \\ &= I_L \pm \beta H_n^H w^H(i) p(i) r^H(i) H_n \pm \beta H_n^H r(i) p^H(i) w(i) H_n + \beta^2 \|p(i)\|^2 \|r(i)\|^2 e_1 e_1^H \\ &= I_L + \beta^2 \|p(i)\|^2 \|r(i)\|^2 e_1 e_1^H \\ &= I_L + \delta_2(i) \|r(i)\|^2 e_1 e_1^H \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\delta_2(i) = \beta^2 \|p(i)\|^2$ 。

式(2)、式(3)具有完全相同的表示形式, 且均为对角矩阵, 说明 Householder 反射作用于子空间基保持了子空间基的正交性, 并且子空间基的数值变化仅发生在第一列上。这就意味着, 在随后进行的标准正交化过程中, 似乎我们只需对 $T(i) H_n$ 的第一列实施标准化处理, 就可以完成算法的一次迭代运算过程, 这样可减少 $2NL$ 次乘法、 $(N-1)L$ 次加法、 L 次除法、 L 次平方根运算。

2 FDPM、FOOJA 算法数值稳健性分析

2.1 FDPM 算法数值稳健性分析

FDPM 算法流程如表 1 所示。

表 1 FDPM 算法流程

Tab. 1 Steps of the FDPM algorithm

1.	$y(i) = W^H(i-1) r(i)$
2.	$T(i) = W(i-1) \pm \frac{\beta}{\ r(i)\ ^2} r(i) y^H(i)$
3.	$\alpha(i) = y(i) - \ y(i)\ e^{j \angle \alpha(i)} e_1$
4.	$Z(i) = T(i) - \frac{2}{\ \alpha\ ^2} [T(i) \alpha(i)] \alpha^H(i)$
5.	$D(i) = (\text{diag}(Z^H(i) Z(i)))^{-1/2}$
6.	$W(i) = Z(i) D(i)$

在理想情况下, $w^H(i) w(i) = I_L$, 根据 FDPM 算法流程, 可以得到

$$\begin{aligned} w^H(i) w(i) &= D(i) Z^H(i) Z(i) D(i) \\ &= D(i) [H_n(i) [w(i-1) - \frac{\beta}{\|r(i)\|^2} r(i) y^H(i)]^H [w(i-1) - \frac{\beta}{\|r(i)\|^2} r(i) y^H(i)] H_n(i)] D(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{D}(i) [\mathbf{H}_n(i) \mathbf{w}^H(i-1) \mathbf{w}(i-1) \mathbf{H}_n(i) - \frac{2\beta}{\|\mathbf{r}(i)\|^2} \|\mathbf{y}(i)\|^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^H + \frac{\beta^2}{\|\mathbf{r}(i)\|^2} \|\mathbf{y}(i)\|^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^H] \mathbf{D}(i) \\
&= \mathbf{D}(i) [\mathbf{H}_n(i) \mathbf{w}^H(i-1) \mathbf{w}(i-1) \mathbf{H}_n(i) - \frac{(2\beta - \beta^2)}{\|\mathbf{r}(i)\|^2} \|\mathbf{y}(i)\|^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^H] \mathbf{D}(i) \quad (4)
\end{aligned}$$

在有限精度条件下, 考虑到舍入误差的影响, 令 $\mathbf{w}^H(i) \mathbf{w}(i) = \mathbf{I}_L + \boldsymbol{\varepsilon}(i)$, 则

$$\boldsymbol{\varepsilon}(i) = \mathbf{D}(i) [\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) + \mathbf{I}_L - \frac{(2\beta - \beta^2)}{\|\mathbf{r}(i)\|^2} \|\mathbf{y}(i)\|^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^H] \mathbf{D}(i) - \mathbf{I}_L + \boldsymbol{\eta}(i) \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{\eta}(i)$ 表示第 i 步数值运算带来的有限精度误差。

(1) 若对 $\mathbf{Z}(i)$ 各列进行标准化, 则

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(i) &= \text{diag}\{\mathbf{w}^H(i) \mathbf{w}(i)\}^{-1/2} \\
\boldsymbol{\varepsilon}(i) &= \mathbf{D}(i) \{ \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) + \mathbf{I}_L - \frac{(2\beta - \beta^2)}{\|\mathbf{r}(i)\|^2} \|\mathbf{y}(i)\|^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^H - \text{diag}[\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) + \\
&\quad \mathbf{I}_L - \frac{(2\beta - \beta^2)}{\|\mathbf{r}(i)\|^2} \|\mathbf{y}(i)\|^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^H] \} \mathbf{D}(i) + \boldsymbol{\eta}(i) \quad (6)
\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{I}_L - \frac{(2\beta - \beta^2)}{\|\mathbf{r}(i)\|^2} \|\mathbf{y}(i)\|^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^H$ 为对角矩阵, 所以

$$\boldsymbol{\varepsilon}(i) = \mathbf{D}(i) \{ \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) - \text{diag}[\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i)] \} \mathbf{D}(i) + \boldsymbol{\eta}(i) \quad (7)$$

则 $\boldsymbol{\varepsilon}(i)$ 的对角元素仅包含本次迭代运算产生的舍入误差, 而没有累积误差存在。其原因在于每次迭代对 $\mathbf{Z}(i)$ 各列的标准化处理。因此, FDPM 算法对于主子空间和次子空间估计是稳健的、鲁棒的。

(2) 若只对第一列进行标准化处理, 则

$$\mathbf{D}(i) = \{ \text{diag}\{[\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) + \mathbf{I}_L - \frac{(2\beta - \beta^2)}{\|\mathbf{r}(i)\|^2} \|\mathbf{y}(i)\|^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^H]_{1,1}, 1, \dots, 1\} \}^{-1/2} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(i) = \mathbf{D}(i) \{ \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) - \{ \text{diag}[\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i)] \}_{1,1} \} \mathbf{D}(i) + \boldsymbol{\eta}(i) \quad (9)$$

其中下标 1, 1 表示取相应矩阵第一个元素。

上式说明 $\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i) \mathbf{H}_n(i)$ 矩阵对角线上第一个元素无累积误差。考虑在局部稳定状态条件下对次子空间跟踪问题, 投影误差能量满足 $\|\mathbf{w}\mathbf{w}^H - \mathbf{w}(i) \mathbf{w}(i)^H\|_F^2 \leq \zeta$, 其中 \mathbf{w} 表示真实的次子空间基, $\mathbf{w}(i)$ 表示根据输入数据矢量对次子空间基的跟踪, $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数。令 \mathbf{u} 表示主子空间基, 则有 $\mathbf{I} = \mathbf{w}\mathbf{w}^H + \mathbf{u}\mathbf{u}^H$, 相应地,

$$\|\mathbf{w}\mathbf{w}^H (\mathbf{w}\mathbf{w}^H + \mathbf{u}\mathbf{u}^H) - \mathbf{w}(i) \mathbf{w}(i)^H (\mathbf{w}\mathbf{w}^H + \mathbf{u}\mathbf{u}^H)\|_F^2 = \|(\mathbf{w}\mathbf{w}^H - \mathbf{w}(i) \mathbf{w}(i)^H) \mathbf{w}\mathbf{w}^H - \mathbf{w}(i) \mathbf{w}(i)^H \mathbf{u}\mathbf{u}^H\|_F^2 \leq \zeta \quad (10)$$

则

$$\|\mathbf{w}(i) \mathbf{w}(i)^H \mathbf{u}\mathbf{u}^H\|_F^2 \leq 2\zeta \quad (11)$$

令接收数据矢量 $\mathbf{r}(i) = \mathbf{s}(i) + \mathbf{n}(i)$, 其中 $\mathbf{s}(i)$ 属于主子空间分量, $\mathbf{n}(i)$ 则表示方差为 σ^2 噪声分量。存在

$$\frac{\|\mathbf{y}(i)\|^2}{\|\mathbf{r}(i)\|^2} = \frac{\mathbf{r}^H(i) \mathbf{w}(i-1) \mathbf{w}^H(i-1) \mathbf{r}(i)}{\mathbf{r}^H(i) \mathbf{r}(i)} \leq \|\mathbf{w}(i-1) \mathbf{w}(i-1)^H \mathbf{u}\mathbf{u}^H\|_F + \sigma^2 \leq 2\zeta + \sigma^2 \quad (12)$$

则

$$\mathbf{D}(i) = \{ \text{diag}\{[\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) + \mathbf{I}_L + O(\beta\sigma^2 + \beta\zeta)]_{1,1}, 1, \dots, 1\} \}^{-1/2} \quad (13)$$

又因为在局部稳定状态条件下, 满足 $\boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \ll 1$, 故

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}(i) &\approx \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) - \{ \text{diag}[\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i)]_{1,1} \} + \boldsymbol{\eta}(i) \\
&= \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T (\mathbf{e}_1^T \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) \mathbf{e}_1) + \boldsymbol{\eta}(i) \quad (14)
\end{aligned}$$

则

$$\text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}(i)) = [\mathbf{I}_L - (\mathbf{e}_1 \leftarrow \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_1^T \leftarrow \mathbf{e}_1^T)] [\mathbf{H}_n(i) \leftarrow \mathbf{H}_n(i)] \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}(i-1)) + \text{vec}(\boldsymbol{\eta}(i)) \quad (15)$$

假设 Q 是一大小为 k 的实对称矩阵, 其特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 为实数, x 为对应的长度为 k 的矢量, 则有^[9]: $\min\{\lambda\} = \inf_{x \neq 0} \frac{x^H Q x}{\|x\|^2} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{x^H Q x}{\|x\|^2} = \max\{\lambda\}$ 。因为 $H(i)$ 是特征值为 ± 1 的对称矩阵, 而 $A \leftarrow B$ 的特征值为 $\lambda(A)$ 和 $\gamma(B)$ 所有可能乘积, 其中 $\lambda(A)$ 、 $\gamma(B)$ 分别表示矩阵 A 和 B 的特征值。因此 $H_n(i) \leftarrow H_n(i)$ 的特征值为 ± 1 。则对于任一非零常数矢量 x , 有 $-1 \leq x^H H_n(i) \leftarrow H_n(i) x / \|x\|^2 \leq 1$ 。假设 $\eta(i)$ 均值为零, 且与 $\varepsilon(i-1)$ 不相关, 对 $\text{vec}(\varepsilon(i))$ 取一阶近似, 则

$$\text{vec}(\varepsilon(i)) = [I_{L^2} - (e_1 \leftarrow e_1)(e_1^T \leftarrow e_1^T)] \Psi \text{vec}(\varepsilon(i-1)) + \text{vec}(\eta(i)) \quad (16)$$

其中 $\Psi = E[H_n \leftarrow H_n]$ 表示对 $H_n \leftarrow H_n$ 取数学期望。则有 $-1 \leq x^H \Psi x / \|x\|^2 \leq 1$, 相应的 $-1 \leq \lambda_{\min}(\Psi) \leq \lambda_{\max}(\Psi) \leq 1$, 其中 $\lambda_{\min}(\Psi)$ 、 $\lambda_{\max}(\Psi)$ 表示 Ψ 的最小、最大特征值。

注意到 $I_{L^2} - (e_1 \leftarrow e_1)(e_1^T \leftarrow e_1^T)$ 为一对角矩阵, 除了第一个元素为零, 其余对角元素均为 1。这个矩阵是对称的, 且等于它的平方, 也就是说这是一个正交投影算子。意味着, 能够被分解为 VV^H , 其中 V 是 $L^2 \times (L^2 - 1)$ 的标准正交矩阵, 则 $\Psi = VV^H \Psi$, 即 $\Psi = (I_{L^2} - (e_1 \leftarrow e_1)(e_1^T \leftarrow e_1^T)) \Psi$ 。因为 VV^H 的秩是确定的, 所以矩阵 Ψ 的秩为 $L^2 - 1$, 即有一个特征值为 0。 V 是标准正交矩阵, 故其余 $L^2 - 1$ 特征值与 $V^H \Psi V$ 具有相同的特征值。则若 (γ, z_γ) 表示 $V^H \Psi V$ 的特征值和对应的特征值矢量, 那么 (γ, Vz_γ) 则是 Ψ 对应的特征值和特征矢量。

对于任一长度为 $L^2 - 1$ 的矢量 z , 矢量 $x = Vz$ 的长度为 L^2 , 而且由于 V 是标准正交矩阵, 则 $\|x\| = \|z\|$ 。因此根据 Courant-Fischer 极小极大定理^[9], 有

$$\lambda_{\min}(\Psi) = \inf_{x \neq 0} \frac{x^H \Psi x}{\|x\|^2} \leq \inf_{z, x \neq 0} \frac{x^H \Psi x}{\|x\|^2} = \inf_{z \neq 0} \frac{z^H V^H \Psi Vz}{\|z\|^2} = \lambda_{\min}(\Psi) \quad (17)$$

同理可以证明, $\lambda_{\max}(\Psi) \leq \lambda_{\max}(\Psi)$ 。则我们可以说在满足局部稳定状态的假设条件下, 当步长因子 β 取值较小时, $\text{vec}(\varepsilon(i))$ 的特征值均小于 1, 即此时只对第一列进行标准化的 FDPM 算法(FDPM_1st_col)具有数值稳健性。这说明 FDPM_1st_col 对于有限精度运算带来的误差累积具有一定的抗扰性, 当跟踪子空间基偏离标准正交误差 $\varepsilon(i)$ 较小时, FDPM_1st_col 仍然具有子空间跟踪能力。通过实验仿真我们看到, 当初始状态满足标准正交条件, 在机器运算精度误差范围内, FDPM_1st_col 具有与 FDPM 完全相似的性能, 并且当某一时刻跟踪子空间基突然变化, 但只要保持正交特性, FDPM_1st_col 仍能够重新建立子空间跟踪状态, 并保证正交收敛。

2.2 FOOJA 算法数值稳健性分析

对于 FOOJA 算法而言, 只需将 FDPM 算法流程中第二步变化为

$$T(i) = W(i) \pm \beta p(i) r^H(i) \quad (18)$$

其中: $p(i) = x(i) - w(i) r^H(i)$ 。则有

$$\begin{aligned} w^H(i) w(i) &= D(i) Z^H(i) Z(i) D(i) = D(i) \{H_n(i) [w(i-1) - \beta p(i) y^H(i)]^H [w(i-1) - \beta p(i) y^H(i)] \\ &\quad H_n(i)\} D(i) \\ &= D(i) \{H_n(i) w^H(i-1) w(i-1) H_n(i) + \beta \|y(i)\|^2 e_1 e_1^H + \beta [H_n(i) w^H(i-1) w(i-1) y(i) \\ &\quad y^H(i) H_n(i) + H_n(i) y(i) y^H(i) w^H(i-1) w(i-1) H_n(i)]\} D(i) \end{aligned} \quad (19)$$

其中: $\rho = -2\beta + \beta^2 \|p(i)\|^2$ 。令 $w^H(i) w(i) = I + \varepsilon(i)$, 则

$$\begin{aligned} \varepsilon(i) &= D(i) \{H_n(i) \varepsilon(i-1) H_n(i) + I + \beta^2 \|p(i)\|^2 \|y\|^2 e_1 e_1^H + \\ &\quad \beta [H_n(i) \varepsilon(i-1) \Omega(i) H_n(i) + H_n(i) \Omega(i) \varepsilon(i-1) H_n(i)]\} D(i) - I \end{aligned} \quad (20)$$

其中: $\Omega(i) = y(i) y^H(i)$ 。

(1) 若对 $Z(i)$ 各列进行标准化, 则

$$\begin{aligned} \varepsilon(i) &= D(i) \{H_n(i) \varepsilon(i-1) H_n(i) + I + \beta^2 \|p(i)\|^2 \|y\|^2 e_1 e_1^H + \\ &\quad \beta [H_n(i) \varepsilon(i-1) \Omega(i) H_n(i) + H_n(i) \Omega(i) \varepsilon(i-1) H_n(i)] - \\ &\quad \text{diag}\{H_n(i) \varepsilon(i-1) H_n(i) + I + \beta^2 \|p(i)\|^2 \|y\|^2 e_1 e_1^H + \end{aligned}$$

$$\beta [\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \boldsymbol{\Omega}(i) \mathbf{H}_n(i) + \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\Omega}(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i)] \mathbf{D}(i) + \boldsymbol{\eta}(i) \quad (21)$$

因为 $\mathbf{I} + \beta^2 \|\mathbf{p}(i)\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^H$ 为对角矩阵, 所以

$$\boldsymbol{\varepsilon}(i) = \mathbf{D}(i) \{ \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) + \beta \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \boldsymbol{\Omega}(i) \mathbf{H}_n(i) + \beta \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\Omega}(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) - \text{diag} [\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) + \beta \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \boldsymbol{\Omega}(i) \mathbf{H}_n(i) + \beta \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\Omega}(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i)] \} \mathbf{D}(i) + \boldsymbol{\eta}(i) \quad (22)$$

与 FDPM 算法一样, $\boldsymbol{\varepsilon}(i)$ 的对角元素仅包含本次迭代运算产生的舍入误差, 而没有累积误差存在。因此, FOOJA 算法对于主子空间和次子空间估计是稳健的、鲁棒的。

(2) 若只对第一列进行标准化, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(i) &= \text{diag} \{ [\mathbf{w}^H(i) \mathbf{w}(i)]_{1,1}, 1, \dots, 1 \}^{-1/2} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(i) &= \mathbf{D}(i) \{ \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) + \mathbf{I} + \beta^2 \|\mathbf{p}(i)\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^H + \beta [\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \boldsymbol{\Omega}(i) \mathbf{H}_n(i) + \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\Omega}(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i)] - \text{diag} [\mathbf{w}^H(i) \mathbf{w}(i)]_{1,1}, 1, \dots, 1 \} \mathbf{D}(i) + \boldsymbol{\eta}(i) \\ &= \mathbf{D}(i) \{ \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) + \beta \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \boldsymbol{\Omega}(i) \mathbf{H}_n(i) + \beta \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\Omega}(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) - [\mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) + \beta \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \boldsymbol{\Omega}(i) \mathbf{H}_n(i) + \beta \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\Omega}(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i)]_{1,1} \} \mathbf{D}(i) + \boldsymbol{\eta}(i) \end{aligned} \quad (23)$$

同样我们采取与 FDPM 算法中相同的方法对 $\boldsymbol{\varepsilon}(i)$ 表达式进行简化, 即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(i) &\approx \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) + \beta \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \boldsymbol{\Omega}(i) \mathbf{H}_n(i) + \beta \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\Omega}(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T [\mathbf{e}_1^T \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_1^T \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \boldsymbol{\Omega}(i) \mathbf{H}_n(i) \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_1^T \mathbf{H}_n(i) \boldsymbol{\Omega}(i) \boldsymbol{\varepsilon}(i-1) \mathbf{H}_n(i) \mathbf{e}_1] + \boldsymbol{\eta}(i) \end{aligned} \quad (24)$$

则

$$\begin{aligned} \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}(i)) &\approx \{ \mathbf{I}_L^2 + \beta (\boldsymbol{\Omega}(i) \leftarrow \mathbf{I}_L) + \beta (\mathbf{I}_L \leftarrow \boldsymbol{\Omega}(i)) - [(\mathbf{e}_1 \leftarrow \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_1^T \leftarrow \mathbf{e}_1^T) + \beta (\mathbf{e}_1 \leftarrow \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_1^T \leftarrow \mathbf{e}_1^T) (\boldsymbol{\Omega}(i) \leftarrow \mathbf{I}_L) + \beta (\mathbf{e}_1 \leftarrow \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_1^T \leftarrow \mathbf{e}_1^T) (\mathbf{I}_L \leftarrow \boldsymbol{\Omega}(i))] \} [\mathbf{H}_n(i) \leftarrow \mathbf{H}_n(i)] \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}(i-1)) + \text{vec}(\boldsymbol{\eta}(i)) \\ &= \Phi \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}(i-1)) + \text{vec}(\boldsymbol{\eta}(i)) \end{aligned} \quad (25)$$

其中:

$$\Phi = \{ \mathbf{I}_L^2 + \beta (\boldsymbol{\Omega}(i) \leftarrow \mathbf{I}_L) + \beta (\mathbf{I}_L \leftarrow \boldsymbol{\Omega}(i)) - [(\mathbf{e}_1 \leftarrow \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_1^T \leftarrow \mathbf{e}_1^T) + \beta (\mathbf{e}_1 \leftarrow \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_1^T \leftarrow \mathbf{e}_1^T) (\boldsymbol{\Omega}(i) \leftarrow \mathbf{I}_L) + \beta (\mathbf{e}_1 \leftarrow \mathbf{e}_1) (\mathbf{e}_1^T \leftarrow \mathbf{e}_1^T) (\mathbf{I}_L \leftarrow \boldsymbol{\Omega}(i))] \} [\mathbf{H}_n(i) \leftarrow \mathbf{H}_n(i)] \quad (26)$$

很明显, Φ 中除了第一个元素外, 其余对角线上元素均大于 1, 即 Φ 存在单位圆之外的特征值, 因此在同样的近似条件下, 只对第一列标准化的 FOOJA _1st_col 方法是不稳定的, 随着迭代的进行, 算法将发散。只是由于步长因子 β 取值较小, 使得 FOOJA _1st_col 特征值在单位圆附近变化, 发散过程非常缓慢, 但只要跟踪子空间的扰动加强, 只对第一列进行标准化的 FOOJA 算法将立即丧失跟踪子空间能力和子空间基的标准正交特性。

3 实验仿真

仿真实验中输入数据矢量 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{8 \times 1}$ 由 4 维占优信号和加性白高斯噪声组成, 占优信号构成主子空间, 假设主子空间的奇异值为 $\mathbf{D}_s = \text{diag}\{250, 180, 120, 60\}$, 加性白高斯噪声方差 $\sigma^2 = 2$ 。通过投影误差能量和标准正交误差能量, 对 FDPM、FOOJA 以及第一列标准化的 FDPM _1st_col 和 FOOJA _1st_col 等四种方法的分析结果进行验证。

投影误差能量 $e(i) = \|\mathbf{w}\mathbf{w}^H - \mathbf{w}(i)\mathbf{w}(i)^H\|_F^2$, 其中 \mathbf{w} 表示真实的次子空间基, $\mathbf{w}(i)$ 表示各种算法根据输入数据矢量对次子空间基的跟踪, $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数。标准正交误差能量 $\eta(i) = \|\mathbf{w}^H(i)\mathbf{w}(i) - \mathbf{I}_L\|_F^2$, 则反映了随着迭代次数的增加, 各种方法对次子空间基的计算相对标准正交结构的偏离程度。下面各实验针对次子空间跟踪问题, 实验数据都由 100 次独立实验结果平均得到。

根据先前的条件, 产生输入信号矢量, FDPM、FDPM _1st_col 中步长因子 β 取 0.2969, FOOJA、FOOJA _1st_col 中步长因子 β 取 3×10^{-4} 。图 1 描述了跟踪子空间基满足 $\mathbf{w}^H(0)\mathbf{w}(0) = \mathbf{I}_L$ 的初始条件下, 迭

代 2500 点时改变跟踪子空间基,但仍保持正交特性的性能对比。

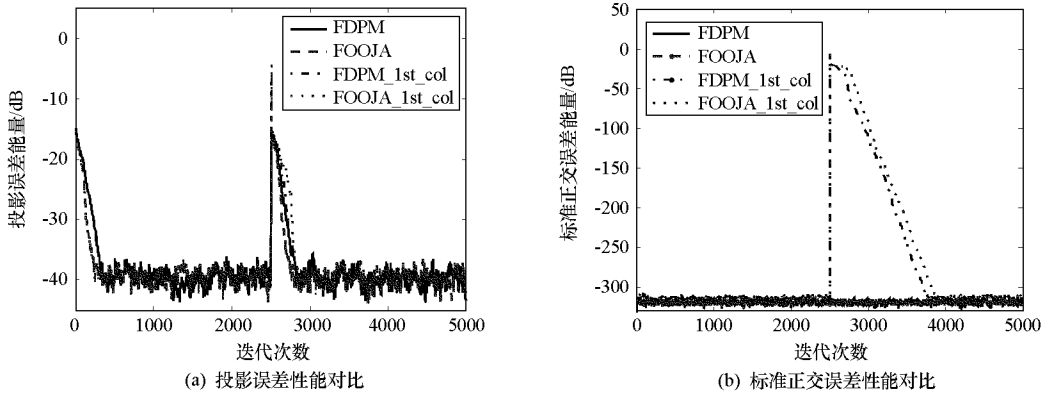


图 1 标准正交结构变化次子空间跟踪性能对比

Fig. 1 Performance of the minor subspace tracking schemes, orthonormal change

从图 1 可以看出,在跟踪子空间基满足初始标准正交特性的条件下,FDPM、FOOJA、FDPM_1st_col、FOOJA_1st_col 四种方法均能迅速地收敛到真实子空间基,并保持正交结构,由于 β 取值较小,FOOJA_1st_col 同样能保持较好的标准正交特性。2500 点改变子空间基,在保持正交结构的前提下,四种方法均能重新建立子空间跟踪状态。由于 FDPM、FOOJA 每次迭代对整个子空间基都进行标准化,因此相应的标准正交误差能量没有起伏,而 FDPM_1st_col、FOOJA_1st_col 则有一段重新收敛的过程。

图 2 描述了跟踪子空间基在初始状态不满足标准正交结构的情况下四种方法的性能对比。

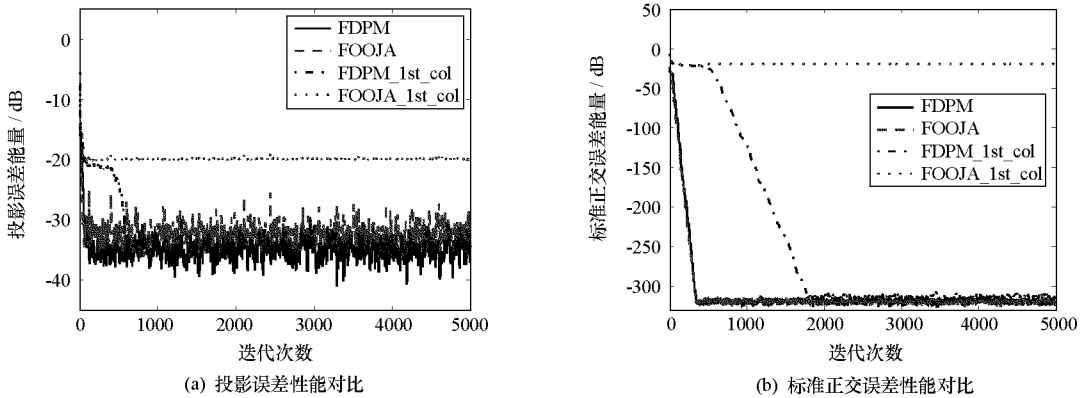


图 2 非标准正交初始条件次子空间跟踪性能对比

Fig. 2 Performance of the minor subspace tracking schemes, nonorthonormal initialize

比较图 2 可以看出,当初始状态不满足标准正交结构时,FDPM、FOOJA 能迅速收敛到真实子空间,并建立标准正交基。FDPM_1st_col 由于只对第一列进行标准化,相对前两种方法而言,有一个较为缓慢的收敛过程,但能保证建立标准正交子空间基。而 FOOJA_1st_col 与先前分析的结论相一致,算法本身处于临界稳定状态,在初始状态不满足标准正交结构的情况下,完全丧失子空间跟踪收敛能力。

图 3 描述了跟踪子空间基满足标准正交初始条件下,迭代 2500 点时强烈丧失标准正交结构的性能对比。

从图 3 可以看到,在迭代 2500 点强烈丧失标准正交特性的情况下,即各算法子空间基的所有元素均取为 1,FDPM、FOOJA 仍然具有子空间收敛性能,并保证子空间基的标准正交。而此时 FDPM_1st_col、FOOJA_1st_col 由于只对第一列进行标准化,并且由于误差的剧烈增大,造成 $\text{vec}(\varepsilon(i))$ 的特征值大于 1,引起两种方法均发散的情况。

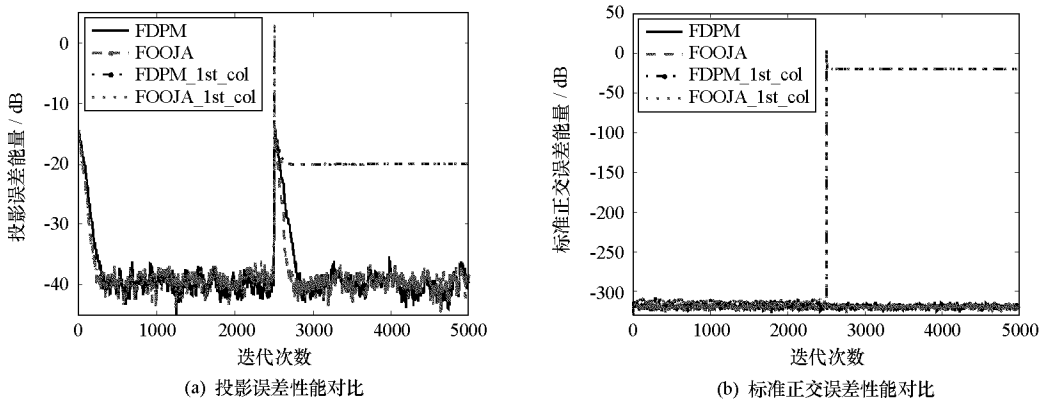


图 3 非标准正交结构变化次子空间跟踪性能对比

Fig. 3 Performance of the minor subspace tracking schemes, nonorthonormal change

4 结论

FDPM 和 FOOJA 是目前两种最为有效的适用于主、次子空间跟踪的方法, 属于低复杂度算法。进一步降低算法运算复杂度, 对保证算法的实时性具有非常重要的意义。以降低算法运算复杂度为背景, 通过对 FDPM、FOOJA 算法进行分析, 指出存在两种简化运算量的 FDPM_1st_col、FOOJA_1st_col 方法。在有限精度运算条件下, 对四种方法的数值稳健性进行了深入分析和讨论。FDPM、FOOJA 算法对于有限精度运算误差累积不敏感, 算法具有稳健性。FDPM_1st_col、FOOJA_1st_col 相对 FDPM、FOOJA 而言, 最大的优势在于运算复杂度的降低, 降低幅度约为三分之一。在相同的近似条件下, FDPM_1st_col 比 FOOJA_1st_col 具有更强的稳健性, FOOJA_1st_col 处于临界稳定状态, 跟踪子空间基的扰动, 容易造成算法的发散, 而 FDPM_1st_col 只是在跟踪子空间基强烈丧失标准正交结构时, 算法出现发散现象。本文分析的方法和结论, 为寻求运算复杂度更低、数值特性稳健的子空间跟踪方法提供了新的研究方向。

参考文献:

- [1] Yang J, Kaveh M. Adaptive Eigensubspace Algorithms for Direction or Frequency Estimation and Tracking[J]. IEEE Transactions on Acoust, Speech, Signal Processing, 1988, 36(2): 241- 251.
- [2] Oja E. Principal Components, Minor Components and Linear Neural Networks[J]. Neural Networks, 1992, 5(12): 927- 935.
- [3] Doukopoulos X G, Moustakides G V. The Fast Data Projection Method for Stable Subspace Tracking [C]// 13th Europ. Signal Process. Conf., EUSIPCO' 2005, Antalya, Turkey, 2005.
- [4] Doukopoulos X G, Moustakides G V. Blind Adaptive Channel Estimation in OFDM Systems [J]. IEEE Transactions on Wireless Commun., 2006, 5(7): 1716- 1725.
- [5] Yang B. Projection Approximation Subspace Tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(1): 95- 107.
- [6] Doukopoulos X G, Moustakides G V. Fast and Stable Subspace Tracking[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(4): 1452- 1465.
- [7] Bartelmaos S, Abed-Meraim K. An Efficient & Stable Algorithm for Minor Subspace Tracking and Stability Analysis[C]// IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP, 2007: 1301- 1304.
- [8] Yang L, Attallah S, Mathew G, et al. Analysis of Orthogonality Error Propagation for FRANS and HFRANS Algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(9): 4515- 4521.
- [9] Golub G H, VanLoan C F. Matrix Computations[M]. 3rd ed. Baltimore, MD: Johns Hopkins Univ. Press, 1993.