文章编号: 1001- 2486(2010) 03- 0153- 03

一类广义延拓四元数矩阵的奇异值分解*

俞 森, 程 薇, 冯良贵
(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 从普通四元数矩阵的奇异值分解出发, 给出了具有行或列对称结构的一类四元数矩阵(即广义四元数延拓矩阵)的奇异值、奇异向量与其母矩阵的奇异值、奇异向量之间的定量关系, 推广了现有文献的结果。理论分析和数值实验的结果表明, 就一大类广义四元数延拓矩阵而言, 仅用母矩阵进行奇异值分解不但可以节省计算量和存储量, 而且不影响任何数值精度。

关键词: 四元数矩阵; 广义延拓四元数矩阵; 母矩阵; 奇异值分解
中图分类号: O151.21 文献标识码: A

Singular Value Decomposition for Generalized Extended Quaternion Matrix

YU Sen, CHENG Wei, FENG Liang-gui
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Based on the general singular value decompositions of quaternion matrices, a relationship of the singular values and singular vectors was given between the generalized extended quaternion matrix of symmetric rows or columns and its original quaternion matrix, which extends the existing results. Theoretical predictions and numerical evidences show that, for a class of extended matrices, the singular value decomposition using the original quaternion matrix rather than the generalized extended quaternion matrix can save dramatically the memory and alleviate considerably the computational burden without loss of any numerical precision.

Key words: quaternion matrix; generalized extended quaternion matrix; original quaternion matrix; singular value decomposition

随着四元数和四元数矩阵理论在各个领域中的应用越来越广泛, 四元数矩阵的奇异值分解也逐渐成为现代数值分析中最基本和最重要的工具之一, 它广泛应用于信号与图像处理、控制理论和酉不变范数理论的领域。我国的庄瓦金[1]和美国的 Zhang[2] 分别在 1986 年和 1997 年证明了四元数矩阵的奇异值分解定理, 冯良贵等在 2009 年给出了几个关于四元数矩阵奇异值的不等式[3], 2003~ 2007 年, 法国的 Bihan 和 Sangwine 等提出了多种不同的计算四元数矩阵的奇异值分解的方法[4-6]。但是, 奇异值分解有其不足之处, 即其巨大的计算量和存储量。

近来, 在研究四元数 Fourier 变换中, 我们发现短时四元数 Fourier 变换具有零频率对称轴特性, 不仅如此, 在城区以及建筑物的图像上也存在这样的一种对称结构。对此类矩阵, 我们将其定义为广义延拓四元数矩阵。

1 广义四元数延拓矩阵

定义 1 设 $A \in Q^{m\times n}$, $k \in Z^{+}$。定义矩阵 $R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A)$ 为 $R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) = \begin{bmatrix} A \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{k-1} \end{bmatrix} \in Q^{km\times n}$, 其中 $B_i = P_iA$, $P_i \in R^{m\times m}$ 为置换矩阵, $i = 1, 2, \cdots, k-1$。称 $R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A)$ 为四元数矩阵 A

---

* 收稿日期: 2009- 10- 19
基金项目: 新世纪优秀人才专项资助项目(NCET06- 09- 23); 国防科技大学资助项目(JC08- 02- 03)
作者简介: 俞森(1982—), 男, 博士生。

关于置换矩阵 $P_1, \cdots, P_{k-1}$ 的广义四元数行延拓矩阵, A 称为广义延拓的母矩阵。

定义 2 设 $A \in Q^{m\times n}$, $k \in Z^+$。定义矩阵 $C(Q_1, \cdots, Q_{k-1}; A)$ 为 $C(Q_1, \cdots, Q_{k-1}; A) = [A \quad B_1 \quad \cdots \quad B_{k-1}] \in Q^{m\times kn}$, 其中 $B_i = AQ_i$, $Q_i \in R^{n\times n}$ 为置换矩阵, $i = 1, 2, \cdots, k-1$。称 $C(Q_1, \cdots, Q_{k-1}; A)$ 为四元数矩阵 A 关于置换矩阵 $Q_1, \cdots, Q_{k-1}$ 的广义四元数列延拓矩阵, A 称为广义延拓的母矩阵。

由定义, 立即可得以下命题:

命题 1 设 $A \in Q^{m\times n}$, $k \in Z^+$。则有

(1) $\mathrm{rank}(R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A)) = \mathrm{rank}(C(Q_1, \cdots, Q_{k-1}; A)) = \mathrm{rank}(A)$;

(2) $R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A)^* = C(P_1^*, \cdots, P_{k-1}^*; A^*)$; $C(P_1, \cdots, P_{k-1}; A)^* = R(P_1^*, \cdots, P_{k-1}^*; A^*)$;

(3) 令 $T \in Q^{n\times n}$, $S \in Q^{m\times m}$, 则

$$R(P_1, \cdots, P_{k-1}; AT) = R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A)T,$$

$$C(Q_1, \cdots, Q_{k-1}; SA) = SC(Q_1, \cdots, Q_{k-1}; A)$$

2 广义延拓四元数矩阵的奇异值分解

我国的庄瓦金[1]和美国的 Zhang[2]分别于 1986 年和 1997 年证明了四元数矩阵的奇异值分解定理如下:

引理 1 设 $A \in Q^{m\times n}$ 的秩为 r, 则存在 $U \in \boldsymbol{U}_m(Q)$ 和 $V \in \boldsymbol{U}_n(Q)$ 使得 $U^* AV = \Sigma_A = \mathrm{diag}(D_A, 0)$, 其中 $D_A = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) \in R^{r\times r}$, $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$ 为 A 的奇异值, 且 $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$。$U$ 和 V 的列向量分别叫做四元数矩阵 A 的左奇异向量和右奇异向量。

对四元数矩阵 $A \in Q^{m\times n}$, 因为 A^*A 与 AA^* 有相同的公共非负特征值, 故在文献[2]中给出了四元数矩阵奇异值的如下定义:

定义 3 设 $A \in Q^{m\times n}$, 则称自共轭矩阵 A^*A 与 AA^* 的公共非负特征值的非负平方根为 A 的奇异值。

定理 1 设 $A \in Q^{m\times n}$。若 $A = U\Sigma V^*$ 为 A 的奇异值分解, 其中 $\Sigma = \mathrm{diag}(D, 0)$, $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ 且 $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, 则广义行延拓四元数矩阵 $R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A)$ 存在奇异值分解 $R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) = M\Delta V^*$, 其中 $M \in \boldsymbol{U}_{km}(Q)$, $V \in \boldsymbol{U}_n(Q)$, $\Delta = \mathrm{diag}(T, 0) \in R^{km\times n}$, $T = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_r)$, $\delta_1 \geqslant \cdots \geqslant \delta_r > 0$, 且满足: (1) $\delta_i = \sqrt{k}\sigma_i$, $i = 1, \cdots, r$; (2) $M = [M_1 \quad M_2]$, 其中 $M_1 = R(P_1, \cdots, P_{k-1}; \frac{1}{\sqrt{k}}U) \in Q^{km\times m}$, $\forall M_2 \in Q^{km\times(km-m)}$, 使得 $M = [M_1 \quad M_2] \in \boldsymbol{U}_{km}(Q)$。

证明 因为 $P_i (1 \leqslant i \leqslant k-1)$ 为置换矩阵, 所以 $P_iP_i^{\mathrm{T}} = I_m$, 故有

$$R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A)^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) = kA^*A = kV\Sigma^{\mathrm{T}}U^*U\Sigma V^* = V\mathrm{diag}(kD^2, 0)V^*$$

即 $k\sigma_1^2, \cdots, k\sigma_r^2$ 为四元数矩阵 $R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A)^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A)$ 的特征值。由四元数奇异值的定义可知, $\sqrt{k}\sigma_1, \cdots, \sqrt{k}\sigma_r$ 为四元数矩阵 $R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A)$ 的奇异值。

因为 $M = [M_1 \quad M_2] \in \boldsymbol{U}_{km}(Q)$, 所以 $M_2^* M_1 = 0$, 且

$$M^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) V = [M_1 \quad M_2]^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) V = \begin{bmatrix} M_1^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) V \\ M_2^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) V \end{bmatrix}$$

由于 $M_1^* M_1 = R(P_1, \cdots, P_{k-1}; \frac{1}{\sqrt{k}}U)^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; \frac{1}{\sqrt{k}}U) = I_m$, 故

$$\begin{aligned} M_1^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) V &= R(P_1, \cdots, P_{k-1}; \frac{1}{\sqrt{k}}U)^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) V \\ &= C(P_1^*, \cdots, P_{k-1}^*; \frac{1}{\sqrt{k}}U^*) R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) V \\ &= \sqrt{k}U^*AV = \sqrt{k}\Sigma = \mathrm{diag}(\sqrt{k}D, 0) \end{aligned}$$

$M_2^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) V = M_2^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; AV) = M_2^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; U\Sigma) = M_2^* M_1(\sqrt{k}\Sigma) = 0$。从而 $M^* R(P_1, \cdots, P_{k-1}; A) V = \mathrm{diag}(T, 0) = \Delta$, 其中 $T = \sqrt{k}D = \mathrm{diag}(\sqrt{k}\sigma_1, \cdots, \sqrt{k}\sigma_r)$。　证毕

定理 2　设 $A \in Q^{m\times n}$。若 $A = U\Sigma V^*$ 为 A 的奇异值分解, 其中 $\Sigma = \mathrm{diag}(D, 0)$, $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ 且 $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, 则广义列延拓四元数矩阵 $C(Q_1, \cdots, Q_{k-1}; A)$ 存在奇异值分解 $C(Q_1, \cdots, Q_{k-1}; A) = U\Delta N^*$, 其中 $U \in \boldsymbol{U}_m(Q)$, $N \in \boldsymbol{U}_{kn}(Q)$, $\Delta = \mathrm{diag}(T, 0) \in R^{m\times kn}$, $T = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_r)$, $\delta_1 \geqslant \cdots \geqslant \delta_r > 0$, 且满足: (1) $\delta_i = \sqrt{k}\sigma_i$, $i = 1, \cdots, r$; (2) $N = [N_1 \quad N_2]$, 其中 $N_1 = R(Q_1^*, \cdots, Q_{k-1}^*; \frac{1}{\sqrt{k}}V) \in Q^{kn\times n}$, $\forall N_2 \in Q^{kn\times(kn-n)}$, 使得 $N = [N_1 \quad N_2] \in \boldsymbol{U}_{kn}(Q)$。

证明　由命题 1 可知, $C(Q_1, \cdots, Q_{k-1}; A) = R(Q_1^*, \cdots, Q_{k-1}^*; A^*)^*$。又因为 $A^* = (U\Sigma V^*)^* = V\Sigma^* U^*$, 故可利用定理 1 直接可得所需结论。　□

我们考虑下列特殊情况: 当 $P_1 = \cdots = P_{k-1} = P$ 时, 将 $R(P, \cdots, P; A)$ 记为 $R_k(P; A)$, 类似地可将 $C(Q, \cdots, Q; A)$ 记为 $C_k(Q; A)$。此时若还有 $A \in C^{m\times n}$, 则文献[7] 的两个主要结论即为本文定理 1 和定理 2 的推论。

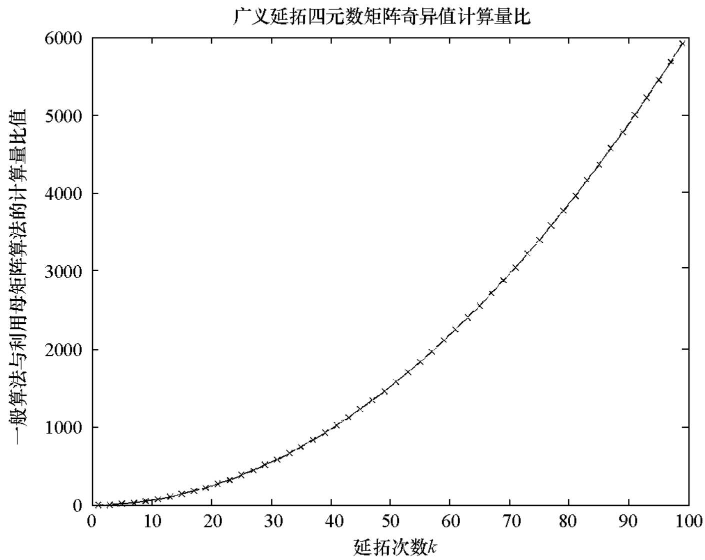

图 1　广义延拓四元数矩阵奇异值计算量比

Fig. 1　The memory comparision of solving the singular values of a generalized extended quaternion matrix

综上所述, 无论四元数矩阵具有何种行或列的对称形式, 若只关心该矩阵的奇异值, 则可用较小规模的母矩阵的奇异值通过乘以常数因子计算得到。当 $A \in Q^{m\times n}$ 时, 广义延拓四元数矩阵 $R_k(P; A)$ 求奇异值的一般算法与利用母矩阵算法的计算量之比为 $\frac{2(km)^2 n + 11n^3}{2m^2 n + 11n^3}$。特别地, 我们考察当 $A \in Q^{3\times 3}$ 时其计算量之比如图 1 所示。当待分析的广义延拓四元数矩阵的维数较大时, 特别是延拓次数 k 较高时, 计算机的计算量和存储量的减少更为明显。

参 考 文 献:

[1]　庄瓦金. 四元数矩阵的分解与 Lavoie 不等式的推广[J]. 数学研究与评论, 1986, 6(4): 23-25.

[2]　Zhang F Z. Quaternions and Matrices of Quaternions[J]. Linear Algebra Appl., 1997(251): 21-57.

[3]　冯良贵, 罗继红. 基于四元数体上的几个矩阵不等式[J]. 国防科技大学学报, 2009, 31(3): 136-140.

[4]　Bihan N L, Mars J. Singular Value Decomposition of Quaternion Matrices: A New Tool for Vector-sensor Signal Processing[J]. Signal Process, 2004(84): 1177-1199.

[5]　Sangwine S J, Bihan N L. Quaternion Singular Value Decomposition Based on Bidiagonalization to a Real Matrix Using Quaternion Householder Transformations[J]. Applied Math. Compu., 2006(182): 727-738.

[6]　Bihan N L, Sangwine S J. Jacobi Method for Quaternion Matrix Singular Value Decomposition[J]. Applied Math. Compu., 2007(187): 1265-1271.

[7]　邹红星, 王殿军, 戴琼海, 等. 延拓矩阵的奇异值分解[J]. 电子学报, 2001, 29(3): 289-292.