文章编号:1001-2486(2010)03-0156-05

基于 Dirichlet 先验分布的模糊可靠性增长模型研究*

刘纪涛,胡 凡,张为华
(国防科技大学 航天与材料工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:将模糊理论应用于基于 Dirichlet 先验分布的 Bayes 可靠性增长模型,提出了可靠性增长的模糊模型。在对 Dirichlet 先验分布函数研究的基础上,分析了先验参数的获取方法。针对某水冲压发动机可靠性增长试验使用 Dirichlet 先验分布模型进行了分析,给出了试验各阶段的先验分布和后验分布,并分析了与先验信息方差有关的参数对后验可靠度的影响。在此基础上,通过引入模糊变量,发展了模糊可靠性增长模型,得到了试验各阶段模糊可靠度。

关键词:可靠性增长;Dirichlet 分布;模糊;先验分布
中图分类号:TB114.3 文献标识码:A

Fuzzy Reliability-growth Model Analysis Based on Dirichlet Prior Distribution

LIU Ji-tao, HU Fan, ZHANG Wei-hua
(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A fuzzy reliability growth model was presented on the basis of a Bayesian reliability-growth model based on Dirichlet prior distribution using fuzzy theory. The method for determining prior parameters was studied using Dirichlet prior distribution. A metal/water reaction ramjet's reliability growth test data was analyzed using this distribution. The prior distribution and the posterior distribution at each test stage were presented. And the effect of the parameter related to prior information's variance on posterior reliability was analyzed. Fuzzy variable was introduced in the original model to build a fuzzy reliability growth model. Using the model, the fuzzy reliability at each stage was calculated.

Key words: reliability growth model; Dirichlet distribution; fuzzy; prior distribution

水冲压发动机采用延缓修正策略的可靠性增长试验,将走过“进行若干发试验—查找问题并修正—再进行若干发试验”的历程。Bayes 可靠性增长模型[1]可以融合前一阶段试验数据进行可靠性评估。但如果采用无信息先验分布会使评估过于冒进。基于 Dirichlet 先验分布的 Bayes 可靠性增长模型能够有效利用专家意见、经验和同类产品信息,可以较好地反映实际故障修正中的客观规律。

顺序 Dirichlet 分布模型由 Mazzuchi 提出[2],随后多次对模型性质进行讨论[3],并将其应用于其他方面[4-5]。国内也有少数学者对此可靠性增长模型展开研究,刘飞[6]将其应用于固体火箭发动机可靠性增长试验;喻天翔[7]将此模型与 Bayes 可靠性增长模型进行了比较分析;明志茂[8]提出新的 Dirichlet 先验分布用于解决超参数难以确定的问题。

本文针对反映可靠性增长确信程度的尺度参数难以确定的问题,将参数模糊化,提出了基于 Dirichlet 先验分布的模糊可靠性增长模型。

1 基于 Dirichlet 先验分布的 Bayes 可靠性增长模型

1.1 模型假设

(1) 产品经历 m 个试验阶段,且各阶段的试验结果相互独立,每阶段进行 n_i 次试验,其中 f_i 次失

* 收稿日期:2009-11-26
作者简介:刘纪涛(1981—),男,博士生。

败,设每一阶段产品可靠性为 $R_i(i=1,\cdots,m)$;

(2) 每一试验阶段后,进行产品修正,消除出现的故障模式。随着试验阶段的推进,失效不断暴露并得到修正,产品可靠度不断得到提高,因此很自然的有

$$0\leqslant R_1\leqslant R_2\leqslant\cdots\leqslant R_m\leqslant 1 \tag{1}$$

同样,对于失效概率 $F_i=1-R_i$,有

$$1\geqslant F_1\geqslant F_2\geqslant\cdots\geqslant F_m\geqslant 0 \tag{2}$$

1.2 顺序 Dirichlet 分布模型

顺序 Dirichlet 分布由两种形式的定义:针对可靠度 $\boldsymbol{R}=(R_1,R_2,\cdots,R_m)$ 的模型和针对失效概率 $\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,\cdots,F_m)$ 的模型。对于变量 $\boldsymbol{F}$,顺序 Dirichlet 分布的密度函数定义为[2-3]

$$\pi(\boldsymbol{F}\mid\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\beta)}{\prod_{i=1}^{m}\Gamma(\beta\alpha_i)}\prod_{i=1}^{m+1}(F_{i-1}-F_i)^{\beta\alpha_i-1} \tag{3}$$

其中,$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m+1})$;$\alpha,\beta$ 为 Dirichlet 分布的先验分布参数;$F_0\equiv 1,F_{m+1}\equiv 0$;$\beta>0,\alpha_i>0\ (i=1,\cdots,m+1)$;$\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i=1$。

1.3 Bayes 后验估计

截止到产品的第 i 个阶段试验,似然函数为

$$L(n^{(i)},f^{(i)};\boldsymbol{F})\propto\prod_{j=1}^{i}F_j^{f_j}(1-F_j)^{n_j-f_j} \tag{4}$$

其中,$n^{(i)}=(n_1,n_2,\cdots,n_i)$;$f^{(i)}=(f_1,f_2,\cdots,f_i)$。

由式(3)和式(4),利用 Bayes 定理可求得 $\boldsymbol{F}$ 的后验分布

$$p(\boldsymbol{F}\mid\alpha,\beta)\propto\prod_{j=1}^{i}(F_j)^{f_j}(1-F_j)^{n_j-f_j}(F_{j-1}-F_j)^{\beta\alpha_j-1}\prod_{j=i+1}^{m+1}(F_{j-1}-F_j)^{\beta\alpha_j-1} \tag{5}$$

通过推导可以得到 $\boldsymbol{F}$ 的后验分布密度为

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{F}\mid\alpha,\beta)=&\sum_{l_1=0}^{n_1-f_1}\cdots\sum_{l_i=0}^{n_i-f_i}\frac{W(n^{(i)},f^{(i)},l^{(i)},\alpha,\beta)}{\overline{W}}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{i}F_j^{f_j+l_j}(F_{j-1}-F_j)^{\beta\alpha_j-1}}{\prod_{j=1}^{i}B\left(\sum_{z=j}^{i}(l_z+f_z)+\sum_{z=j}^{m}\beta\alpha_{z+1},\beta\alpha_j\right)}\right\}\\&\times\left\{\frac{\prod_{j=i+1}^{m+1}(F_{j-1}-F_j)^{\beta\alpha_j-1}}{\prod_{j=i+1}^{m}B\left(\sum_{z=j}^{m}\beta\alpha_{z+1},\beta\alpha_j\right)}\right\}\end{aligned} \tag{6}$$

其中,$B(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$;$W(n^{(i)},f^{(i)},k^{(i)},\alpha,\beta)$ 为系数项;$\overline{W}=\sum_{l_1=0}^{n_1-f_1}\cdots\sum_{l_i=0}^{n_i-f_i}W(n^{(i)},f^{(i)},l^{(i)},\alpha,\beta)$。

1.4 可靠度精确限

对于给定的置信度 γ,各阶段的 Bayes 可靠度下限 $\boldsymbol{R}_L$,可以通过求解同样置信度下的失效概率 $\boldsymbol{F}$ 的上限 $\boldsymbol{F}_U$,即利用式(6)求解如下方程得到

$$\begin{cases}\int_0^{\boldsymbol{F}_U}p(\boldsymbol{F}\mid\alpha,\beta)=\gamma\\ \boldsymbol{R}_L=1-\boldsymbol{F}_U\end{cases} \tag{7}$$

直接求解方程(7)较为困难。可以通过 Markov Chain Monte Carlo (MCMC) 算法中的 Gibbs 抽样算法或 Metropolis-Hastings 方法求解。

2 先验信息获取

先验参数 α 是与可靠性增长幅度有关的量。而可靠性增长幅度以及 Dirichle 分布的 Bayes 可靠度先验值的获取与可靠性管理策略密切相关。

可靠性增长曲线的制定依赖于可靠性增长率 m 或可靠性增长参数 $b(b=1-m)$。常规的可靠性规划建立在 Duane 模型的时间指数型分布基础上。在双对数坐标中, 累积试验时间与累积 MTBF 呈一直线。虽然很多系统, 尤其以时间作为指标衡量的设备(如航空发动机、喷气发动机) 都比较好的符合 Duane 模型和 AMSAA 模型, 但类似水冲压发动机、固体火箭发动机这种一次性使用的离散型设备的可靠性增长模型依然有待证明。而且有些设备(如长征运载火箭[9]) 已经证明在可靠性增长过程中可靠性增长率 m 并非为固定的数值。

而基于 Dirichlet 先验分布的 Bayes 可靠性增长模型可以通过试验分析, 类似产品信息以及有经验的专家对每次修改情况的估计得到较为贴近的增长率情况。这种方式得到的对各阶段可靠性的估计, 就是 Dirichlet 模型所需的先验信息。

例如, 对于表 1 所示的三阶段试验情况, 先验分析认为各阶段可靠度为 $\boldsymbol{R}=(0.6, 0.72, 0.755)$, 则 $\alpha=(0.6, 0.12, 0.035, 0.245)$。模型尺度参数 β 取为 5。各阶段可靠性估计均值如表 2 所示。先验概率密度分布和后验概率密度分布如图 1 和图 2 所示。

表 1 阶段试验结果

Tab. 1 Result of testing stage

阶段	成功数 n_i	失效数 f_i
1	3	1
2	4	1
3	4	0

表 2 各阶段可靠度均值

Tab. 2 Reliability mean values after each testing stage

阶段	R_1	R_2	R_3
0	0.6	0.72	0.755
1	0.625	0.7375	0.7703
2	–	0.7398	0.7723
3	–	–	0.8395

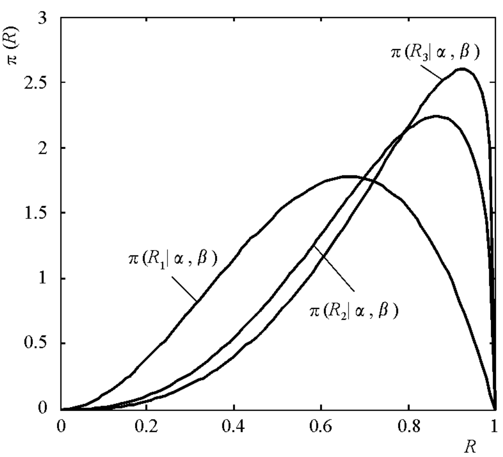

图 1 先验概率密度分布

Fig. 1 Prior distribution

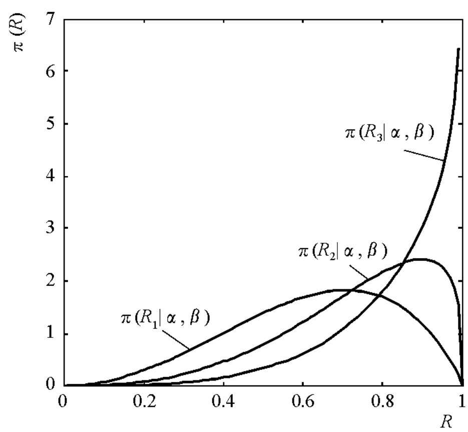

图 2 后验概率密度分布

Fig. 2 Posterior distribution

3 模糊可靠性增长模型

3.1 尺度参数模糊化

尺度参数 β 反映了技术人员对估计值的确信程度。图 3 显示了 β 取不同数值(不同确信程度) 时的可靠度均值情况。

参数 β 的存在虽是对先验信息不确定性的一种弥补, 但同时也引入了主观因素。β 可以通过专家

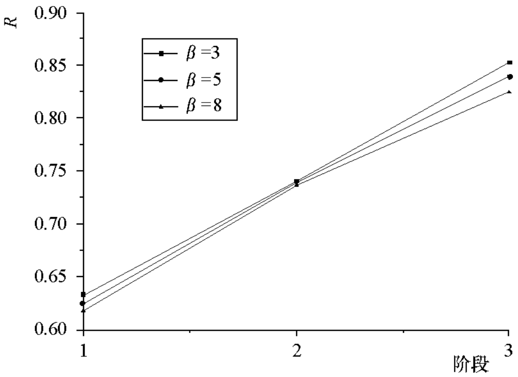

图 3 可靠性估计均值
Fig. 3 Mean value of reliability predictions

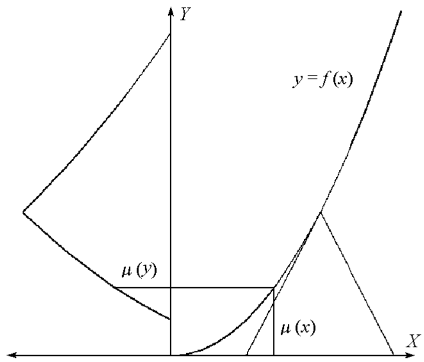

图 4 扩展原理(一维情形)
Fig. 4 Extension principle(case of one dimension)

评定得到, 也可以通过本部门以往同类或类似系统信息获得。尤其对于已经定型生产的发动机类产品, 系统可靠度已经经过验证, β 的获取过程就是对方程(7)的反求过程。

不同型号的发动机可以得到不同的 β 值, 专家也会给出不同的结果。简单的处理方式就是取平均值, 另一种较好的处理方式就是将这些信息进行模糊处理, 将 β 值作为模糊变量应用于式(7)。

将 β 值进行模糊化就是对存在的各 β 值分配适合的隶属度。确定隶属度函数的方法有多种, 可以根据权重离散处理得到 β 值; 也可以通过概率统计方法, 通过计算频率数的方式得到隶属度曲线。另一种常用的方法就是选用与 β 分布较为接近的常规隶属度分布函数。

在得到 β 的隶属度函数 μ_β 后, 就需要通过如下方程求解 $\boldsymbol{F}_U$ 或 $\boldsymbol{R}_L$。

$$\int_0^{\boldsymbol{F}_U} p(\boldsymbol{F} \mid \alpha, \beta) = \gamma \tag{8}$$

通过变换, 式(8)可写成

$$\boldsymbol{F}_U = f(\beta) \tag{9}$$

的形式。这属于含模糊变量系统的求值问题。可以采用模糊理论中的扩展原理求解。

3.2 模糊扩展原理

扩展原理作为模糊理论最基本的原理[10], 无论在理论本身还是理论的实用上都十分重要。扩展原理主要描述论域 X 和 Y 对应的全体模糊集对应的集合 $\mathscr{F}(X)$ 和 $\mathscr{F}(Y)$ 的对应关系。一维情形如图 4 所示。

定义 设映射 $f: X \to Y$, 则由 f 可以导出如下映射:

$$f: \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y), \quad A \to f(A)$$

其中

$$f(A)(y) = \begin{cases} \bigvee\limits_{f(x)=y} A(x) & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

则称 $f(A)$ 为模糊集 A 在 f 下的像。

引入 α 截集后, 有如下等式成立,

$$f(A)_{\underset{\cdot}{\alpha}} = f(A_{\underset{\cdot}{\alpha}}), \quad \forall \alpha \in [0, 1] \tag{10}$$

其中, $A_{\underset{\cdot}{\alpha}} = \{x \in X \mid A(x) > \alpha\}$ 为 A 的强 α 截集。

当且仅当 $\forall y \in Y$, 存在 $x_0 \in f^{-1}(y)$, 使得 $f(A)(y) = A(x_0)$ 时,

$$f(A)_\alpha = f(A_\alpha)$$

3.3 模糊分析

对于上述出现的尺度参数 β 如果定义为式(11)所示的三角形隶属函数模糊变量 β,

$$\mu_\beta(\beta)=\begin{cases}(\beta-3)/2, & 3\leqslant\beta\leqslant 5\\ (8-\beta)/3, & 5\leqslant\beta<8\end{cases}\tag{11}$$

利用式(8)通过求解各隶属度下的方程便可以得到各阶段系统可靠度模糊分布,如图5所示。

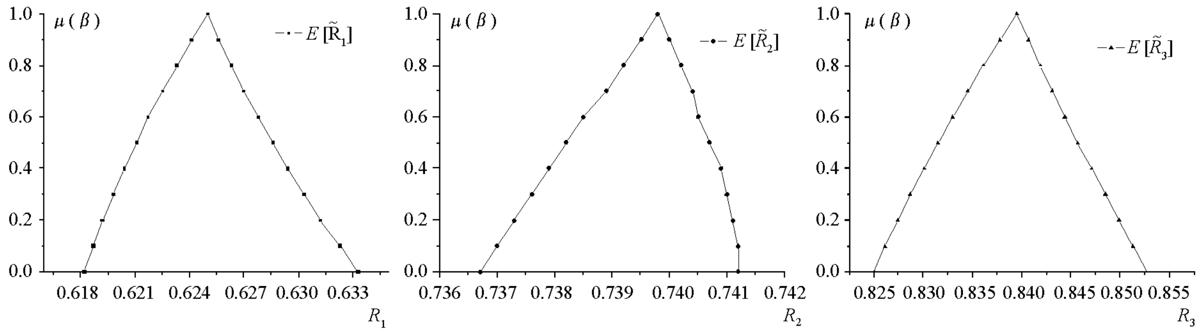

图5 各阶段系统模糊可靠度分布

Fig.5 Fuzzy reliability distribution after each stage

4 结论

本文将模糊理论应用于Dirichlet先验分布,提出了基于Dirichlet先验分布的模糊可靠性增长模型。较好地解决了原Dirichlet先验分布超参数难以确定的问题。使用模糊参数表述各阶段可靠性估计值的可信度,能够在可靠性增长试验中更加客观的描述专家经验和类似系统信息。

参考文献:

[1] 周源泉,翁朝曦. 可靠性增长[M]. 北京:科学出版社,1992.

[2] Mazzuchi T A, Soyer R. A Bayesian Attribute Reliability Growth Model[C]//Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium, 1991, 322-325.

[3] Mazzuchi T A, Soyer R. Reliability Assessment and Prediction During Product Development[C]//Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium, 1992: 468-474.

[4] Rene V D J, Mazzuchi T A. A General Bayes Exponential Inference Model for Accelerated Life Testing[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2004, 119: 55-74.

[5] Rene V D J, Mazzuchi T A. A General Bayes Weibull Inference Model for Accelerated Life Testing[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2005, 90: 140-147.

[6] 刘飞,窦毅芳,张为华. 基于狄氏先验分布的固体火箭发动机可靠性增长Bayes分析[J]. 固体火箭技术,2006,29(4):239-242.

[7] 喻天翔,宋笔锋,冯蕴文. 基于Dirichlet先验分布的Bayes二项可靠性增长方法[J]. 系统工程理论与实践,2006(1):131-135.

[8] 明志茂,张云安,陶俊勇,等. 基于新Dirichlet先验分布的超参数确定方法研究[J]. 宇航学报,2008,29(6):2062-2067.

[9] 周源泉,李宝盛. 中国长征系列运载火箭的可靠性分析[J]. 质量与可靠性,2009(3):1-4.

[10] 刘晋寅,吴孟达. 模糊理论及其应用[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2001.