

文章编号: 1001- 2486(2010) 04- 0042- 07

## 两种捆绑火箭弹性振动建模方法对比分析及其对姿控系统的影响\*

李家文<sup>1</sup>, 李恩奇<sup>2</sup>, 李道奎<sup>1</sup>, 周建平<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073; 2. 第二炮兵装备研究院 第五研究所, 北京 100085)

**摘要:** 针对长助推和短助推两种类型捆绑火箭的不同模态特点, 分析了两者弹性振动建模方法的区别和联系, 在此基础上建立了某型固体捆绑火箭姿态动力学新模型, 模型中基于有限元法导出了弹性振动方程, 基于该模型对箭体复杂弹性振动引起的通道间耦合进行了研究, 采用逆 Nyquist 阵列法进行设计。结果表明, 该模型能更准确地反映捆绑火箭纵、横、扭耦合运动特性; 新模型三通道之间存在弹性耦合, 但耦合矩阵具有对角优势性质, 采用逆 Nyquist 阵列法进行姿控系统设计是有效的, 仿真结果表明设计的控制器可行, 能够取得比较好的性能。

**关键词:** 捆绑火箭; 姿态动力学模型; 弹性振动; 有限元法; 一维梁理论; 逆 Nyquist 阵列法

中图分类号: V448.1 文献标识码: A

## Comparative Analysis of Two Types of Strap-on Launch Vehicle's Elastic Vibration Modeling Method and the Influence on Attitude Control System

LI Jia-wen<sup>1</sup>, LI En-qi<sup>2</sup>, LI Dao-kui<sup>1</sup>, ZHOU Jian-ping<sup>1</sup>

(1. College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. The Fifth Research Institute, Academy of the Second Artillery, Beijing 100085, China)

**Abstract:** In view of the different characteristics of modes between long and short strap-on launch vehicles, the differences and relations of elastic vibration modeling method of them were analyzed firstly. Then a new attitude dynamic model of solid strap-on launch vehicle was derived, the elastic vibration equation in the model was also derived by finite element method. Finally, the coupling among three channels based on the new model was studied. Inverse Nyquist Array method was used to design the controller. The results show that the new model can reflect more exactly the coupling characteristics of longitudinal, lateral and torsional vibration of strap-on launch vehicle. Although the coupling among three channels exists, the coupling matrix has the diagonal dominance characteristics and the controller designed by Inverse Nyquist Array method can obtain a good performance.

**Key words:** strap-on launch vehicle; model of attitude dynamics; elastic vibration; finite element method; one dimensional beam theory; Inverse Nyquist Array method

根据火箭弹性振动特征进行合理抽象和简化, 采用合适的弹性振动建模方法准确描述全箭振动是设计控制器的前提。对早期无捆绑火箭或弹道导弹, 由于长细比较大, 弹性振动表现出梁式模态特征, 在弹性建模时通常将其抽象简化为两端自由连续梁, 忽略纵振、扭振和横向弯曲振动间的耦合并且不考虑轴过载对弹性振动的影响, 分别用一维梁的两个横向弯曲振动方程和一个扭转振动方程描述箭体在俯仰、偏航和滚动等三个方向的弹性振动, 这是绝大部分公开文献中介绍的弹性振动建模方法<sup>[1-3]</sup>。特点是所得弹性振动方程相互解耦, 利于控制系统按三通道分别设计。

随着捆绑火箭的出现, 助推器的数量、直径、长度以及与芯级连接形式等都会使全箭模态特征变得复杂化。如果助推器长细比较小, 如 Atlas-II、Delta2914、Ariane-4、CZ-2E、H-I 等, 分析和试验研究发现<sup>[4-5]</sup>, 由于助推器比较短粗, 在关心的频段内全箭主要呈现两类模态: (1) 以芯级弯曲或扭转为主、助推为刚体运动的主模态; (2) 助推弯曲变形与芯级保持一致, 呈随动状态的模态, 如图 1 中 CZ-2E 火箭模

\* 收稿日期: 2010-03-18

作者简介: 李家文(1982-), 男, 博士生。

态。总体来看, 模态不算密集, 有轻微耦合但不严重; 存在局部模态, 但不明显, 全箭主要呈现芯级火箭的梁式模态特征且成对出现, 因此工程上仍然将这类短助推捆绑火箭抽象简化为以芯级为主的单根连续梁(只不过在火箭尾部考虑了助推器的刚度)并按照前述单根梁的建模方法推导弹性振动方程。如李新国<sup>[6]</sup>等推导的捆绑火箭姿态动力学模型, 可以看到三种振动方程仍然分开独立。



图1 短助推捆绑火箭模态  
Fig.1 Modes of strap-on launch vehicle with short boosters



图2 长助推捆绑火箭模态  
Fig.2 Modes of strap-on launch vehicle with long boosters

但随着新型大推力长助推捆绑火箭如 Ariane-5、Delta-IV、Ares-V 等的出现, 助推器长细比增加, 柔性明显增强, 使全箭弹性振动复杂性大大增加, 助推器局部变形的模态大量增加。全箭呈现低频密模态、芯级和助推纵、横、扭耦合明显的空间梁系结构模态特征(如图2所示)需要用“模态组”概念来描述<sup>[5]</sup>, 在每个模态组内, 各模态由唯一的芯级振型和若干不同的助推器振型组合而成, 频率也十分接近。此时明显不能将这类捆绑火箭抽象简化为单根连续梁, 而应该视为空间梁系结构来考虑。笔者近期在文献[7]中简要介绍了利用有限元法对这种空间梁系结构进行建模的思想, 但没有给出具体的弹性振动方程推导结果。作为后续研究, 本文针对某型固体捆绑火箭分别采用前述一维梁理论和有限元法进行了建模, 结合具体算例比较了两者的区别和联系。

## 1 数学模型

### 1.1 按一维梁理论进行弹性振动建模及其对应的姿态动力学模型

传统方法将捆绑火箭抽象为以芯级为主的空间自由连续一维梁模型, 根据一维梁弯曲振动和扭转振动微分方程, 采用模态叠加法推导可得以广义坐标形式表示的弯曲和扭转振动方程为<sup>[11]</sup>

$$\begin{cases} \ddot{q}_{iy} + 2\xi_{iy}\omega_{iy}q_{iy} + \omega_{iy}^2 q_{iy} = Q_{iy}/M_{iy} \\ \ddot{q}_{iz} + 2\xi_{iz}\omega_{iz}q_{iz} + \omega_{iz}^2 q_{iz} = Q_{iz}/M_{iz} \\ \ddot{q}_{in} + 2\xi_{in}\omega_{in}q_{in} + \omega_{in}^2 q_{in} = Q_{in}/M_{in} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $q_{ia}$ 、 $\xi_{ia}$ 、 $\omega_{ia}$ 、 $Q_{ia}$ 、 $M_{ia}$  ( $a = y, z, n$ ) 分别是对应俯仰弯曲振动、偏航弯曲振动和轴向扭转振动的广义坐标、阻尼比、频率、广义力和广义质量。其中

$$\begin{cases} M_{iy} = \int_0^l m_x(x) W_{yi}^2(x) dx \\ Q_{iy} = \int_0^l P_y(x, t) W_{yi}(x) dx \\ M_{iz} = \int_0^l m_x(x) W_{zi}^2(x) dx \\ Q_{iz} = \int_0^l P_z(x, t) W_{zi}(x) dx \\ M_{in} = \int_0^l \rho(x) J(x) W_{ni}^2(x) dx \\ Q_{in} = - \int_0^l M_x(x, t) W_{ni}(x) dx \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $m_x(x)$ 、 $\rho(x)$ 、 $J(x)$  分别为距箭体尖端  $x$  处箭体线质量分布、体密度、截面极惯性矩,  $P_y$ 、 $P_z$ 、 $M_x$  分别为横向外力和轴向扭矩;  $W_{yi}$ 、 $W_{zi}$ 、 $W_{ni}$  分别为芯级一维梁的俯仰弯曲振型、偏航弯曲振型和滚动通道扭转振型。作用在箭体上的外力包括重力、推力、摆动惯性力、气动力、结构干扰力和风干扰力, 求出这些力的广义力<sup>[1,81]</sup>, 代入式(1)整理得如下三通道弹性振动方程<sup>[11]</sup>

$$\ddot{q}_{iy} + 2\xi_{iy}\omega_{iy}q_{iy} + \omega_{iy}^2 q_{iy} = D_{1i}^{\varphi} \Delta \Psi + D_{2i}^{\varphi} \left( \Delta \alpha + \alpha_w \right) + D_{3i}^{\varphi} \delta_{\varphi} + D_{3i}^{\varphi} \delta_{\varphi} + Q_{iy}, \quad iy = 1, 2, \dots, N_1 \quad (3)$$

$$\ddot{q}_{iz} + 2\xi_{iz}\omega_{iz}q_{iz} + \omega_{iz}^2 q_{iz} = D_{1i}^{\psi} \Psi + D_{2i}^{\psi} \left( \beta + \beta_w \right) + D_{3i}^{\psi} \delta_{\psi} + D_{3i}^{\psi} \delta_{\psi} + Q_{iz}, \quad iz = 1, 2, \dots, N_2 \quad (4)$$

$$\ddot{q}_{in} + 2\xi_{in}\omega_{in}q_{in} + \omega_{in}^2 q_{in} = d_{in}q_{in} + d_{3i} \delta_{\gamma} + d_{3i}^{\prime} \delta_{\gamma} + Q_{in} \quad in = 1, 2, \dots, N_3 \quad (5)$$

其中,  $\varphi$ 、 $\psi$  和  $\gamma$  分别为俯仰角、偏航角和滚动角;  $\theta$ 、 $\sigma$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\alpha_w$  和  $\beta_w$  分别为弹道倾角、弹道偏角、攻角、侧滑角、风攻角和风侧滑角;  $\delta_\varphi$ 、 $\delta_\psi$  和  $\delta_\gamma$  分别为三通道发动机合成等效摆角;  $Q_{\dot{y}}$ 、 $Q_{\dot{z}}$  和  $Q_{\dot{in}}$  分别为俯仰、偏航和滚动方向结构干扰力的广义力。一般情况下俯仰、偏航方向模态数  $N_1$ 、 $N_2$  取 3~5 阶, 滚动通道模态数  $N_3$  取 3 阶, 开环传递函数阶次不高, 便于系统设计。这种建模方法没有考虑纵向振动模态的影响。根据运动学和动力学的知识可推导得到刚体运动方程为

$$\begin{cases} \Delta \ddot{\varphi} + b_1^\varphi \Delta \dot{\varphi} + b_2^\varphi (\Delta \alpha + \alpha_w) + b_3^{\varphi\varphi} \Delta \delta_\varphi + b_3^\varphi \Delta \delta_\varphi + \sum_{i=1}^N (b_{1i}^\varphi q_{\dot{y}} + b_{2i}^\varphi q_{\dot{y}}) = M_{BZ} \\ \Delta \ddot{\psi} = c_1^\psi \Delta \alpha + c_2^\psi \Delta \theta + c_4^\psi \Delta \varphi + c_3^{\psi\psi} \Delta \dot{\delta}_\psi + c_3^\psi \Delta \delta_\psi + \sum_{i=1}^N (c_{1i}^\psi q_{\dot{y}} + c_{2i}^\psi q_{\dot{y}}) + c_1^\psi \alpha_w - F_{BY} \\ \dot{\Psi} + b_1^\psi \Psi + b_2^\psi (\beta + \beta_w) + b_3^{\psi\psi} \delta_\psi + b_3^\psi \delta_\psi + \sum_{i=1}^N (b_{1i}^\psi q_{\dot{z}} + b_{2i}^\psi q_{\dot{z}}) = M_{BY} \\ \varphi = c_1^\psi \beta + c_2^\psi \sigma + c_4^\psi \Psi + c_3^{\psi\psi} \delta_\psi + c_3^\psi \delta_\psi + \sum_{i=1}^N (c_{1i}^\psi q_{\dot{z}} + c_{2i}^\psi q_{\dot{z}}) + c_1^\psi \beta_w - F_{BZ} \\ \dot{\gamma} + d_1 \dot{\gamma} + d_3^{\gamma\gamma} \delta_\gamma + d_3 \delta_\gamma + \sum_{i=1}^N (d_{1i} \dot{q}_i + d_{2i} q_i) = M_{BX} \end{cases} \quad (6)$$

惯组和速率陀螺测量方程为

$$\begin{cases} \Delta \varphi_{gz} = \Delta \varphi - \sum_{iy=1}^{N_1} W'_{zi}(x_{gz}) q_{\dot{y}} \\ \Delta \psi_{gz} = \Delta \psi - \sum_{iz=1}^{N_2} W'_{zi}(x_{gz}) q_{\dot{z}} \\ \gamma_{gz} = \gamma - \sum_{in=1}^{N_3} W'_{xi}(x_{gz}) q_{\dot{in}} \\ \Delta \varphi_{st} = \Delta \varphi - \sum_{iy=1}^{N_1} W'_{zi}(x_{st}) q_{\dot{y}} \\ \Delta \psi_{st} = \Delta \psi - \sum_{iz=1}^{N_2} W'_{zi}(x_{st}) q_{\dot{z}} \\ \gamma_{st} = \gamma - \sum_{in=1}^{N_3} W'_{xi}(x_{st}) q_{\dot{in}} \end{cases} \quad (7)$$

其中, 下标“gz”表示惯组, “st”表示速率陀螺。式(3)~(7)中系数  $b_{1i}^\varphi$ 、 $b_{2i}^\varphi$ 、 $c_{1i}^\psi$ 、 $c_{2i}^\psi$ 、 $D_{1i}^\psi$ 、 $D_{2i}^\psi$ 、 $D_{3i}^\psi$ 、 $D_{3i}^{\psi\psi}$  只和芯级火箭俯仰弯曲振型和振型斜率有关;  $b_{1i}^\psi$ 、 $b_{2i}^\psi$ 、 $c_{1i}^\psi$ 、 $c_{2i}^\psi$ 、 $D_{1i}^\psi$ 、 $D_{2i}^\psi$ 、 $D_{3i}^\psi$ 、 $D_{3i}^{\psi\psi}$  只和芯级火箭偏航弯曲振型和振型斜率有关;  $d_{1i}$ 、 $d_{2i}$ 、 $d_{in}$ 、 $d_{3i}$ 、 $d_{3i}^{\gamma\gamma}$  只和芯级火箭扭转振型有关。换句话说, 在计算这些系数时只使用了捆绑火箭各阶模态数据中和芯级有关的部分数据(芯级振型  $W_{zi}$ 、 $W_{xi}$ 、 $W'_{xi}$  和芯级振型斜率  $W'_{yi}$ 、 $W'_{zi}$ , 没有考虑每阶模态的纵向分量  $W_{xi}$ ), 舍弃了和助推相关的模态数据。

### 1.2 按有限元法进行弹性振动建模及其对应的姿态动力学模型

如果将捆绑火箭抽象为空间梁系结构模型, 根据有限元法可得其振动控制方程为

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \quad (8)$$

其中,  $M$ 、 $C$ 、 $K$  分别为集中质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;  $F$  为节点载荷向量, 包括作用在箭体上的外力和外力矩;  $X$  为节点位移向量。采用振型叠加法可将式(8)解耦为

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = Q_i/M_i \quad i = 7, 8, \dots, N \quad (9)$$

其中,  $q_i$ 、 $\xi_i$ 、 $\omega_i$ 、 $Q_i$  和  $M_i$  分别为第  $i$  阶模态广义坐标、阻尼比、频率、广义力和广义质量,  $N$  为模态阶次。  $Q_i$  和  $M_i$  的具体计算表达式为

$$Q_i = \varphi_i^T F, \quad M_i = \varphi_i^T M \varphi_i \quad (10)$$

其中,  $\varphi_i$  为第  $i$  阶模态, 对每个节点来说包含三个振型  $W_{xi}$ 、 $W_{yi}$ 、 $W_{zi}$  和三个振型斜率  $W'_{xi}$ 、 $W'_{yi}$ 、 $W'_{zi}$ 。由于这里只是采用有限元法描述箭体弹性变形而不是刚体位移, 故式(9)中不考虑前 6 阶零频模态。按照和前面相同的方法求出作用在箭体上各种力的广义力, 最后将各种广义力全部加在式(9)右边, 经整理可得弹性振动方程为

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = & D_{1i}^\varphi \Delta \dot{\varphi} + D_{2i}^\varphi (\Delta \alpha + \alpha_w) + D_{1i}^\psi \Psi + D_{2i}^\psi (\beta + \beta_w) + D_{3i}^\varphi \Delta \delta_\varphi \\ & + D_{3i}^{\varphi\varphi} \Delta \delta_\varphi + D_{3i}^\psi \delta_\psi + D_{3i}^{\psi\psi} \dot{\delta}_\psi + d_{3i} \delta_\gamma + d_{3i}^{\gamma\gamma} \dot{\delta}_\gamma + Q_{\dot{y}} + Q_{\dot{z}} + Q_{\dot{in}} + Q_{\dot{in}} \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $D_{1i}^\varphi \Delta \dot{\varphi}$  和  $D_{1i}^\psi \Psi$  分别代表气动阻尼力和广义力,  $D_{2i}^\varphi (\Delta \alpha + \alpha_w)$  和  $D_{2i}^\psi (\beta + \beta_w)$  分别代表气动力和风干扰广义力,  $D_{3i}^\varphi \Delta \delta_\varphi$  和  $D_{3i}^{\varphi\varphi} \Delta \dot{\delta}_\varphi$  分别表示俯仰方向推力和摆动广义力, 同理  $D_{3i}^\psi \delta_\psi$ 、 $D_{3i}^{\psi\psi} \dot{\delta}_\psi$  和  $d_{3i} \delta_\gamma$ 、 $d_{3i}^{\gamma\gamma} \dot{\delta}_\gamma$

分别表示偏航项和滚动向的推力和摆动惯性力的广义力;  $Q_{iy}$ 、 $Q_{iz}$  和  $Q_{in}$  为三方向结构干扰广义力。系数  $D_{1i}^\varphi$ 、 $D_{2i}^\varphi$ 、 $D_{3i}^\varphi$ 、 $D_{3i}^{\prime\prime}$ 、 $D_{1i}^\psi$ 、 $D_{2i}^\psi$ 、 $D_{3i}^\psi$ 、 $D_{3i}^{\prime\prime\psi}$ 、 $d_{3i}$ 、 $d_{3i}^{\prime\prime}$  和结构干扰广义力  $Q_{iy}$ 、 $Q_{iz}$ 、 $Q_{in}$  与芯级一维梁和助推一维梁振型  $W_{yi}$ 、 $W_{zi}$ 、 $W'_{xi}$  及振型斜率  $W'_{yi}$ 、 $W'_{zi}$  有关, 与模态纵向分量  $W_{xi}$  无关。  $Q_{ix}$  与  $W_{xi}$  有关, 且

$$Q_{ix} = \left[ \int_0^L m(x) n_x g_0 W_{xi}(x) dx - n_{xj} P_{yj} W_{xi}(x_{Rj}) + \sum_k \left[ \int_0^{L_{kzt}} m_{kzt}(x) n_x g_0 W_{kxi}(x) dx - n_{kzt} P_{zt} W_{kxi}(x_{Rk}) \right] \right] / M_i \quad (12)$$

其中,  $m(x)$  和  $W_{xi}(x)$  分别为芯级上距理论尖端点  $x$  处的线密度和模态纵振分量;  $L$ 、 $n_{yj}$ 、 $P_{yj}$ 、 $W_{xi}(x_{Rj})$  分别为芯级箭体长度、发动机台数, 单台推力和铰链轴处模态纵振分量;  $m_{kzt}(x)$  和  $W_{kxi}(x)$  分别为第  $k$  个助推上距理论尖端点  $x$  处的线密度和模态纵振分量;  $L_{kzt}$ 、 $n_{kzt}$ 、 $P_{zt}$ 、 $W_{kxi}(x_{Rk})$  分别为第  $k$  个助推上箭体长度、发动机台数、单台推力和铰链轴处模态纵振分量;  $n_x$ 、 $g_0$  分别为轴向过载系数和海平面重力加速度;  $M_i$  为第  $i$  阶模态的广义质量。同样根据运动学和动力学的相关知识推导可得刚体运动方程为

$$\begin{cases} \Delta \dot{\varphi} + b_1^\varphi \Delta \varphi + b_2^\varphi (\Delta \alpha + \alpha_w) + b_3^{\prime\prime\varphi} \Delta \dot{\delta}_\varphi + b_3^\varphi \Delta \delta_\varphi + \sum_{i=1}^N (b_{1i}^\varphi q_i + b_{2i}^\varphi q_i) = M_{BZ} \\ \Delta \dot{\theta} = c_1^\varphi \Delta \alpha + c_2^\varphi \Delta \theta + c_4^\varphi \Delta \varphi + c_3^{\prime\prime\varphi} \Delta \dot{\delta}_\varphi + c_3^\varphi \Delta \delta_\varphi + \sum_{i=1}^N (c_{1i}^\varphi q_i + c_{2i}^\varphi q_i) + c_1^{\prime\varphi} \alpha_w - F_{BY} \\ \dot{\Psi} + b_1^\psi \Psi + b_2^\psi (\beta + \beta_w) + b_3^{\prime\prime\psi} \dot{\delta}_\psi + b_3^\psi \delta_\psi + \sum_{i=1}^N (b_{1i}^\psi q_i + b_{2i}^\psi q_i) = M_{BY} \\ \dot{\sigma} = c_1^\psi \beta + c_2^\psi \sigma + c_4^\psi \Psi + c_3^{\prime\prime\psi} \dot{\delta}_\psi + c_3^\psi \delta_\psi + \sum_{i=1}^N (c_{1i}^\psi q_i + c_{2i}^\psi q_i) + c_1^{\prime\psi} \beta_w - F_{BZ} \\ \dot{Y} + d_1 Y + d_3^{\prime\prime} \dot{\delta}_Y + d_3 \delta_Y + \sum_{i=1}^N (d_{1i} q_i + d_{2i} q_i) = M_{BX} \end{cases} \quad (13)$$

惯组和速率陀螺测量方程为

$$\begin{cases} \Delta \varphi_{gz} = \Delta \varphi - \sum_{i=1}^N W'_{zi}(x_{gi}) q_i \\ \Delta \varphi_{gt} = \Delta \varphi - \sum_{i=1}^N W'_{zi}(x_{st}) q_i \end{cases} \begin{cases} \Psi_{gz} = \Psi - \sum_{i=1}^N W'_{yi}(x_{gi}) q_i \\ \Psi_{gt} = \Psi - \sum_{i=1}^N W'_{yi}(x_{st}) q_i \end{cases} \begin{cases} Y_{gz} = Y - \sum_{i=1}^N W'_{xi}(x_{gz}) q_i \\ Y_{gt} = Y - \sum_{i=1}^N W'_{xi}(x_{st}) q_i \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $N$  为模态阶数, 由于新模型基于空间模态, 通常需要考虑较多阶模态, 如 28 阶。式(11)~(14)中弹性系数  $b_{1i}^\varphi$ 、 $b_{2i}^\varphi$ 、 $c_{1i}^\varphi$ 、 $c_{2i}^\varphi$ 、 $b_{1i}^\psi$ 、 $b_{2i}^\psi$ 、 $c_{1i}^\psi$ 、 $c_{2i}^\psi$ 、 $d_{1i}$ 、 $d_{2i}$  与全箭的振型  $W_{yi}$ 、 $W_{zi}$ 、 $W'_{xi}$  和振型斜率  $W'_{yi}$ 、 $W'_{zi}$  有关, 与  $W_{xi}$  无关。可见新的模型中完全考虑了芯级和助推模态中的弯曲振型  $W_{yi}$ 、 $W_{zi}$  和振型斜率  $W'_{yi}$ 、 $W'_{zi}$ 、扭转振型  $W'_{xi}$  和模态纵向分量  $W_{xi}$ , 是对捆绑火箭复杂空间弹性振动的一种完整描述。

## 2 两种弹性振动建模方法下数学模型比较

由式(3)~(7)组成的姿态动力学模型称为模型 1, 由式(11)~(14)组成的姿态动力学模型称为模型 2。由于弹性振动建模方法的不同, 可以发现两种模型存在以下差别:

模型 1 中弹性振动方程形式上有三种, 分别对应俯仰弯曲振动、偏航弯曲振动和扭转振动, 对应三种广义坐标  $q_\varphi$ 、 $q_\psi$ 、 $q_{in}$ , 所取的模态阶数分别为  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$ 。三种弹性振动方程分别进入俯仰、偏航和滚动三通道的姿控系数设计中, 三通道之间相互解耦, 可分别按照单输入单输出系统来设计。而模型 2 中弹性振动方程形式上只有一种, 对应一种广义坐标  $q_i$ , 对应捆绑火箭第  $i$  阶整体弹性振动, 所取模态阶数为  $N$ 。此时弹性振动方程同时包含助推和芯级各种纵、横、扭振动, 同时进入三通道控制系统设计中, 导致三通道相互耦合, 需要按照多输入多输出系统来设计。

模型 1 用芯级的模态来近似整体火箭的模态, 实际上是忽略了助推器的局部振动, 并且认为将捆绑火箭的弯曲振动和扭转振动分隔开来, 并且忽略了箭体的纵向振动, 是对捆绑火箭弹性振动的一种不完整描述。而模型 2 则同时考虑了芯级和助推的模态, 利用了整体火箭模态的所有分量, 不仅计入了助推

的局部变形模态,而且还体现了助推和芯级之间的纵、横、扭耦合振动特征,是对捆绑火箭振动的一种完整描述。

实际上一维梁理论和有限元法也存在内在的联系。对于可抽象为一维梁的串联火箭而言,同样可列出形如式(8)的有限元方程。此时质量矩阵  $M$  和刚度矩阵  $K$  中对应纵振、扭转和弯曲振动自由度的行和列之间相互独立,如果交换相关的行和列并对  $X$  和  $F$  重新排列,可将  $M$ 、 $K$  变成分块矩阵。如将对纵振自由度  $u_x$  的行和列单独挑出来,可写成矩阵方程

$$M_x \ddot{\delta}_x + C_x \dot{\delta}_x + K_x \delta_x = P_x \quad (15)$$

它描述火箭的纵向振动。同理可写出扭转振动、俯仰弯曲振动和偏航弯曲振动的矩阵方程

$$M_n \ddot{\delta}_n + C_n \dot{\delta}_n + K_n \delta_n = P_n, M_y \ddot{\delta}_y + C_y \dot{\delta}_y + K_y \delta_y = P_y, M_z \ddot{\delta}_z + C_z \dot{\delta}_z + K_z \delta_z = P_z \quad (16)$$

同样采用振型叠加法,对式(15)、(16)进行解耦,可得

$$\begin{cases} \ddot{q}_{ix} + 2\xi_{ix}\omega_{ix}q_{ix} + \omega_{ix}^2 q_{ix} = Q_{ix}/M_{ix} \\ \ddot{q}_{iy} + 2\xi_{iy}\omega_{iy}q_{iy} + \omega_{iy}^2 q_{iy} = Q_{iy}/M_{iy} \\ \ddot{q}_{iz} + 2\xi_{iz}\omega_{iz}q_{iz} + \omega_{iz}^2 q_{iz} = Q_{iz}/M_{iz} \end{cases} \quad (17)$$

可见式(17)后三式与式(1)形式上一致。也就是说有限元也可以用来对传统串联火箭进行弹性振动建模。

### 3 基于新模型的捆绑火箭姿控系统设计

如前所述,对新模型(模型2)必须采用多输入多输出系统的设计方法进行控制器设计。为此将姿态模型写成状态空间形式,将状态变量、输入向量、外干扰向量、输出量依次取为

$$X = [\Delta\psi \quad \Delta\varphi \quad \Delta\theta \quad \Psi \quad \Psi \quad \sigma \quad \nu \quad \nu \quad q_{\nu}^{\circ} \quad q_{\nu}^{\psi} \quad \dots \quad q_{\nu}^{\psi} \quad q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T \quad (18)$$

$$U = [\Delta\delta_{\psi} \quad \delta_{\psi} \quad \delta_{\nu}]^T \quad (19)$$

$$W = [a_w \quad \beta_w \quad F_{BY} \quad F_{BZ} \quad M_{BX} \quad M_{BY} \quad M_{BZ} \quad Q_{iy} \quad Q_{iz} \quad Q_{in} \quad Q_{ix}]^T \quad (20)$$

$$Y = [\Delta\psi_{st} \quad \Delta\varphi_{st} \quad \Psi_{st} \quad \Psi_{st} \quad \nu_{st} \quad \nu_{st}]^T \quad (21)$$

模型2可写成如下状态空间形式:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU + FW \\ Y = CX \end{cases} \quad (22)$$

其中,  $T$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $F$  为相应维数系数矩阵。姿控系统设计不考虑外干扰  $W$  的影响( $W$  的影响通过系统稳定裕度来保证),这样箭体开环传递函数矩阵为

$$G_0(s) = C(sI - T^{-1}A)^{-1}T^{-1}B \quad (23)$$

$G_0(s)$  为  $6 \times 3$  严真有理分式矩阵。运载火箭姿控系统结构如图3所示,其中  $G_2(s)$  为惯组和速率陀螺特性传递函数矩阵,为  $6 \times 6$  有理分式矩阵;  $K_1(s)$  为动态补偿器(校正网络)传递函数矩阵,  $G_{cn}(s)$  为伺服机构特性传递函数矩阵,均为  $3 \times 3$  有理分式矩阵;  $K_{PD}(s)$  为静动态增益构成的矩阵。其中

$$K_1(s) = \begin{bmatrix} W_{g^{\circ}}(s) & 0 & 0 \\ 0 & W_{g^{\psi}}(s) & 0 \\ 0 & 0 & W_{g^{\nu}}(s) \end{bmatrix} \quad K_{PD}(s) = \begin{bmatrix} a_1^{\circ} & a_0^{\circ} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{\psi} & a_0^{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1^{\nu} & a_0^{\nu} \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中,  $W_{g^{\circ}}(s)$ 、 $W_{g^{\psi}}(s)$ 、 $W_{g^{\nu}}(s)$  分别为俯仰、偏航、滚动三通道的校正网络;  $a_0^{\circ}$ 、 $a_1^{\circ}$  为俯仰通道静动态增益系数,相应的偏航为  $a_0^{\psi}$ 、 $a_1^{\psi}$ ,滚动为  $a_0^{\nu}$ 、 $a_1^{\nu}$ 。

多变量系统常用频域设计方法较多,其中比较实用的是逆 Nyquist 阵列(Inverse Nyquist Array, INA)法<sup>[9]</sup>,INA 法基本思想是:在被控对象前或后加入预补偿矩阵,使开环逆传递函数矩阵成为对角优势阵,将多变量系统的设计问题转化为一组单变量系统进行设计,最后对每个通道设计动态补偿器进行控制。鉴于 INA 法具有稳定性容易判断、便于设计、易于工程实现等优点,已在倾斜转弯(BIT)导弹自动驾驶仪<sup>[10]</sup>等领域有所应用,本文尝试采用 INA 法进行捆绑火箭姿控系统设计。INA 法要求被控对象传递函数矩阵为方阵,为此令  $T_1^{\circ} = a_1^{\circ}/a_0^{\circ}$ ,  $T_1^{\psi} = a_1^{\psi}/a_0^{\psi}$ ,  $T_1^{\nu} = a_1^{\nu}/a_0^{\nu}$ ,当  $T_1^{\circ}$ 、 $T_1^{\psi}$  和  $T_1^{\nu}$  取预先给定值(如 0.4)时,

令  $K_{PD}(s) = FG_{PD}(s)$ , 此时可将  $G_0$ 、 $G_{cn}$ 、 $G_2$  和  $G_{PD}$  合成为广义被控对象  $Q(s)$ , 其中常值对角反馈增益矩阵  $F = \text{diag}\{a_0^\varphi, a_0^\psi, a_0^\gamma\}$ ,  $G_{PD}$  和  $Q(s)$  分别为

$$G_{PD}(s) = \begin{bmatrix} T_1^\varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1^\psi & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & T_1^\gamma \end{bmatrix} \quad Q(s) = G_{PD}(s) G_2(s) G_0(s) G_{cn}(s) = \begin{bmatrix} q_{11}(s) & & & & & \\ q_{21}(s) & q_{12}(s) & & & & \\ q_{31}(s) & q_{32}(s) & q_{23}(s) & & & \\ & & & q_{33}(s) & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \quad (25)$$

其中  $q_{11}(s)$  为俯仰通道主传递函数,  $q_{21}(s)$  为俯仰通道输入引起偏航通道输出的耦合传递函数, 即俯仰-偏航耦合传递函数, 其他传递函数含义依次类推。经过以上变换, 将姿控系统结构转化为图 4 所示结构, 其中将控制器  $K_1(s)$  分为补偿器  $K_g(s)$  和预补偿器  $K_p(s)$ , 即  $K_1 = K_p K_g$ , 需要设计的量为  $F$ 、 $K_p$  和  $K_g$ 。以下来判断  $Q(s)$  的对角优势性质。

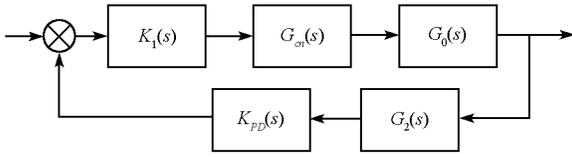


图 3 姿控系统框图

Fig. 3 Block diagram of attitude control system

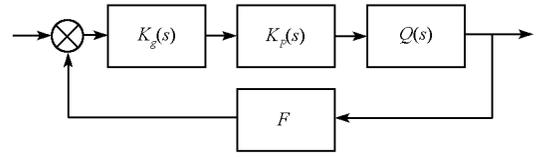


图 4 控制结构图

Fig. 4 Control structure diagram

对  $m \times m$  型有理函数矩阵  $Q(s)$ , 元素为  $q_{ij}(i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m)$ , 定义对角优势度为

$$ND = 20 \lg \sum_{j \neq i}^m \frac{|q_{ij}(s)|}{|q_{ii}(s)|} \quad \text{或} \quad ND = 20 \lg \sum_{j \neq i}^m \frac{|q_{ij}(s)|}{|q_{ii}(s)|} \quad (26)$$

单位为分贝(dB)。如果  $Q(s)$  在 Nyquist D 围线上满足  $ND < 0$ , 则称  $Q(s)$  为对角优势矩阵, 其中满足前式时称为行对角优势矩阵, 满足后式时称为列对角优势矩阵。 $ND$  越大, 对角优势越不明显。

以某型捆绑火箭气动不稳定力矩最大时刻为例分析广义被控对象  $Q(s)$  的对角优势性质。计算  $Q(s)$  时取  $T_1^\varphi = T_1^\psi = T_1^\gamma = 0.4$ , 此时  $Q(s)$  有四个不稳定极点, 分别为 0.01、0.01、0.5479 和 0.5844。在设计频段  $\omega = 0.01 \sim 100 \text{ rad/s}$  时,  $Q(s)$  行对角优势度随  $\omega$  的变化情况如图 5 所示。可以看出, 三行的对角优势度均满足  $ND < 0$  的条件, 为对角优势矩阵。对其它飞行时刻进行验算, 同样发现  $Q(s)$  为对角优势矩阵。因此前置预补偿器  $K_p$  可取为单位矩阵,  $K_g = K_1$ 。通过设计, 最终选取反馈增益矩阵为  $F = \text{diag}\{1.3, 1.3, 0.72\}$ , 三通道动态补偿器  $K_g$  (校正网络) 为高阶传递函数, bode 图见图 6。此时闭环系统的阶跃响应如图 7 所示, 可以看出主对角线上的三通道阶跃响应具有较好性能, 同时通道间耦合响应也能得到有效抑制。

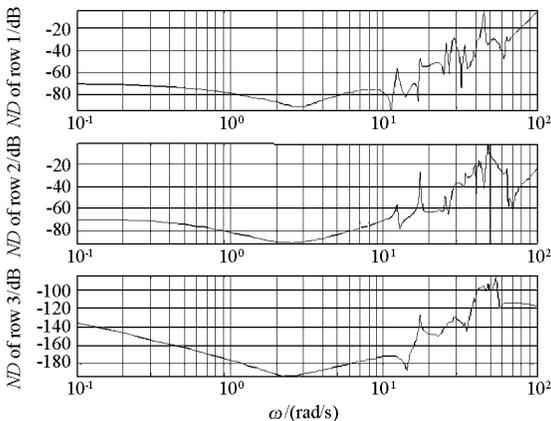
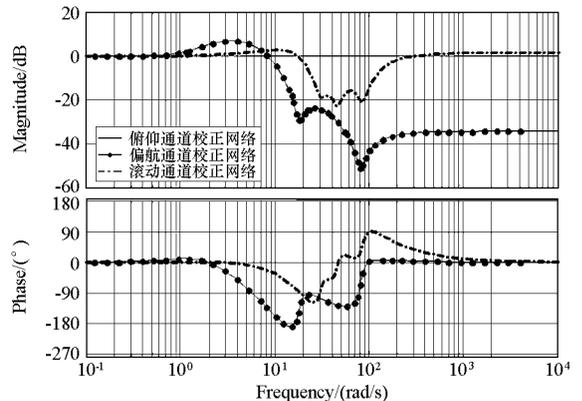
图 5  $Q(s)$  的行对角优势度图Fig. 5 ND of row dominance for  $Q(s)$ 

图 6 三通道校正网络 bode 图

Fig. 6 Bode diagram of three channel compensators

## 4 仿真算例

仍以上述构型捆绑火箭为例,基于新模型和逆 Nyquist 阵列法设计了控制器参数,采用专业仿真平台进行变系数时域仿真。经检验发现设计的控制器也能使基于传统模型(模型 1)的控制对象实现稳定。在这种保持控制参数相同的情况下,将传统俯仰单通道、偏航单通道仿真得到的头部点法向位移  $U_y$  和横向位移  $U_z$  与基于新模型的仿真结果进行对比,如图 8 所示,可见,基于新模型计算的位移要相对大一些。传统模型无法计算纵向位移,而新模型可以计算,这主要得益于新模型可以反映火箭的纵横扭耦合运动。限于篇幅,其他仿真结果就不再一一对比。

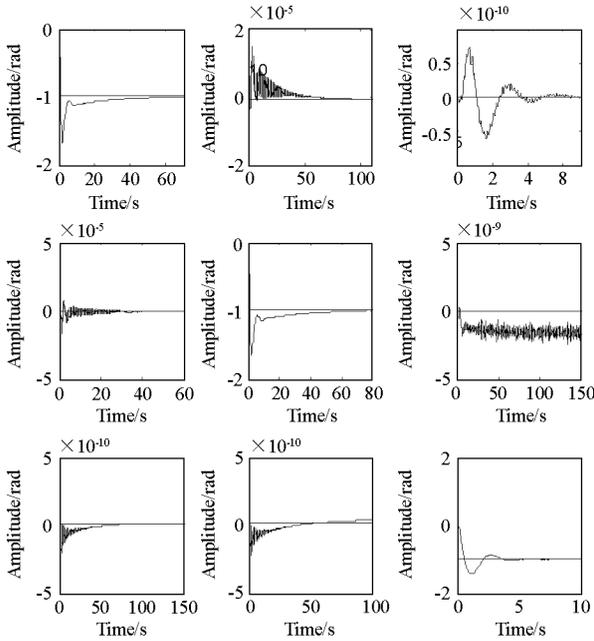


图 7 系统阶跃响应曲线  
Fig. 7 Step response of the system

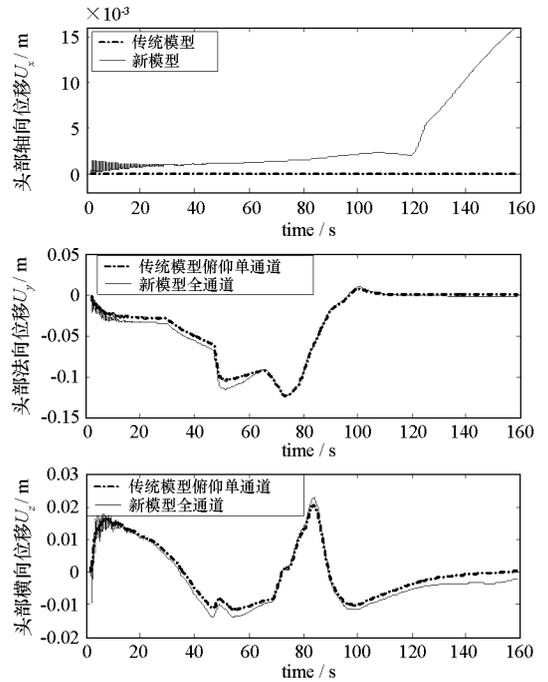


图 8 两种模型仿真曲线对比  
Fig. 8 Compare of two models simulation results

## 5 结论

对两种捆绑火箭弹性振动建模方法进行了对比分析,指出了两者的区别和联系,在此基础上推导建立了某型长助推固体捆绑火箭姿态动力学模型,模型中弹性振动方程基于有限元法导出,能够充分反映火箭的纵横扭耦合运动。分析发现,虽然新模型的三通道之间存在弹性耦合,但耦合矩阵具有对角优势性质,本文采用逆 Nyquist 阵列法设计了相应的控制器,仿真结果表明该控制器能得到较好的性能。上述结论对于大型捆绑火箭姿控系统的分析与设计具有一定参考价值。

## 参考文献:

- [1] 徐延万. 液体弹道导弹与运载火箭系列——控制系统(上、中、下册)[M]. 北京: 宇航出版社, 1989.
- [2] Greensite A L. Analysis and Design of Space Vehicle Flight Control System. [M]. New York: Spartan Books, 1970.
- [3] Wei Du, Wie B, Whorton M. Dynamic Modeling and Flight Control Simulation of a Large Flexible Launch Vehicle[C]// AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, 2008. Honolulu, Hawaii, AIAA 2008- 6620, 2008.
- [4] 于海昌, 贾文成, 卫国, 等. 大型捆绑火箭模态试验/分析的相关性研究[J]. 导弹与航天运载技术, 1993(2): 42- 52.
- [5] 谭志勇, 王毅, 王明宇. 针对未来大运载火箭的缩比模型动特性仿真研究[J]. 强度与环境, 2002, 29(4): 11- 18.
- [6] 李新国. 大型捆绑运载火箭动力学与故障仿真[D]. 西安: 西北工业大学, 1997.
- [7] 杨云飞, 李家文, 陈宇, 等. 大型捆绑火箭姿态动力学模型研究[J]. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39(3): 490- 499.
- [8] 赵汉元. 大气飞行器姿态动力学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1987.
- [9] Rosenbrock H H. Computer-aided Control System Design[M]. New York: Academics Press, 1974.
- [10] 郑建华, 栾泽威, 崔平远, 等. Bt 导弹自动驾驶仪多变量频域设计方法[J]. 宇航学报, 1994, 15(3): 24- 29.