

文章编号: 1001- 2486(2010) 04- 0061- 07

# 基于双二体假设的载人登月混合轨道特性分析及设计\*

黄文德<sup>1</sup>, 郝晓宁<sup>2</sup>, 王 威<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073;

2. 国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 混合轨道是载人登月轨道的重要类型之一。利用混合轨道的组成特点, 提出在双二体假设下以自由返回轨道为基础的混合轨道计算方法。主要对混合轨道的特性进行分析, 给出混合轨道在能量消耗和飞行时间等方面的特性。在涉及月球运动的计算时, 考虑月球运动的非圆性, 对传统双二体假设略作修改。给出混合轨道的设计实例, 仿真结果验证了本文提出方法的有效性。

**关键词:** 载人登月; 混合轨道; 特性分析; 双二体假设

**中图分类号:** V412.4    **文献标识码:** A

## Characteristic Analysis and Design of Hybrid Trajectory for Manned Lunar Landing Mission Based on Double Two-body Model

HUANG Wen-de<sup>1</sup>, XI Xiao-ning<sup>2</sup>, WANG Wei<sup>1</sup>

(1. College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Hybrid trajectory is one of the most important trajectory types for manned lunar landing mission. Using the componential characteristic of hybrid trajectory, a hybrid trajectory calculation method based on free return trajectory was proposed under double two-body model. Then, the major characteristics of hybrid trajectory were analyzed, such as energy requirement and time of flight. A little modification was made when calculating the ephemeris of the Moon, in which the Moon motion around Earth was considered as noncircular orbit instead of circular orbit. Finally, a design example was presented while the results of the simulation validate the method proposed.

**Key words:** manned lunar landing mission; hybrid trajectory; characteristic analysis; double two-body model

满足载人登月的轨道有两类:“自由返回”轨道(Free Return Trajectory)和“混合”轨道(Hybrid Trajectory)<sup>[1]</sup>。其中,自由返回轨道在无近月点月球捕获机动的情况下,环绕月球后将返回到地球。若飞船在飞行过程中发生故障(如美国的载人飞船 Apollo 13),无需进行变轨,继续沿自由返回轨道飞行,就可安全返回地球。但是该类轨道受倾角约束条件限制,可访问的区域只限于月球赤道附近<sup>[1-2]</sup>。混合轨道由自由返回轨道和非自由返回轨道组成。由于非自由返回轨道在理论上不受倾角限制,其设计也较为灵活,可以为载人登月在飞行任务、着月点、飞行时间等方面提供更多的选择,因此得到广泛应用。美国载人飞船 Apollo 12、13、14 等飞行轨道就是混合轨道<sup>[3-4]</sup>。

关于载人登月轨道的设计和特性分析问题,文献[5]给出了在考虑任务中止(Mission Abort)约束下混合轨道的设计与优化问题,但只对设计和优化过程进行描述,未给出具体的模型。文献[6]提出利用最优化的方法设计自由返回轨道。文献[7]主要研究载人登月的任务中止轨道,其中也对自由返回轨道的特性进行了分析。由于混合轨道比自由返回轨道复杂,除了具有自由返回轨道一些特性(如飞行时间)外,其非自由返回轨道段的特性与自由返回轨道必将有所不同,因此,有必要对混合轨道的特性进行研究,为载人登月任务的顶层分析与设计提供参考,以提高任务设计的效率。

\* 收稿日期:2009- 12- 28

作者简介:黄文德(1981-),男,博士生。

## 1 考虑月球轨道非圆性的圆锥曲线拼接法

双二体假设也称为圆锥曲线拼接法<sup>[8-9]</sup>。传统的圆锥曲线拼接法将月球看成是在白道面内绕地心以地月距  $R_{EL} = 384\ 400\text{km}$  为半径作圆周运动的空间几何点,其轨道速度  $V_L = \sqrt{\mu_E/R_{EL}} = 1.018\text{km/s}$ ,其中,  $\mu_E$  为地球引力常数。月球影响球半径  $\rho_L = 66\ 200\text{km}$ 。但实际的月球运动是绕地球作椭圆运动,其椭圆轨道离心率的平均值为 0.0549。在离心率作用下,实际地月距与双二体假设下的地月距最大差约 2 万 km,最大速度差约 60m/s。尽管这种误差对于地心段而言仅为地月距的 5% 左右,但对于近月段,其误差则已经超过月球影响球半径的 30%,因此,不能忽略月球轨道的非圆性对月球探测器和载人登月轨道设计的影响。

设月球相对于地心的位置、速度矢量分别表示为  $\mathbf{r}_L^E = [x_L^E \ y_L^E \ z_L^E]^T$  和  $\mathbf{v}_L^E = [x_{\dot{L}}^E \ y_{\dot{L}}^E \ z_{\dot{L}}^E]^T$ , 入口点  $B$  相对于地心的位置、速度矢量分别表示为  $\mathbf{r}_B^E = [x_B^E \ y_B^E \ z_B^E]^T$  和  $\mathbf{v}_B^E = [x_{\dot{B}}^E \ y_{\dot{B}}^E \ z_{\dot{B}}^E]^T$ , 则有

$$\mathbf{r}_B^E = [x_B^E \ y_B^E \ z_B^E]^T = \mathbf{r}_B^L + \mathbf{r}_L^E = [\rho_L \cos \varphi_B \cos \lambda_B + x_L^E, \rho_L \cos \varphi_B \sin \lambda_B + y_L^E, \rho_L \sin \varphi_B + z_L^E]^T \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_B^E = [x_{\dot{B}}^E \ y_{\dot{B}}^E \ z_{\dot{B}}^E]^T = \mathbf{v}_B^L + \mathbf{v}_L^E = [x_{\dot{B}}^L + x_{\dot{L}}^E, y_{\dot{B}}^L + y_{\dot{L}}^E, z_{\dot{B}}^L + z_{\dot{L}}^E]^T \quad (2)$$

其中,  $\lambda_B$ 、 $\varphi_B$  分别为入口点的纬度和经度。给定入口点  $B$  的经度、纬度和到达入口点时刻(用于计算月球位置),则由式(1)即可得到入口点  $B$  相对于地心的位置矢量,只要再求得入口点  $B$  相对于地心的速度,即可完成曲线拼接。下文将给出入口点  $B$  地心速度的计算方法。

设入口点  $B$  月心速度的单位矢量为  $\hat{\mathbf{v}}_B^L = [l_B^L \ m_B^L \ n_B^L]^T$ , 则  $\mathbf{v}_B^L = \mathbf{v}_B^E - \mathbf{v}_L^E$  与矢量  $\mathbf{v}_B^L$  平行。单位矢量  $\hat{\mathbf{v}}_B^L$  的计算不涉及月球运动的非圆问题,其计算方法参见文献[8-9]。此处,由  $\mathbf{v}_B^L$  与  $\hat{\mathbf{v}}_B^L$  平行得

$$\frac{l_B^L}{x_{\dot{B}}^E - x_{\dot{L}}^E} = \frac{m_B^L}{y_{\dot{B}}^E - y_{\dot{L}}^E} = \frac{n_B^L}{z_{\dot{B}}^E - z_{\dot{L}}^E} \quad (3)$$

令  $m_0 = n_B^L/l_B^L$ ,  $n_0 = m_B^L/l_B^L$ , 由式(3)可得

$$z_{\dot{B}}^E = m_0(x_{\dot{B}}^E - x_{\dot{L}}^E) + z_{\dot{L}}^E \triangleq m_0 x_{\dot{B}}^E + z_0 \quad (4)$$

$$y_{\dot{B}}^E = n_0(x_{\dot{B}}^E - x_{\dot{L}}^E) + y_{\dot{L}}^E \triangleq n_0 x_{\dot{B}}^E + y_0 \quad (5)$$

其中,  $y_0 = -n_0 x_{\dot{L}}^E + y_{\dot{L}}^E$ ,  $z_0 = -m_0 x_{\dot{L}}^E + z_{\dot{L}}^E$ , 均只与月球的地心位置有关,视为已知量。

在地心段,由能量守恒和动量矩守恒,可以推导出关于  $x_{\dot{B}}^E$  的一元二次方程。详细推导过程与文献[8]相似。此处,省去推导过程,直接给出关于  $x_{\dot{B}}^E$  的一元二次方程:

$$c_1(x_{\dot{B}}^E)^2 + c_2 x_{\dot{B}}^E + c_3 = 0 \quad (6)$$

其中,  $c_1 = (r_A^E \cos \Theta_A)^2 p_0 + q_0$ ,  $p_0 = 1 + m_0^2 + n_0^2$ ,  $q_0 = (y_{BN_0}^E + x_B^E + z_{BM_0}^E)^2 - (r_B^E)^2 p_0$ ;

$$c_2 = (r_A^E \cos \Theta_A)^2 s_0 + t_0, \quad s_0 = 2(n_0 y_0 + m_0 z_0), \quad t_0 = 2(y_{BY_0}^E + z_{BZ_0}^E) \left( y_{BN_0}^E + x_B^E + z_{BM_0}^E \right) - (r_B^E)^2 s_0;$$

$$c_3 = u_0 - (r_A^E \cos \Theta_A)^2 [2\mu_E (r_B^E)^{-1} - 2\mu_E (r_E^A)^{-1} - y_0^2 - z_0^2], \quad u_0 = (y_{BY_0}^E + z_{BZ_0}^E)^2 - (r_B^E)^2 (y_0^2 + z_0^2);$$

$r_E^A$  为地月转移加速点  $A$  的地心距,  $\Theta_A$  为加速点  $A$  的航迹角。

解式(6)获得  $x_{\dot{B}}^E$  后,进而由式(4)、式(5)求出  $y_{\dot{B}}^E$ 、 $z_{\dot{B}}^E$ ,从而得到入口点  $B$  对地心速度矢量  $\mathbf{v}_B^E$  和对月心速度矢量  $\mathbf{v}_B^L$ 。

至此,入口点  $B$  相对地心的位置矢量  $\mathbf{r}_B^E$ 、速度矢量  $\mathbf{v}_B^E$  和相对月心的位置矢量  $\mathbf{r}_B^L$ 、速度矢量  $\mathbf{v}_B^L$  均已求出。将入口点  $B$  作为载人登月轨道的拼接点,向前,可以计算近月段轨道;向后,可以计算地心段轨道。即可求得所需的载人登月轨道。圆锥曲线拼接的其余步骤及方法可参见文献[8-9],此处不再详述。

## 2 混合轨道的组成及计算方法

### 2.1 混合轨道的组成

混合轨道由自由返回轨道段和非自由返回轨道段组成。在混合轨道中,飞船先沿自由返回轨道飞

行, 然后进行轨道转移机动(也称“混合机动”)进入非自由返回轨道, 其轨道的组成如图 1 所示。理论上, 若不增加额外的机动, 沿该轨道不能安全返回地球。但另一方面, 由于没有返回约束, 使得非自由返回轨道理论上不存在倾角限制, 且在到达月球的时间、可选择的着月点和地面测控等方面均具有较强的灵活性, 因此, 得到广泛的应用。图 1 中, 从加速点  $A$  到变轨点  $M$  的飞行时间用  $T_1$  表示, 在变轨点  $M$  处变轨所需速度冲量为  $\Delta V$ , 从变轨点  $M$  到入口点  $B$  的飞行时间用  $T_2$  表示。

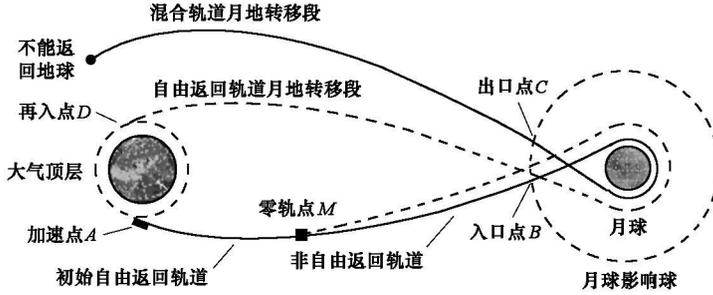


图 1 混合轨道示意图

Fig. 1 Sketch of hybrid trajectory

## 2.2 混合轨道的计算方法

由混合轨道的组成特点可知, 混合轨道的计算分两个阶段进行: 首先根据前述圆锥曲线拼接法进行自由返回轨道的设计, 得到自由返回轨道  $\sigma_0(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ , 该轨道进入月球影响球之前相对于地心惯性坐标系是椭圆轨道; 飞船在自由返回轨道上运行至变轨点  $M$ , 进行轨道机动进入非自由返回轨道。根据圆锥曲线拼接法设计自由返回轨道的方法可参考文献 [2]。下面给出在自由返回轨道的基础上, 设计混合轨道的方法。其基本点是通过设计从点  $A$  到点  $M$  的飞行时间  $T_1$  和变轨速度冲量  $\Delta V$ , 计算得到混合轨道。

设速度冲量  $\Delta V$  沿径向方向、切向方向和轨道法向的分量分别为  $\Delta v_r, \Delta v_t, \Delta v_n$ , 则轨道机动引起的轨道改变量  $\Delta \sigma(\Delta a, \Delta e, \Delta i, \Delta \Omega, \Delta \omega, \Delta M)$  为<sup>[8]</sup>:

$$[\Delta a, \Delta e, \Delta i, \Delta \Omega, \Delta \omega, \Delta M]^T = A [\Delta v_r, \Delta v_t, \Delta v_n]^T + [0, 0, 0, 0, -\cos i, n]^T \quad (7)$$

式中, 矩阵  $A$  具有如下形式:

$$A = \begin{bmatrix} 2e_0 \sin f \left[ n_0 \sqrt{1-e_0^2} \right]^{-1} & 2(1+e_0 \cos f) \left[ n_0 \sqrt{1-e_0^2} \right]^{-1} & 0 \\ \sqrt{1-e_0^2} \left[ n_0 a_0 \right]^{-1} \sin f & \sqrt{1-e_0^2} \left[ n_0 a_0 \right]^{-1} (\cos f + \cos E) & 0 \\ 0 & 0 & r \cos u \left[ n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2} \right]^{-1} \\ 0 & 0 & r \sin u \left[ n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2} \sin i_0 \right]^{-1} \\ -\sqrt{1-e_0^2} \left[ n_0 a_0 e_0 \right]^{-1} \cos f & \sqrt{1-e_0^2} \left[ n_0 a_0 e_0 \right]^{-1} \left( 1 + r/p_0 \right) \sin f & 0 \\ -\left[ 1-e_0^2 \right] \left[ n_0 a_0 e_0 \right]^{-1} \left( 2e_0 r/p_0 - \cos f \right) & -\left[ 1-e_0^2 \right] \left[ n_0 a_0 e_0 \right]^{-1} \left( 1 + r/p_0 \right) \sin f & 0 \end{bmatrix}$$

其中,  $n_0$  为轨道  $\sigma_0$  的平均运动角速率,  $p_0$  为轨道半通径,  $r$  为点  $M$  处的矢径模,  $f$  和  $E$  分别为点  $M$  处真近点角和偏近点角。

通过变轨得到轨道  $\sigma_1(a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1, M_1)$ , 在只考虑二体引力的情况下,  $\sigma_1(a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1, M_1)$  与  $\sigma_0(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$  之间的关系为

$$\sigma_1(a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1, M_1) = \sigma_0(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0) + \Delta \sigma(\Delta a, \Delta e, \Delta i, \Delta \Omega, \Delta \omega, n_0 T_1 + \Delta M) \quad (8)$$

用两种方法确定变轨所需速度冲量, 其中, 方法一为数值方法, 方法二为解析法。

(1) 方法一

设  $T_2$  为从  $M$  到入口点  $B$  的飞行时间, 则有

$$M_2 = M_1 + n_1 T_2 \quad (9)$$

其中,  $M_2$  为  $B$  点处平近点角,  $n_1$  为轨道  $\sigma_1$  的平均运动角速率。另一方面, 在入口点  $B$  处有

$$|\mathbf{r}_B^L| = |\mathbf{r}_B^E - \mathbf{r}_E^L| = \rho \quad (10)$$

利用上述圆锥曲线拼接法, 通过迭代计算即可求得  $T_2$  和  $B$  点的状态。由  $B$  点的状态, 容易得到近月点  $P$  的轨道根数。再由  $P$  点状态判断是否满足设计要求, 若不满足要求, 重新调整速度冲量  $\Delta V$  和飞行时间  $T_1$ , 重复上述步骤, 直到满足要求。

为了使所需能量最省, 即速度冲量的模  $|\Delta V|$  最小, 需要对上述步骤进行优化处理。结合近月距和对月倾角, 取目标函数为:

$$J = K_v |\Delta V| + K_r |r - r_0| + K_i |i - i_0| \quad (11)$$

其中,  $r$ 、 $r_0$  分别表示实际近月距和要求达到的近月距,  $i$ 、 $i_0$  分别表示实际相对月球的轨道倾角和要求达到的轨道倾角。  $K_v$ 、 $K_r$  和  $K_i$  为常数系数, 分别用于调整  $|\Delta V|$ 、 $|r - r_0|$  和  $|i - i_0|$  三者之间的权重。于是, 可以建立满足约束条件的最优化问题, 应用最优化方法进行求解, 即可得到满足约束条件的混合轨道。

## (2) 方法二

方法一是从机动变轨的速度冲量出发, 计算终端条件(近月距、对月轨道倾角等), 通过迭代计算得到满足终端条件的混合轨道。反过来, 也可以用逆推的方法, 由终端条件计算所需的速度冲量, 进而得到满足要求的混合轨道。此时, 可以把混合轨道看作是自由返回轨道经过一次中途修正后得到, 从而借助中途修正的方法对混合轨道进行设计。这也是有关文献将混合机动看作是一次中途修正的原因<sup>[3-4]</sup>。推导过程如下:

混合变轨后, 所得的近月距和对月倾角可以表示为

$$[r_0 + \Delta r, i_0 + \Delta i]^T = \mathbf{g} \left( \mathbf{M}_{Ll}^{LF} \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{M}_{El}^{Ll} \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \left[ \mathbf{r}_M^E, \mathbf{v}_{M0}^E + \Delta \mathbf{V} \right]^T \right) \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{S}_1$ 、 $\mathbf{S}_2$  为状态转移矩阵,  $\mathbf{M}_{El}^{Ll}$ 、 $\mathbf{M}_{Ll}^{LF}$  为坐标转换矩阵。  $\mathbf{S}_1$  表示将变轨点  $M$  的状态(变轨后状态)转移到入口点  $B$ ,  $\mathbf{M}_{El}^{Ll}$  表示将入口点  $B$  的状态从地心惯性坐标系转换到月心惯性坐标系;  $\mathbf{S}_2$  表示将入口点  $B$  的状态转移到近月点  $P$ ,  $\mathbf{M}_{Ll}^{LF}$  表示将近月点  $P$  的状态从月心惯性坐标系转换到月固坐标系;  $\mathbf{g}$  表示由近月点  $P$  的状态计算终端条件。

将式(12)进行线性展开, 由于变轨处位置不变(冲量假设), 故可将线性展开式写成关于  $\Delta V$  的增量形式, 即

$$[\Delta r \quad \Delta i]^T = \mathbf{G} \cdot \mathbf{M}_{Ll}^{LF} \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{M}_{El}^{Ll} \cdot \mathbf{S}_1 \cdot [0 \quad \Delta \mathbf{V}]^T \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{G}$  是  $r$  和  $i$  关于近月点状态的偏导数矩阵。于是可以由终端误差, 计算得到混合变轨所需的速度冲量:

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{S}_1^{-1} \cdot \left( \mathbf{M}_{El}^{Ll} \right)^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^{-1} \cdot \left( \mathbf{M}_{Ll}^{LF} \right)^{-1} \cdot \mathbf{G}^T \cdot \left( \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^T \right)^{-1} \cdot [\Delta r \quad \Delta i]^T \quad (14)$$

综合上述分析, 可以根据混合轨道与自由返回轨道在近月段的差值  $\Delta r$  和  $\Delta i$ , 求得混合变轨所需的速度冲量。

## 3 混合轨道特性分析

由上述分析可知, 与自由返回轨道相比, 混合轨道在近月距、近月轨道倾角上有所不同。混合轨道涉及的轨道机动就是为了改变近月距和近月轨道倾角。因此, 轨道机动所消耗的能量是关注的重点。

### (1) 轨道倾角改变与能量消耗的关系

混合轨道初始段是自由返回轨道, 若沿自由返回轨道达到月球, 则到达月球时相对月球的倾角被限制在赤道周围。因此, 为了使混合轨道到达月球的倾角增大, 就必须进行改变轨道倾角的机动。改变轨道倾角所需速度冲量与轨道倾角的改变量、变轨时刻之间的关系如图2所示。图2中, 横坐标表示从地月转移加速点起算的飞行时间  $T_1$ , 纵坐标表示满足相对月球轨道倾角所需的速度冲量  $\Delta V$ , 图中不同曲线表示不同的倾角改变量  $\Delta i$ 。图2中给出了  $\Delta i = [5^\circ, 65^\circ]$  区间内的情况,  $\Delta i > 65^\circ$  的情况也符合此规律, 但是由于能量消耗较大, 一般不宜采用。Apollo 计划中, 实施登月的 Apollo 11~ Apollo 17(除去未成

功登月的 Apollo 13) 对月表的探测范围也仅为南北纬  $30^\circ$ <sup>[10]</sup>。

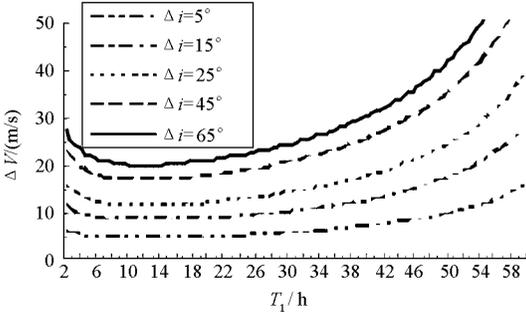


图 2 轨道倾角改变量与能量消耗之间的关系  
Fig. 2 The relationship between energy requirement and inclination change

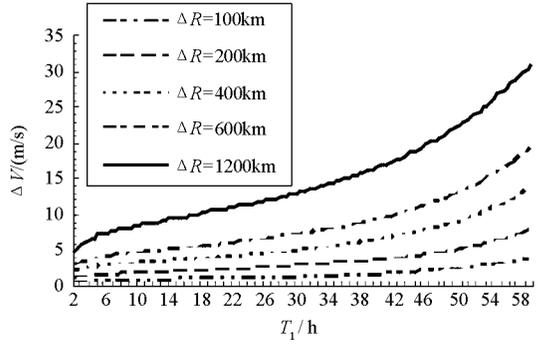


图 3 近月距改变量与能量消耗之间的关系  
Fig. 3 The relationship between energy requirement and perilune change

从图 2 可以看出, 倾角改变量越大, 所需速度冲量也越大; 同一倾角改变量, 随着  $T_1$  的增加, 所需速度冲量先减后增, 因此, 通过调整变轨时刻  $T_1$ , 可以求得所需速度冲量最小的变轨时刻。

(2) 近月距改变量与能量消耗的关系

由于初始自由返回轨道的近月距与任务要求的近月距一般不同, 且一般都比较低, 因此在进行混合轨道机动时, 除要进行轨道倾角的改变外, 还要考虑满足近月距约束, 进行降低轨道高度的机动。轨道倾角改变和近月距改变两者可以同时进行, 也可以单独进行。因为改变倾角的机动, 对近月距也有影响, 不失一般性, 下面给出倾角改变量为  $25^\circ$  时, 近月距改变量与能量消耗的关系, 如图 3 所示。由图 3 可知, 相对改变倾角所需能量消耗, 改变近月距所需的能量较少。只需要进行几  $m/s$  的速度改变量, 即可使近月距变化几百  $km$ 。

(3) 进入非自由返回轨道机动时机与能量消耗的关系

不同时刻由自由返回轨道变轨进入非自由返回轨道, 所需能量应不同。下面给定倾角改变量为  $25^\circ$ 、近月距改变量为  $400km$  时, 进入非自由返回轨道机动时机与能量消耗的关系, 如图 4 所示。

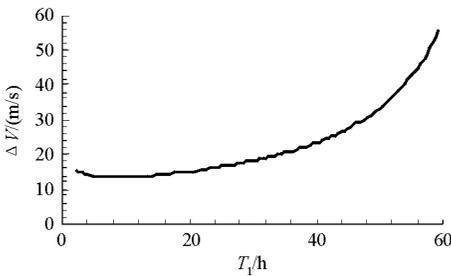


图 4 混合机动时机与能量消耗的关系  
Fig. 4 The relationship between energy requirement and the time of hybrid maneuver

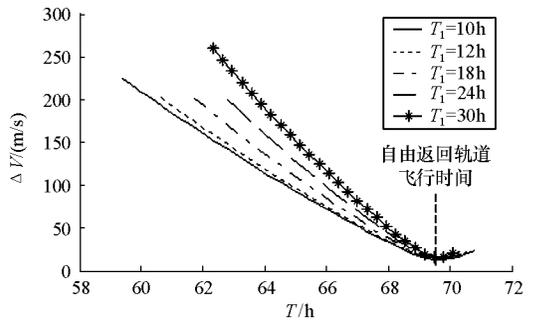


图 5 混合轨道的能量消耗和总飞行时间之间的关系  
Fig. 5 The relationship between energy requirement and the total time of flight

由图 4 可知, 随着  $T_1$  的增加, 从自由返回轨道进入混合轨道所需速度冲量先减后增, 所需速度冲量在  $10\sim 60m/s$ 。在 TLI(地月转移加速) 后  $10\sim 24h$  之内, 速度冲量较小, 且变化较为缓和, 可以选择在这段时间内进行轨道机动。

(4) 混合轨道的能量消耗和总飞行时间特性

在载人登月任务中, 一方面, 希望在整个飞行任务消耗的能量最小; 另一方面, 又希望飞行时间尽量短。能量和时间往往成为需要权衡的两个因素。下面给出不同  $T_1$  时刻进行机动变轨进入非自由返回轨道时, 混合轨道总的飞行时间(从 TLI 至近月点)和能量消耗的关系, 如图 5 所示。由图 5 可以得到混合轨道飞行时间的重要特性, 即混合轨道的总飞行时间等于自由返回轨道地月转移段的总飞行时间时,

混合轨道机动所消耗的能量最小。由于混合轨道的飞行时间由初始自由返回轨道段上的飞行时间和非自由返回轨道段上的飞行时间组成,因此,混合轨道的这一特性还可以表述为:当混合轨道在非自由返回轨道上的飞行时间与继续沿原自由返回轨道飞行所需的时间相等时,混合轨道机动所消耗的能量最小。

#### 4 仿真算例

首先,利用本文提出的考虑月球运动非圆性的圆锥曲线拼接法设计得到一条自由返回轨道,如表1所示。由表1可知,该自由返回轨道的近月距为1843.17km,对月倾角为174.5°。

表1 初始自由返回轨道根数

Tab.1 The orbital elements of initial free return trajectory

轨道段	$a(\text{km})$	$e$	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\omega(^{\circ})$	$f(^{\circ})$
1	298 472.314 703	0.977 960 6	28.487 010 2	357.828 609	356.547 696	0.0
2	-4307.303 292	1.428 150	174.517 515	207.464 078	22.087 756 7	0

注:(1)轨道段1为初始自由返回轨道地心段,轨道历元:2025 9 17 19:48:28.965(UTC);

(2)轨道段2为初始自由返回轨道月心段,轨道历元:2025 9 20 17:21:52.117(UTC),近月距1843.17km。

为了降低近月距,同时扩大月面探测范围,取 $r_0 = 1838\text{km}$ , $i_0 = 150^{\circ}$ 。运用本文提出的两种方法进行计算,其中,方法一对式(11)进行优化时,取 $K_v = 1$ , $K_r = 0.1$ , $K_i = 0.1$ ,则当 $T_1 = 10\text{h}$ 时,目标函数值取最小值 $J^* = 12.75$ 。此时,近月距 $r = 1838.14\text{km}$ ,对月倾角 $i = 149.9^{\circ}$ 。为了方便比较,方法二变轨点的取法与方法一相同。两种方法计算得到变轨所需速度冲量 $\Delta V$ 如表2所示。表2中, $\Delta v_r$ , $\Delta v_t$ , $\Delta v_n$ 分别为轨道坐标系下径向、切向和法向三个速度分量, $\Delta v_x$ , $\Delta v_y$ , $\Delta v_z$ 为J2000.0地心惯性坐标系下的三个速度分量。

表2 混合机动所需 $\Delta V$

Tab.2 The delta V requirement for hybrid maneuver

速度分量	$\Delta v_r(\text{m/s})$	$\Delta v_t(\text{m/s})$	$\Delta v_n(\text{m/s})$	$\Delta v_x(\text{m/s})$	$\Delta v_y(\text{m/s})$	$\Delta v_z(\text{m/s})$
方法一	0.0	-4.399 663	11.927 489	1.957 371	-2.340 749	12.341 459
方法二	0.000 13	-4.399 627	11.927 493	1.957 213	-2.340 708	12.341 483

由表2可以看出,由于只改变近月距和对月倾角,故 $\Delta v_r$ 约为零;近月距改变较小(仅6km),故 $\Delta v_t$ 较小;倾角改变较大(约25°),故 $\Delta v_n$ 较大。这些结果与特性分析的结论是吻合的,且两种方法计算结果相差仅约0.1mm/s。在该速度冲量作用下,计算得到的非自由返回轨道如表3所示。

表3 非自由返回轨道根数

Tab.3 The orbital elements of non-free return trajectory

轨道段	$a(\text{km})$	$e$	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\omega(^{\circ})$	$f(^{\circ})$
1	297 334.322 934	0.978 193 8	27.474 623 4	358.985 734 4	355.335 556	155.949 809 7
2	-4308.702 025	1.426 611 7	149.907 623	310.459 453	123.614 703	0

注:(1)轨道段1为非自由返回轨道地心段,轨道历元:2025 9 18 05:48:28.965(UTC);

(2)轨道段2为非自由返回轨道月心段,轨道历元:2025 9 20 17:16:39.167(UTC),近月距1838.14km。

为了验证其合理性,将上述结果输入STK,混合轨道在STK中的空间三维轨迹如图6所示。仿真结果表明,本文提出的方法是有效和正确的。

#### 5 结束语

仿真结果表明,从自由返回轨道出发,利用本文提出的能量最优方法可以设计得到满足月球探测要求的混合轨道。本文重点对混合轨道的特性进行了分析,结果表明,当混合轨道地月转移段总的飞行时

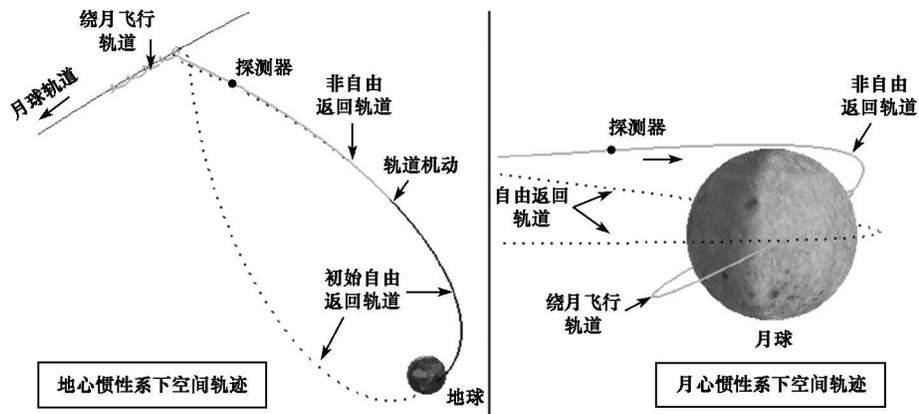


图6 STK 演示的混合轨道空间三维轨迹

Fig. 6 The spatial 3D trajectory of the hybrid trajectory in STK

间等于自由返回轨道地月转移段总的飞行时间时,混合轨道机动所消耗的能量最小。下一步,我们将结合发射窗口、地面测控和光照等约束条件对混合轨道的测控、机动变轨的时机和任务中止等问题进行分析。

## 参考文献:

- [1] Berry R L. Launch Window and Translunar Orbit, Lunar Orbit, and Transearth Trajectory Planning and Control for the Apollo 11 Lunar Landing Mission[C]//AIAA 8<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting, AIAA 70-0024, 1970.
- [2] 黄文德, 郝晓宁, 王威, 等. 基于双二体假设的载人登月自由返回轨道特性分析及设计[J]. 宇航学报, 2010, 31(5): 1297-1303.
- [3] Goodman J L. Apollo 13 Guidance, Navigation and Control Challenges[C]//AIAA SPACE 2009 Conference & Exposition, AIAA 2009-6455, 2009.
- [4] Adamo D R. Apollo 13 Trajectory Reconstruction via State Transition Matrices[J]. Journal of Guidance, Control, And Dynamics. 2008, 31(6): 1772-1781.
- [5] Bass R A. Optimization of hybrid trajectories for the Apollo Mission Under a DPS Abort Constraint[R]. NASA, 1969.
- [6] LIU Xing-long, DUN Guang-ren. Designs of Optimal Free-return Orbit for Moon Landing[C]//2007 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2007: 936-940.
- [7] Beksinski E D. Abort Trajectories for Manned Lunar Mission [D]. University of Maryland, 2007.
- [8] 郝晓宁, 王威, 高玉东. 近地航天器轨道基础[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2003: 193-206.
- [9] 郝晓宁, 曾国强, 任莹, 等. 月球探测器轨道设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001: 51-61.
- [10] Richard W O. Apollo by the Numbers: A Statistical Reference[R]. NASA SP-2000-4029, 2000: 294.