

文章编号: 1001- 2486(2010) 04- 0084- 04

基于压缩感知的多频率信号融合*

叶 钊, 何 峰, 梁甸农, 朱炬波

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:传统多频带雷达信号融合是利用多个连续采样的子带信号来重构全频带信号,从而提高距离向分辨力,改善一维距离像质量。但是由压缩感知原理可知,采样矩阵与测量矩阵不相关性越大,全频带信号就能重构得越好,因此理论上基于随机采样的信号融合的性能要优于基于多个连续采样的信号融合。基于压缩感知原理将传统的多频带融合问题推广为任意随机采样的信号重构问题,利用基追踪方法来重构全频率信号,并给出了能够高概率成功重构的充分条件。通过实验也证明了这种随机采样融合的优越性。

关键词:多频率雷达信号融合; 压缩感知; 信号重构; 基追踪

中图分类号: TN957 文献标识码: A

Multi-frequency Fusion Based on Compressive Sensing

YE Fan, HE Feng, LIANG Dian-nong, HU Ju-bo

(College of Electronic Science and Technology, National Univ. of Defense Engineering, Changsha 410073, China)

Abstract: Traditional multi-frequency radar signal fusion can reconstruct full-band signal from some continuous sampled sub-band signals, and can improve range resolution and quality of range profile. But by the theory of Compressive Sensing, the more the incoherence between sampled matrix and measurement matrix is, the better the full-band signal can be reconstructed. Therefore, the performance of signal fusion based on random sampling is better than that of fusion based on continuous sampled theoretically. In the current study, traditional multi-band signal fusion was extended to random sampled signal reconstruction, and Basic Pursuit was used for reconstructing full-frequency signal. Then, the sufficient condition of successful reconstruction with high probability was presented. The experimental results prove the advantage of this fusion method.

Key words: multi-frequency radar signal fusion; compressive sensing; signal reconstruction; basic pursuit

多频带雷达信号融合处理利用不同频带获取目标的一维雷达观测信号,通过信号级的稀疏频带相干融合,来提高雷达距离向分辨率^[1-3]。它打破了传统的单雷达成像距离分辨率受限于雷达带宽的约束,可明显地改善一维距离像质量。传统的多频带雷达信号融合技术主要基于谱估计方法,其中包含修正的 Root-MUSIC 方法^[2]、EMEMP 方法^[4]、状态空间方法^[5]以及 AR^[3]、ARIMA 方法^[6]等。1995 年,Chen 提出了用于信号稀疏表示的基追踪(BP)原理^[7],用 l_1 范数来替代 l_0 范数约束,在一个过完备的词典上寻找最稀疏的表示。2005 年,杜小勇将信号稀疏表示运用到多频带雷达信号融合中,提出了基于稀疏成分分析的多频带融合方法^[8]。在之前的研究中文献指出了 BP 方法在多频带信号融合中的局限性,并利用 AR 模型结合 BP 来融合多个频带信号^[9]。综合以上论述可知,目前多频带雷达信号融合技术都是基于多个连续采样的子带测量信号。

随着信号处理的发展,近几年来出现了一种新颖的理论,即压缩感知(CS)。CS 理论首先由 Candès^[10]、Romberg^[11]、Tao^[12]和 Donoho^[13]等人在 2004 年提出。文献[11]指出基于 CS 的信号重构存在确定解的充要条件即系统矩阵满足有限等距性质(RIP)。如果采样矩阵与测量矩阵不相干,则系统矩阵在很大概率上满足 RIP 性质。Donoho 给出系统矩阵所必须具备的三个条件,并指出大部分一致分布的随机矩阵都具备这三个条件,均可作为观测矩阵^[14]。

* 收稿日期: 2009- 12- 15

作者简介: 叶钊(1981-),男,博士生。

1 基于随机采样的信号重构系统模型

假设目标包含 K 个散射中心,则目标谱域信号的离散形式可以写为

$$E(n) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \exp\{-j2\pi\Delta f \tau_k n\} \quad (1)$$

其中, $n = 0, 1, \dots, N-1$, $\tau_k = 2r_k/c$ 和 α_k 分别为第 k 个散射中心的到参考点的时延和幅度, r_k 为散射中心到参考点的径向距离, c 为光速, Δf 为频率采样间隔。令 $\omega = \Delta f \tau_k$, 易知 $\omega \in [0, 1]$ 。

将数字频率离散化, 令 $\omega = m/M$, $m = 0, 1, \dots, M-1$, 上式还可以写成如下的矩阵形式:

$$E = \Phi \sigma \quad (2)$$

其中, $E = [E(0), E(1), \dots, E(N-1)]^T$ 为观测信号, $\sigma = [\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(M-1)]^T$ 为一维距离图像, $\Phi = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{M-1}]$ 为测量矩阵或者词典,

$$\varphi_m = [1, \exp\{-j2\pi m/M\}, \dots, \exp\{-j2\pi(N-1)m/M\}]^T \quad (3)$$

当 $M > N$ 时词典为过完备的, 当 $M < N$ 时词典为欠完备的。

假设本文的多频带雷达信号都已经完全相关, 那么多频子带雷达信号等价于全频带雷达信号的稀疏采样。不妨假设只有两段子频带雷达信号 E_1 和 E_2 , 频谱采样点数分别为 L_1 和 L_2 , 两个频带间隔 N_0 个采样点。 E_1 的起始采样与全频带信号的起始采样重合, 则多频带信号的系统模型可以写为

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = H \Phi \sigma = \Phi \sigma \quad (4)$$

其中采样矩阵

$$H = \begin{bmatrix} I_{L_1 \times L_1} & \mathbf{0}_{L_1 \times N_0} & \mathbf{0}_{L_1 \times L_2} & \mathbf{0}_{L_1 \times N - N_0 - L_1 - L_2} \\ \mathbf{0}_{L_2 \times L_1} & \mathbf{0}_{L_2 \times N_0} & I_{L_2 \times L_2} & \mathbf{0}_{L_2 \times N - N_0 - L_1 - L_2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中, I 为单位矩阵, $\mathbf{0}$ 为零阵。式(5)的系统模型可以推广到更多频带信号融合的情况。

确定采样可以看作是随机采样的一种特殊情况。假设随机采样的观测信号为 E_Ω , $\Omega \subset [0, 1, \dots, N-1]$ 为随机采样的索引集, 且 $\text{card}(\Omega) = N_\Omega$, 可得

$$E_\Omega = H_\Omega \Phi \sigma = \Phi_\Omega \sigma \quad (6)$$

其中, 由 Ω 决定的 $N_\Omega \times N$ 维采样矩阵

$$H_\Omega(n, m) = \begin{cases} 1 & n = k, m = \Omega_k, k = 1, 2 \dots N_\Omega \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (7)$$

2 CS 原理

如图 1 所示, 考虑长度为 N 的一维离散实信号 X , 实数空间的任何信号都可以用一组 N 维的基向量 $\Psi = [\Psi_1, \dots, \Psi_N]$ 线性表示。假设这些基是规范正交的, 则任意信号可以表示为

$$X = \Psi s \quad (8)$$

如果 s 中仅有 K 个元素不为零, 其它元素都为零, 则称 X 是 K 稀疏的。如果 s 中有少数元素很大, 而其它元素都很小, 则称 X 可压缩的。

显然, 这种传统的以奈奎斯特采样定理为准则的高速采样后再压缩的过程浪费了大量的采样资源。

压缩感知理论指出, 信号 X 在 Ψ 上是稀疏的, 如果用一个与 Ψ 不相关的观测矩阵 $\Phi_{M \times N}$ ($M \ll N$) 对系数向量进行线性变换, 并得到观测集合 Y , 那么就可以利用优化求解方法从观测集合中精确或高概率地重构信号 X , 且

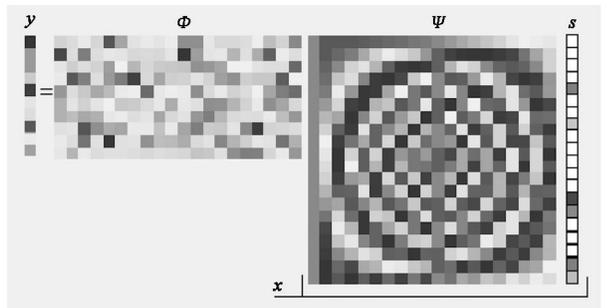


图 1 基于高斯随机观测矩阵和离散余弦基的压缩感知示意图
Fig. 1 Compressive sensing based on gaussian random observation matrix and discrete cosine basis

$$Y = \Phi \sigma \quad (9)$$

3 基于 CS 的多频率信号融合

实际上,多频带信号融合是对多部雷达在其工作频带上连续采样信号的融合,而全频带随机采样的多频率融合是对多部雷达在某个频点上采样信号的融合。如果有 P 部雷达,其工作频带采样数为 N_p (频带不重合),则对于全频带随机采样来说,就相当于有 $P \cdot N_p$ 部雷达,每部雷达在全频带随机采一个频点(采样不重复),因此两者从本质上是等价的。ISAR 的回波信号满足 K -稀疏特性和可压缩性,全频带随机采样数也小于全频带采样数,且采样矩阵是随机的,而且信号融合的目的就是要从较少的观测中恢复出全频带的信号。因此,全频带随机采样的多频率信号融合问题等价于压缩感知问题。综上所述,多频率信号融合问题等价于压缩感知问题(图 2)。

虽然式(6)是定义在复空间,而式(9)定义在实空间,但是复空间可以等价于两个实空间来进行处理。因此随机采样的多频率融合与压缩感知的系统模型是相统一的。

实际上式(6)中的 Φ_Ω 等价于部分傅立叶基^[19],由 Donoho 的理论知,部分傅立叶基在绝大部分情况都是满足 RIP 条件的。将随机采样的多频率融合问题表示为优化问题:

$$\begin{cases} P_0 \\ \min \|\sigma\|_0 \end{cases} \text{ s.t. } E_\Omega = \Phi_\Omega \sigma \quad (10)$$

由于 l_0 范数优化计算量很大,而且解不稳健,一般采用 l_1 范数优化:

$$\begin{cases} P_1 \\ \min \|\sigma\|_1 \end{cases} \text{ s.t. } E_\Omega = \Phi_\Omega \sigma \quad (11)$$

由基追踪理论可以知道,只有满足

$$\|\sigma\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M(G)} \right) \triangleq C \quad (12)$$

$\begin{cases} P_0 \\ \end{cases}$ 问题的唯一解才等价于 $\begin{cases} P_1 \\ \end{cases}$ 问题的唯一解。其中定义 $M(G) = \max_{i \neq j} |G_{i,j}|$ 为 Φ_Ω 的互相干度量, $G = \Phi_\Omega^H \Phi_\Omega$ 。

当多子带信号融合推广到随机采样的信号融合时,根据压缩感知的理论给出如下的定理:

定理 1^[12] 假设长度为素数 N 的原始信号 E 是 K 稀疏的,随机采样的信号 E_Ω 频带支撑区为 Ω ,则满足如下的不等式

$$K \leq \frac{1}{2} \text{card}(\Omega) \quad (13)$$

可以用 E_Ω 来重构 E 。

定理 2^[12] 假设长度为 N 的原始信号 E 是 K 稀疏的,随机采样的信号 E_Ω 频带支撑区为 Ω ,则满足如下的不等式

$$K \leq C_B \cdot (\lg N)^{-1} \cdot \text{card}(\Omega) \quad (14)$$

在高概率 $1 - O(N^{-B})$ 下 $\begin{cases} P_1 \\ \end{cases}$ 问题的解是唯一的且能够等价于 E 。

4 仿真实验

假设原始信号 E 长度为 512,目标在第 230, 244, 250, 256, 258 个距离单元处有散射点,散射强度均为 1。首先选择 E 的前 10 个采样点作为低频带信号,最后 10 个采样点作为高频带信号,利用 BP 算法来进行多频率信号融合。另外随机选择 E 中的 20 个采样点,随机选择满足均匀分布,同样也利用 BP 算法来进行信号重构,图 3 为处理结果。

图 3 的上图为原始信号的一维距离图像,从图中可以看到有 5 个峰值;中图为基于 2 个连续采样子带的多频率融合的距离像,只能显示出 3 个峰值,而且峰值的位置和高度也不正确,因此基于 BP 算法的

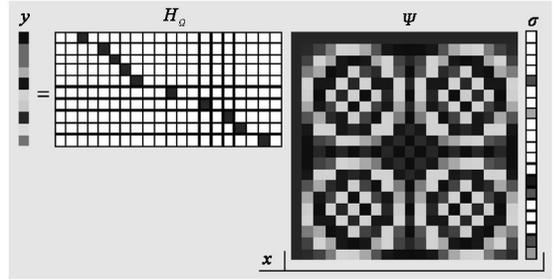


图 2 基于随机采样矩阵和傅里叶基的信号融合示意图
Fig. 2 Signal fusion based on random sampling matrix and Fourier basis

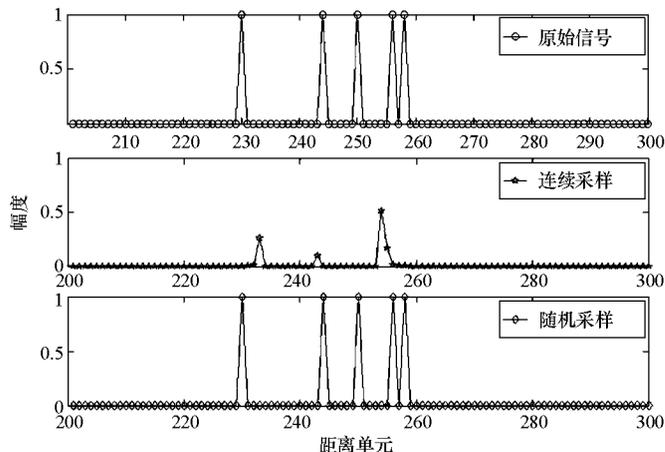


图3 一维距离像的对比结果
Fig.3 One dimensional range profile contrast

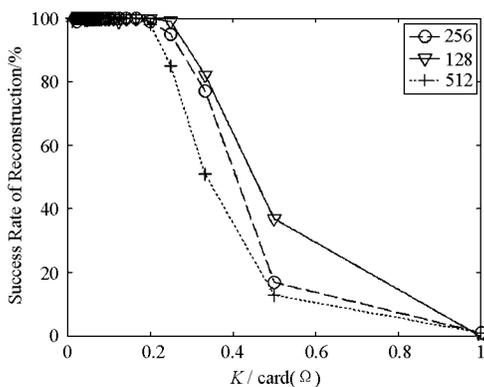


图4 重构成功率随 $K/\text{card}(\Omega)$ 的变化曲线
Fig.4 Success rate curve of reconstruction changed with $K/\text{card}(\Omega)$

连续采样子带融合处理失效。实际上通过式(12)也可以判断,在如上的参数设置下,阈值 $C=3.0362$,而实际散射点个数为5,因此不满足式(12)。图3的下图为基于随机采样重构的信号一维距离像,可以明显地看到5个峰值,且位置和幅度也完全正确。通过数值计算可知在此次随机采样下,阈值 $C=6.0838$,因此满足式(12)。

由于在图像中散射点的位置信息要比幅度信息更重要,所以我们认为高于图像最高峰值 $1/5$ 的峰都是散射点。成功重构就是指图像中散射点的个数和位置与实际仿真参数相一致。仿真实验的参数设置:信号 E 长度分别为 128、256、512,5 个散射点位于第 50、52、55、58、60 个单元格,幅度均为 1。令随机采样点数 N_Ω 从小到大变化,每一种采样都独立进行 100 次实验。图4为成功概率随 $K/\text{card}(\Omega)$ 的变化曲线, N_Ω 越少,信号重构的成功率越低。而全数据采样点数越多,信号重构成功率的门限就越低,这也和式(14)的结果相一致的。

5 结束语

基于随机采样的多频率信号融合是连续采样的多频带融合的一种推广。对比于连续采样,在采样点数相同且都运用基追踪算法的情况下,基于随机采样的多频率融合处理的性能更加优越。当随机采样数高于一定的门限时,基于随机采样的多频率融合处理可以高概率地重构原始信号。计算机仿真实验也验证了这一结论。

参考文献:

- [1] Cuomo K M, Piu J E. Ultrawide band Coherent processing [J]. IEEE Transactions, 1999, 47(4): 1094- 1107.
- [2] Vann L D, Cuomo K M. Multisensor Fusion Processing for Enhanced Radar Imaging [R]. Lexington, Massachusetts, United States: Lincoln Laboratory, 2000. 1- 73.
- [3] Morre T G, uerdorfer B W. Enhanced Imagery Using Spectral-estimation-based Techniques [J]. Lincoln Laboratory Journal, 1997, 10(2): 171- 186.
- [4] 叶钊,何峰,梁甸农. 基于 EMEMP 的雷达二维信号融合成像新方法[J]. 电子学报, 2009, 37(12): 2609- 2613.
- [5] Naishadham K, Piu J E. State-space Spectral Estimation of Characteristic Electromagnetic Responses in Wideband Data [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2005, 4: 406- 409.
- [6] 王成,胡卫东,郁文贤. 基于非平稳时间序列处理的雷达信号融合[J]. 信号处理, 2005, 21(4): 338- 343.
- [7] Chen S S. Basis Pursuit [D]. Stanford University Statistics, 1995.
- [8] 杜小勇. 稀疏成份分析及在雷达成像处理中的应用[D]. 长沙:国防科技大学, 2005.
- [9] 叶钊,何峰,梁甸农. 综合基追踪和 AR 模型内插的多频带数据融合[J]. 信号处理, 2009, 25(8A): 519- 521.
- [10] Cand s E. Compressive Sampling [C]// Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006, 3: 1433- 1452.
- [11] Cand s E, Romberg J, Tao T. Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(2): 489- 509.
- [12] Cand s E J, Tao T. Near Optimal Signal Recovery from Random Projections: Universal Encoding Strategies [J]. IEEE Tran on Information Theory. 2006, 52(12): 5406- 5425.
- [13] Donoho D L. Compressed Sensing [J]. IEEE Trans on Information Theory. 2006, 52(4): 1289- 1306.
- [14] Donoho D L, Tsai Y. Extensions of Compressed Sensing [J]. Signal Processing. 2006, 86(3): 533- 548.
- [15] Gilbert A C, Gaha S, Indyk P, et al. Near-optimal Sparse Fourier Representations Via Sampling [C]// Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Quebec, Canada: ACM Press, 2006: 152- 161.