

文章编号: 1001- 2486(2010) 04- 0110- 06

## 三维最优制导律设计的旋量方法\*

朱华勇<sup>1</sup>, 彭双春<sup>1</sup>, 孙未蒙<sup>2</sup>, 沈林成<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073; 2. 92854 部队, 广东 湛江 524009)

**摘要:** 针对 BTT 导弹制导过程中的双通道耦合问题, 设计了一种非解耦的三维最优制导律。通过矢量方法和旋量方法分别建立了视线角速度模型和视线方位模型, 从而得到导弹制导的三维模型。基于视线角缓变的假设, 对制导模型进行了简化, 得到其线性模型。分别针对无终端约束和有终端约束情况, 运用二次型最优方法推导了最优三维制导律。该制导律避免了通道解耦, 能够满足 BTT 导弹精确制导的要求。

**关键词:** 三维制导; 旋量; 倾斜转弯; 最优控制

**中图分类号:** V448 **文献标识码:** A

## A Twist-based Method for 3D Optimal Guidance Law

ZHU Hua-yong<sup>1</sup>, PENG Shuang-chun<sup>1</sup>, SUN Wei-meng<sup>2</sup>, SHEN Lin-cheng<sup>1</sup>

(1. College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Army 92854, Zhanjiang 524009, China)

**Abstract:** Aiming at the coupling of bank-to-turn (BTT) missile, a non-decoupling three-dimensional (3D) guidance law was proposed. Firstly, the 3D guidance model was established after the line of sight (LOS) angles velocity model was established through vectors description, and the azimuth change of LOS was described based on the twist method. Secondly, the guidance model was simplified and the linear model was derived on the assumption that LOS angles' change is slow. Finally, the 3D optimal guidance laws were designed respectively using the quadratic optimal control, corresponding to no ending constraints and ending constraints. The proposed guidance law can be satisfied with the guidance precision of BTT missile since it is able to avoid the information loss caused by the decoupling method.

**Key words:** 3D guidance; twist; bank-to-turn (BTT); optimal control

传统的三维制导律的设计有两种基本思路: 其一, 在滚动为零的假设条件下, 弹目相对运动模型解耦成俯冲、转弯两个平面, 在两个平面上分别设计二维制导律<sup>[1-2]</sup>; 其二, 在球坐标系中描述弹目相对运动关系, 设计比例导引, 生成三维矢量形式的指令加速度<sup>[3-4]</sup>。

这两种设计框架各有其优缺点: 双平面解耦的设计因其设计简单和可实现性强被广泛地采纳。但是在 BTT 控制方式下, 弹体会绕弹轴高速旋转, 这使得滚动为零的假设不成立, 两个平面之间存在耦合关系, 给基于双平面解耦的制导律设计带来困难。基于球坐标的方法虽然能够忽略这种耦合关系, 但是难以处理目标高机动和有末端速度方向约束的情况。在基于球坐标的设计中, 飞行器与目标的相对位置矢量被等效为球面上的一个点。任何球面都可以被认为是单位球面  $S^2$  按照一定幅度的扩张。因此, 在  $S^2$  上可以用最少的变量来描述相对位置矢量方向, 这为制导律设计带来了便利; 但是这种参数的简化使得在制导律设计时难以兼顾速度矢量的方向信息, 从而难以实现满足终端角度约束的制导律。

针对耦合条件下的三维制导律设计问题, 韩大鹏、孙未蒙等<sup>[5]</sup> 利用李群方法, 获得了不解耦条件下的制导律。之后, 考虑到李群制导律虽然理论完整但不够简捷, 并且算法中包含复杂的矩阵对数运算, 韩大鹏、韦庆等<sup>[6]</sup> 在研究空间机器人目标捕获问题时, 利用旋量来描述视线方位, 并基于视线角缓变的假设, 设计了一种新的三维制导律。但无论是李群方法还是旋量方法, 都没有对制导律参数进行整定,

\* 收稿日期: 2009- 12- 19

基金项目: 国家安全重大基础研究资助项目(6138101001)

作者简介: 朱华勇(1971-), 男, 副教授, 博士。

因而难以保证所设计制导律在三维空间内的最优性。

针对 BTT 导弹制导过程中的双通道耦合问题,本文建立了导弹三维运动学矢量模型;并利用旋量来描述视线方位,得到了弹目相对运动的制导方程。基于视线角缓变的假设,将制导模型线性简化。运用二次型最优推导出三维最优制导律。该制导律避免了通道解耦,同时能够满足末端速度方向要求。

## 1 问题描述与分析

### 1.1 导弹三维运动矢量模型

为了描述问题方便,首先给出如下定理:

定理 1<sup>[7]</sup> (角速度加法定理) 刚体  $B$  在参考系  $A$  中的角速度可表示成与  $n$  个辅助参考系  $A_1, A_2, \dots, A_n$  有关的如下形式

$${}^A \omega^B = {}^A \omega^{A_1} + {}^{A_1} \omega^{A_2} + \dots + {}^{A_n} \omega^B \quad (1)$$

这一关系式即为角速度加法定理。

如果式(1)右边各项代表简单转动<sup>[7]</sup>的角速度,使用起来特别方便。本文遵循这一思路,将弹目视线角速度分解为两个简单转动角速度的矢量和。按照传统的解耦方法<sup>[1]</sup>,以目标和导弹质心为基准,将导弹在三维空间上的运动分解成俯冲和转弯两个平面上的运动。其角度定义如图 1 所示。同时定义五个单位矢量:  $s_1 \sim s_5$ 。  $s_1$  垂直于转弯平面,  $s_2$  垂直于俯冲平面,  $s_3 \sim s_5$  的方向定义见图 1。设  $\omega$  为视线角速度。根据定理 1 经证明可得定理 2。

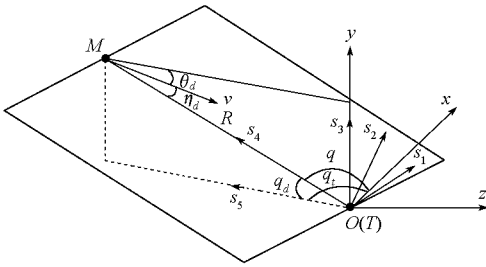


图 1 导弹三维制导示意图  
Fig. 1 Sketch Map of 3D Guidance

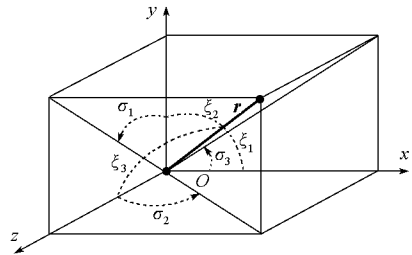


图 2 空间位置矢量决定的欧拉角  
Fig. 2 Euler angles determined by a vector

定理 2<sup>[8]</sup> 弹目视线角速度  $\omega$  可以表示为视线高低角速度和视线方位角速度的矢量和,即

$$\omega = q_d s_2 + q_i s_3 \quad (2)$$

对式(2)两边求导可得

$$\dot{\omega} = \ddot{q}_d s_2 + \dot{q}_d \dot{s}_2 + \ddot{q}_i s_3 + \dot{q}_i \dot{s}_3 + q_d \dot{s}_2 + q_i \dot{s}_3 \quad (3)$$

在实际飞行过程中,由于  $v \gg v \approx 0$ 。定义  $T_g = -R/R \dot{R}$  ( $R > 0$ ), 因而有<sup>[1,9]</sup>

$$\begin{cases} \dot{q}_d = \frac{2}{T_g} q_d + \frac{1}{T_g} \dot{\theta} \\ \dot{q}_i = \frac{2}{T_g} q_i + \frac{1}{T_g} \dot{\theta} \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)代入式(3),则有

$$\dot{\omega} = \frac{2}{T_g} (q_d s_2 + q_i s_3) + \frac{1}{T_g} (\dot{\theta} s_2 + \dot{\theta} s_3) + q_d \dot{s}_2 + q_i \dot{s}_3 \quad (5)$$

令  $u = \dot{\theta} s_2 + \dot{\theta} s_3$ , 根据式(2), 可得导弹三维运动的矢量模型

$$\dot{\omega} = \frac{2}{T_g} \omega + \frac{1}{T_g} u + q_d \dot{s}_2 + q_i \dot{s}_3 \quad (6)$$

式(6)描述了视线角速度矢量的变化规律, 但为了设计有终端约束的三维制导律, 还必须建立视线

角速率与弹目视线方位角的关联方程。然而三维空间的视线角速度并不能简单表示成空间角度的微分,而是一个复杂的积分均值表达式<sup>[7]</sup>,为了计算简单和使用方便,本文参照文献[6],通过设计一种旋量来描述视线方位变化与视线角速度之间的关系,进而得到三维空间的导弹制导模型。

## 1.2 视线方位的旋量描述<sup>[6]</sup>

### 1.2.1 矢量的旋量描述

如图2所示,给定一个矢量  $r = [x, y, z]^T$ , 可以确定一个欧拉角矢量

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T = [\arctan 2(z, y), \arctan 2(x, z), \arctan 2(y, x)]^T \quad (7)$$

称  $\sigma$  为矢量相关旋量。对式(7)求导得

$$\dot{\sigma} = \begin{bmatrix} 1/y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \triangleq P_r^{-1} r \times r \quad (8)$$

### 1.2.2 视线角速度的旋量描述

定理3 空间矢量  $r$  的角速度矢量  $\omega$  的幅值最小解为

$$\omega = s_r \times \hat{s}_r \quad (9)$$

其中  $s_r$  为与  $r$  平行的单位矢量。具体证明过程参照文献[5]。

显然在工程应用中,  $\omega$  的幅值最小解更有意义。根据式(8)、(9),可求得  $\omega$  的幅值最小解为

$$\omega = s_r \times \hat{s}_r = \frac{1}{2} (r \times \hat{r}) = \frac{1}{r} P_r \dot{\sigma} \triangleq Q_\xi \dot{\sigma} \quad (10)$$

注意到(如图2)

$$s_r = [\cos \xi_1, \cos \xi_2, \cos \xi_3]^T \quad (11)$$

因此

$$\omega = s_r \times \hat{s}_r = -[\cos \xi_1, \cos \xi_2, \cos \xi_3]^T \times [\xi_1 \sin \xi_1, \xi_2 \sin \xi_2, \xi_3 \sin \xi_3]^T \quad (12)$$

$$Q_\xi = \text{diag}(\cos^2 \xi_2, \cos^2 \xi_3, \cos^2 \xi_1) \quad (13)$$

令  $\sigma = Q_\xi \sigma$ , 则有

$$\dot{\sigma} = Q_\xi \dot{\sigma} + \dot{Q}_\xi \sigma = Q_\xi \dot{\sigma} + \omega \quad (14)$$

式(6)和式(14)构成了导弹的三维制导模型,但这是一个非线性模型,难以对其求解,因此有必要进行简化。

## 1.3 制导模型简化

为了简化问题,本文在此给出视线角缓变的假设。这种假设是符合工程实际的:首先,导弹对目标实施攻击时,为了保证目标始终处于导弹视场角范围内,弹目视线与导弹速度方向的夹角不会太大,因而导弹的机动范围一般不会很大。其次,在导弹距离目标较远时,为了调整到角度约束方向,即使导弹进行较大的机动,但由于视线距较远,不会引起较大的视线角变化;而当导弹距离目标较近时,为了保持飞行的稳定,不允许导弹作较大机动,因而视线角保持相对的恒定值。

基于视线角缓变的假设,可得:  $q_{\hat{s}_r} \approx 0$ ,  $Q_\xi \approx \mathbf{0}$ 。从而,由式(6)和式(14)可以得到简化的制导模型

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \omega \\ \dot{\omega} = \frac{2}{T_g} \omega + \frac{1}{T_g} u \end{cases} \quad (15)$$

## 2 最优三维制导律设计

### 2.1 无终端约束三维制导律设计

制导律设计中一个常用的等价准则是视线角速率趋于零,在这里可以等价于:  $\omega \rightarrow \mathbf{0}$ 。由于无终端角度约束,所以,  $\sigma_y$  是自由的。取状态变量  $x = \omega$ , 则可得状态方程

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(t_f) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

式中  $A = 2/T_g$ ,  $B = 1/T_g$ 。为保证良好制导性能,选取零脱靶量和最小能量作为最优性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^T u dt \quad (17)$$

这是一个典型的二次型性能指标的最优控制问题,根据极大值原理,线性系统二次型性能指标的最优控制为

$$u^* = -B^T P x \quad (18)$$

式中  $P$  可由逆 Riccati 方程求解得到

$$\begin{cases} P^{-1} - AP^{-1} - P^{-1}A^T + BB^T = 0 \\ P^{-1}(t_f) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

解得  $P = 3T_g$ , 从而无终端约束的最优三维制导律为

$$u^* = -3\omega \quad (20)$$

## 2.2 有终端约束三维制导律设计

对于有终端约束情况,除了要求  $\omega \rightarrow 0$  外,还要求  $\sigma \rightarrow \sigma_D$ , 式中,  $\sigma_D$  为终端约束表达式。令  $x_1 = \sigma - \sigma_D$ ,  $x_2 = \omega$ 。从而得到形如式(16)的状态方程,其中,  $x = [x_1 \ x_2]^T$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2/T_g \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1/T_g \end{bmatrix}^T$ 。与无终端约束时类似,选取性能指标函数为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^T u dt \quad (21)$$

同样,  $P$  可由逆 Riccati 方程求解得到

$$\begin{cases} P^{-1} - AP^{-1} - P^{-1}A^T + BB^T = 0 \\ P^{-1}(t_f) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

参照文献[1],得  $P = \begin{bmatrix} 4T_g & 2 \\ 2 & 4T_g \end{bmatrix}$ , 从而有终端约束的制导律为

$$u^* = -4\omega - \frac{2}{T_g}(\sigma - \sigma_D) \quad (23)$$

## 3 实验仿真

为了验证所设计制导律的有效性,本文以某型 BIT 导弹为仿真对象进行相关实验。设导弹的攻角取值范围为  $-6^\circ \sim 12^\circ$ , 滚转角取值范围为  $-45^\circ \sim 45^\circ$ , 对无终端约束的情况采用制导律式(20); 有终端约束的情况则采用制导律式(23)。

### 3.1 仿真算例 1: 无终端约束

设导弹在地心坐标系中的初始位置为  $(0.5^\circ, 0.5^\circ, 22000\text{m})$ , 目标位置为  $(0^\circ, 0^\circ, 0\text{m})$ , 速度为  $(0, -1000, -458)\text{m/s}$ , 导弹弹道如图 3 所示, 制导指令如图 4 所示。

导弹经过 87.75s 到达目标, 弹道光滑平稳, 终端位置误差为 0.009m, 从图 3 中可以看出, 飞行弹道能够快速收敛, 说明在本文制导律的作用下, 能够实现对目标的瞄准式攻击。从图 4 可以看出, 攻角、滚转角均收敛为一个较小值, 这说明制导过程是稳定的。

### 3.2 仿真算例 2: 有终端约束

初始条件同仿真算例 1, 考虑到导弹需要对目标实施倾侧攻击, 设预定落角  $-85^\circ$ , 预定入射方位角  $45^\circ$  (见图 1)。为了反映制导律的实际性能, 选择文献[1]所给经典的制导律与本文所推制导律进行对比。通过仿真, 得到的对比结果如图 5~7 及表 1 所示。

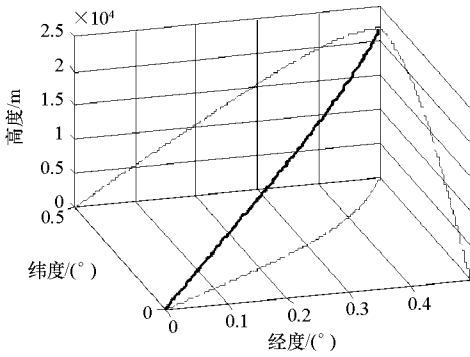


图3 无终端约束弹道曲线

Fig. 3 3D trajectory without ending constraints

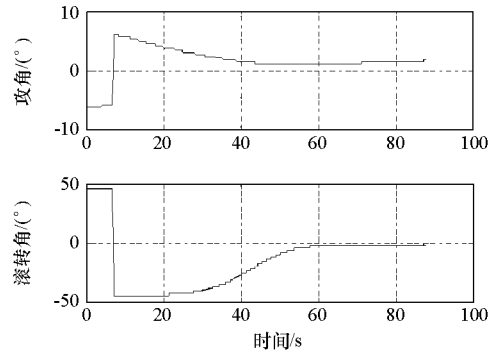


图4 无终端约束制导指令变化曲线

Fig. 4 Time-history of guidance commands without ending constraints

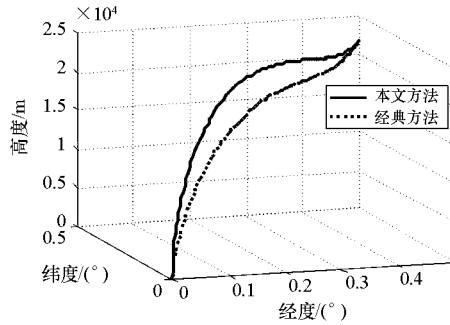


图5 有终端约束弹道曲线对比

Fig. 5 Comparison between 3D trajectories with ending constraints

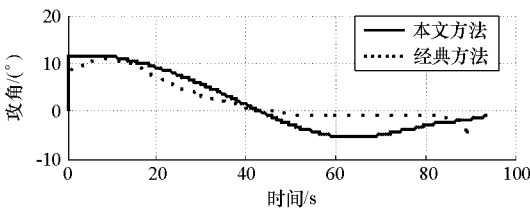


图6 有终端约束攻角指令对比

Fig. 6. Comparison between guidance commands of attack angles with ending constraints

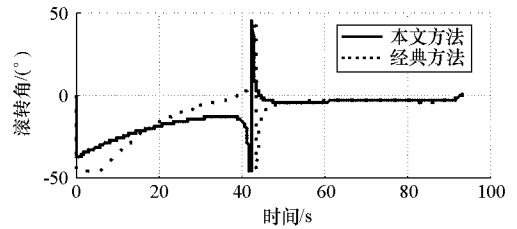


图7 有终端约束滚转角指令对比

Fig. 7 Comparison between guidance commands of roll angles with ending constraints

表1 飞行参数对比

Tab. 1 Comparison between the trajectory parameters

弹道	终端落角 (°)	终端方位角 (°)	终端速度 (m/s)	脱靶量 (m)	飞行时间 (s)
本文方法	- 84.73	45.06	853.28	0.017	94.20
经典方法	- 81.85	44.75	798.70	0.389	90.05

由仿真实验结果可以看出,当存在终端约束时,本文所设计的制导律在命中精度、终端角度误差和末速度等参数上比经典的制导律更具优势,并且本文所设计的制导律末端指令收敛,基本上可实现零攻角入射,这对导弹在打击目标时能够保持飞行稳定性具有重要意义。

#### 4 制导律分析

通过对比仿真,验证了制导律的有效性,能够满足耦合条件下导弹精确制导的要求。通过分析,本文所设计的制导律主要有以下几个特点:

(1) 对双通道耦合有较强的适应性。与传统的解耦方法<sup>[1-2,9]</sup>相比,本文在不进行通道解耦的基础上,从整体上描述导弹的制导模型,利用旋量方法,设计了三维最优制导律,能够避免解耦方法带来制导信息的损失,因此,制导精度较高。

(2) 基本保证了制导信息的完整性,整定了制导参数。就信息完整性而言,相对文献[5]所设计的制导律,虽然本文基于视线角缓变的假设对制导模型进行了简化,不可避免地损失了某些制导信息,但这种假设符合工程实际,能够在保证制导精度的前提下,大大降低模型的复杂度,并且,基于该假设,优化了制导参数。而文献[5]由于制导信息的完整使得制导律表达式非常复杂,难以对制导参数进行整定。因而本文这种假设是有实际意义的。

(3) 扩展了经典的制导律,能够实现多约束条件下的精确打击。从形式上看,本文所设计的制导律与经典的制导律<sup>[1]</sup>类似,但导弹在同时受终端落角、入射方位角、攻角、滚转角等约束条件的限制下,采用基于双平面解耦的经典制导律缺乏必要的理论支撑,因而并不一定能够保证结果的最优性。而本文所设计的制导律可以看作经典方法的一种扩展,能够从理论上保证导弹制导能够满足多约束的要求,且从实验仿真来看,在多约束条件下,制导精度较高,角度误差较小,因此本文所设计制导律能够满足多约束条件下精确打击的要求。

## 5 结论

针对 BIT 导弹制导过程中的双通道耦合问题,本文基于旋量方法,建立了导弹制导的三维矢量模型,并设计了一种三维最优制导律。仿真表明,在有无终端约束的情况下,该制导律均能保证较高的制导精度。本文工作对于研究强耦合条件下的导弹制导系统设计具有较好的参考意义。

需要说明的是:本文所设计的制导律是基于理想模型和理想测量信号设计的,在实际制导过程中,模型参数实际上存在一定的不确定性和时变性,测量信号也可能受到一定的干扰,需要针对模型失配和噪声干扰进行进一步研究。

## 参考文献:

- [1] 陈克俊,赵汉元. 一种适用于攻击地面固定目标的最优再入机动制导律[J]. 宇航学报, 1994, 15(1): 1- 7.
- [2] Chen B S, Chen Y Y, Lin C L. Nonlinear Fuzzy H Guidance Law With Saturation of Actuators Against Maneuvering Targets[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2002, 10(6): 769- 779.
- [3] Yuan P J, Chern J S. Ideal Proportional Navigation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1992, 15(5): 1161- 1165.
- [4] Tyan F. An Unified Approach to Missile Guidance Laws: A 3D Extension[C]//Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, AK: AACC Press, 2002: 1711- 1716.
- [5] 韩大鹏,孙未蒙,郑志强,等. 一种基于李群方法的新型三维制导律设计[J]. 航空学报, 2009, 30(3): 468- 475.
- [6] 韩大鹏,韦庆,杨乐平,等. 任务空间实时轨迹规划的旋量方法[J]. 机器人, 2008, 30(7): 304- 310.
- [7] Kane T R, Likins P W, Levinson D A. Spacecraft Dynamics[M]. McGraw-hill Book Company, 1988(1- 3): 63- 86.
- [8] 彭双春,孙未蒙,王楠,等. 考虑运动耦合的 BIT 导弹三维制导律设计[J]. 航空学报, 2010, 31(5): 968- 974.
- [9] 孙未蒙,郑志强. 多约束条件下对地攻击的最优制导律[J]. 兵工学报, 2008, 29(5): 567- 572.