文章编号: 1001- 2486(2010) 04- 0157- 08

一类典型结构矩阵的 WZ 分解*

仲　妍, 吴　枫, 骆志刚
(国防科技大学 计算机学院, 湖南 长沙　410073)

摘　要: WZ 类矩阵分解是设计线性方程组求解中一类并行算法的数学理论基础。针对对称 p- 三对角矩阵, 提出并证明该类典型结构矩阵的 WZ 分解式及其性质。进一步, 当实对称 p- 三对角矩阵正定时, 证明其 WZ 分解式中 W 因子具有元素均为实数的特点; 当 W 因子对角线元素均为正实数时, 分解式惟一。

关键词: 对称矩阵; p- 三对角矩阵; WZ 分解
中图分类号: TP301; O241　　文献标识码: A

WZ Factorization for a Kind of Special Structured Matrix

ZHONG Yan, WU Feng, LUO Zhi-gang
(College of Computer, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The kind of WZ factorizations is the basic mathematics theory for a series of parallel algorithms in solving linear systems. For the symmetric p-tridiagonal matrix, the WZ factorization and its properties were proposed and proved. Furthermore, it also shows that the W-factor of the WZ factorization owns the character that the elements in itare real numbers when the real matrix is symmetric positive definite, and the factorization is unique when the elements in diagonal are positive real numbers.

Key words: symmetric matrix; p-tridiagonal matrix; WZ factorization

设稀疏线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如式(1a)所示[1], 其中, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$, $\Omega=\mathrm{diag}(\omega_1, \cdots, \omega_m)$。当满足 $|\lambda_i| > 2|\omega_i|$ $(i=1, \cdots, m)$ 时, 矩阵式(1a)为对称正定矩阵; 典型例子为 5 点差分格式 Poisson 方程[1]。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \Lambda & \Omega & & & \\ \Omega & \Lambda & \Omega & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \Omega & \Lambda & \Omega \\ & & & \Omega & \Lambda \end{bmatrix} \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & b_{p+1} & & & & & & \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & b_{p+2} & & & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & 0 & & & & & \\ b_{p+1} & \vdots & & & \vdots & a_{p+1} & & & & \\ & b_{p+2} & & 0 & a_{p+2} & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & a_{n-p} & \cdots & 0 & b_n \\ & & & \ddots & & & 0 & \ddots & & \\ & & & & & & \vdots & \ddots & & \\ & & & & & & b_n & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \tag{1b}$$

典型结构线性方程组求解的理论基础之一是内在并行的 PIE (Parallel Implicit Elimination) 消去过程

*　收稿日期: 2010- 05- 06
作者简介: 仲研(1982—), 女, 博士生。

(对应矩阵的WZ分解或Q.I.F分解)[2-3]。文献[4-7]以WZ分解为框架设计线性方程组求解的并行算法。文献[4]给出向量化并行算法及其实现;文献[5]给出基于对称矩阵Cholesky Q.I.F分解[6]的三对角线性方程组的并行求解算法;文献[7]进一步改进适合对称三对角正定矩阵的WZ分解,并应用于并行算法设计。本文将式(1a)的矩阵结构一般化为定义1(式(1b)),并讨论其WZ分解式。

定义1 如果矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为对称矩阵且 $\boldsymbol{C}$ 中非零元的位置为 $\{(i,j)\mid |i-j|=0$ 或 $|i-j|=p\}$,那么,称正整数 p 为带宽,称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为对称 p-三对角矩阵,记为 $\boldsymbol{C}=\mathrm{ptridiag}\{(b_i, a_i, b_{i+p}), p\}_{i=1}^{n}$,其中,$b_i=0$, $i=1,\cdots,p$; $b_{i+p}=0$, $i=n-p+1,\cdots,n$。如果 $\boldsymbol{C}$ 还是正定矩阵,则称 $\boldsymbol{C}$ 为对称正定 p-三对角矩阵。

为方便讨论,先给出记号:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行(列)向量记为 $\boldsymbol{a}_i$ ($\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$);向量 α 的第 i 个分量到第 j 个分量组成的子向量记为 $\alpha_{i\to j}$ ($i\leqslant j$)。设 a, b 为整数且 $a<b$,记 $[a,b]=\{x\mid x$ 为整数且 $a\leqslant x\leqslant b\}$。设 s 为非负实数,令 $\lfloor s\rfloor$ ($\lceil s\rceil$) 表示不超过(不小于) s 的最大(小)整数。当 p 为整数,$\lceil p/2\rceil$ 记为 ξ,$\lfloor p/2\rfloor$ 记为 ε;且易得如下关系式:(1) $\varepsilon+\xi=p$;(2) 当 p 为偶数时,$p/2=\varepsilon=\xi$;(3) 当 p 为奇数时,$\xi=\varepsilon+1$, $\xi=(p+1)/2$, $\varepsilon=(p-1)/2$。

1 预备知识

设 $\boldsymbol{C}$ 为对称正定矩阵,且阶数 n 满足 $n=2m-2$。假设存在结构如式(2)的矩阵 $\boldsymbol{W}$,使得 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$,称该分解为WZ分解[7],称分解得到的形如式(2)的矩阵为 $\boldsymbol{C}$ 的 W 因子。

$$
W=\begin{bmatrix}
w_{1,1} & w_{1,2} & & \cdots & & & w_{1,n} \\
0 & \ddots & \ddots & \cdots & \iddots & & 0 \\
 & 0 & w_{m-1,m-1} & w_{m-1,m} & 0 & & \\
 & & 0 & w_{m,m} & 0 & & \\
 & \iddots & w_{m+1,m-1} & w_{m+1,m} & w_{m+1,m+1} & 0 & \\
 & & \iddots & \cdots & & \ddots & 0 \\
0 & w_{n,2} & & \cdots & & & w_{n,n}
\end{bmatrix} \tag{2}
$$

定义2 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 m 行将其分成上和下两部分,其中行号均小于 m 的部分称为上半矩阵,行号均大于 m 的部分称为下半矩阵。同理,由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 m 列将矩阵分成左半矩阵和右半矩阵。

定义3 对 W 因子,行中非零元的列号范围和列中非零元的行号范围统称为 W 因子边界。

由上述定义和式(2)知:上半矩阵第 i 行的 W 因子边界为 $[i, n+1-i]$;下半矩阵第 i 行的 W 因子边界为 $[n+2-i, i]$。左半矩阵第 j 列的 W 因子边界为 $[1,j]\cup[n+2-j, n]$;右半矩阵第 j 列的 W 因子边界为 $[1, n+1-j]\cup[j, n]$。

引理1 设对称 p-三对角矩阵 C 的阶数 $n=2m-2$。当 $C=WW^{\mathrm{T}}$ 时,设 W 因子第 i 行中非零元记为 $w_{i,x}$。那么,下面各式成立:(1) $i=m$ 时,$i-x=0$;(2) $i<m$ 时,$0\leqslant x-i\leqslant 2(m-i)-1$;(3) $i>m$ 时,$0\leqslant i-x\leqslant 2(i-m)$。 □

2 WZ分解式

定理1(WZ分解定理) 设 $\boldsymbol{C}$ 为 n 阶对称 p-三对角矩阵,n 为偶数(设 $n=2m-2$)且可以被 p 整除($\theta = n/p$)。如果 $\boldsymbol{C}$ 可以分解为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$,那么,$\boldsymbol{W}$ 的结构按照标号①~⑤的分段顺序满足式(3),并且

(1) 当 θ 为奇数,k 的最大取值为 $k_{\max}=\lfloor(\theta-1)/2\rfloor$,且 $\boldsymbol{W}$ 中列的结构按式(3)结束于④⑤;

(2) 当 θ 为偶数,k 的最大取值为 $k_{\max}=\lceil(\theta-1)/2\rceil$,且 $\boldsymbol{W}$ 中列的结构按式(3)结束于②③。

$$
\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}=\begin{cases}
④(\cdots, w_{i-p,i}, \cdots, w_{i,i}, \cdots, w_{i+(2k+1)p,i}, \cdots)^{\mathrm{T}}, & i=m-\varepsilon-kp, \cdots, m-kp-1 \\
②(\cdots, w_{i-p,i}, \cdots, w_{i,i}, \cdots, w_{i+2kp,i}, \cdots)^{\mathrm{T}}, & i=m-kp, \cdots, m-\varepsilon-(k-1)p-1 \\
①(\cdots, w_{i-p,i}, \cdots, w_{i,i}, \cdots, w_{i+p,i}, \cdots)^{\mathrm{T}}, & i=m-\varepsilon, m-\varepsilon+1, \cdots, m, \cdots, m+\xi-1, \quad k=1,2,\cdots \\
③(\cdots, w_{i-2kp,i}, \cdots, w_{i,i}, \cdots, w_{i+p,i}, \cdots)^{\mathrm{T}}, & i=m+\xi+(k-1)p, \cdots, m+kp-1 \\
⑤(\cdots, w_{i-(2k+1)p,i}, \cdots, w_{i,i}, \cdots, w_{i+p,i}, \cdots)^{\mathrm{T}}, & i=m+kp, \cdots, m+\xi+kp-1
\end{cases} \tag{3}
$$

显然, 当式(3)中元素的行号或列号 i 满足 $i>n$ 或 $i<1$ 时, 该元素为零。 □

2.1 引理及其证明

引理 2　对 W 因子, 设上半矩阵中行号记为 i, 下半矩阵中行号记为 j。则:

(a) 对于第 i 行, 如果已知 W 因子的第 i 到 $2m-i-1$ 列的结构如式(3)所示, 那么, 该行中非零元素 $w_{i,x}$ 的列号 x 满足: $x=i+\delta p$, δ 为整数且 $\delta\in[0,\lfloor\frac{2(m-i)-1}{p}\rfloor]$;

(b) 对于第 j 行, 如果已知 W 因子的第 $2m-j$ 到 j 列的结构如式(3)所示, 那么, 该行中非零元素 $w_{j,y}$ 的列号 y 满足: $y=j-\tau p$, τ 为整数且 $\tau\in[0,\lfloor\frac{2(i-m)}{p}\rfloor]$。

证明: 令 $k=m-i$, 则 $i=m-k$, $2m-i-1=m+(k-1)$; 令 $h=j-m$, 则 $j=m+h$, $2m-j=m-h$。于是, (a)和(b)的题设变为: (a)已知第 $m-k$ 到 $m+(k-1)$ 列的结构; (b)已知第 $m-h$ 到 $m+h$ 列的结构。这里仅以(a)为例进行证明。

由(a)的题设已知第 $m-k$ 和 $m+(k-1)$ 列的结构。第 $m-k$ 行中列号取值范围为 $[m-k, m+k-1]$, 恰落在已知结构的列中。因此, 由式(3)立即可得第 $m-k$ 行的结构。由式(3), 对于 W 因子中的任意第 x 列, 其中非零元的行号 i 形式为 x, $x-p$(或 $x+p$), $x+\beta p$, 其中 $\beta=2l$(或 $2l+1$($|l|\geqslant 1$))。所以, 第 i 行中非零元 $w_{i,x}$ 的列号满足: $x=i$, $x-i=p$(或 $-p$), $x-i=-\beta p$。再由引理 1 中(2)知 $0\leqslant x-i\leqslant 2(m-i)-1$。因此, 有如下结论:

$x=i$ 时, $w_{i,i}$ 非零; $x=i+p$ 时, $w_{i,i+p}$ 非零。$x=i-\beta p$ 时, 有 $0\leqslant -\beta p\leqslant 2(m-(i-\beta p))-1$, 即 $0\leqslant(-\beta)\leqslant\lfloor\frac{2(m-i)-1}{p}\rfloor=\lfloor\frac{2k-1}{p}\rfloor$。综上所述, 第 i 行的非零元为 $w_{i,i+\delta p}$, 其中 δ 的取值范围为 $[0,\lfloor\frac{2k-1}{p}\rfloor]$。 □

在引理 2 的基础上, 详细讨论 δ 的取值, 得引理 3:

引理 3　对 W 因子, 设上半矩阵中行号记为 i, 下半矩阵中行号记为 j。则:

(a) 对第 i 行, 若已知 W 因子的第 i 到 $2m-i-1$ 列的结构如式(3)所示, 则该行中非零元素的列号为 $x=i+\delta p$, 并且: $i\in[m-\varepsilon-kp, m-kp-1]$ 时, $\delta\in\{0,1,2k\}$; $i\in[m-(k+1)p, m-\varepsilon-kp-1]$ 时, $\delta\in\{0,1,2k+1\}$。

(b) 对第 j 行, 若已知 W 因子的第 $2m-j$ 到 j 列的结构如式(3)所示, 则该行中非零元素的列号为 $y=j-\tau p$, 并且: $j\in[m+kp, m+\xi+kp-1]$ 时, $\tau\in\{0,1,2k\}$; $j\in[m+\xi+kp, m+(k+1)p-1]$ 时, $\tau\in\{0,1,2k+1\}$。

证明: 1) 对式(3), 先证: 当 $x\in[m-(l+1)p, m-lp-1]$ ($l\geqslant 1$) 时, 该列中的元素 $w_{x+(2l+1)p,x}$(或 $w_{x+2lp,x}$)的行号为 $r=x+(2l+1)p$(或 $x+2lp$)均不小于 m; 并且对任意的两列 x_1, x_2, 当 $x_1\neq x_2$ 时有 $r_1\neq r_2$。事实上, 前半部分显然成立, 只证明后半部分。

(1) 当 $x_1\neq x_2$ 且 $x_1\in[m-\varepsilon-l_1p, m-l_1p-1]$, $x_2\in[m-\varepsilon-l_2p, m-l_2p-1]$ 时, 有 $r_1=x_1+(2l_1+1)p$, $r_2=x_2+(2l_2+1)p$。如果 $l_1=l_2+\Delta$($\Delta>0$), 那么 $r_2-r_1=x_2-x_1+2(l_2-l_1)p\leqslant m-l_2p-1-(m-\varepsilon-l_1p)-2\Delta p=\varepsilon-\Delta p-1<0$, 显然成立 $r_2\neq r_1$。如果 $l_1=l_2$, 由 $x_1\neq x_2$ 即知 $r_1\neq r_2$。

(2) 当 $x_1\neq x_2$ 且 $x_1\in[m-(l_1+1)p, m-\varepsilon-l_1p-1]$, $x_2\in[m-(l_2+1)p, m-\varepsilon-l_2p-1]$ 时, 类似于(1)的证明过程, 可证得结论成立。

(3) 当 $x_1\neq x_2$ 且 $x_1\in[m-\varepsilon-l_1p, m-l_1p-1]$, $x_2\in[m-(l_2+1)p, m-\varepsilon-l_2p-1]$ 时, 有 $r_1=x_1+(2l_1+1)p$, $r_2=x_2+2(l_2+1)p$。如果 $l_1=l_2+\Delta$($\Delta>0$), 那么 $r_2-r_1=x_2-x_1+2(l_2-l_1)p+p\leqslant m-\varepsilon-l_2p-1-(m-\varepsilon-l_1p)-2\Delta p+p=(1-\Delta)p-1<0$, 显然有 $r_2\neq r_1$。如果 $l_2=l_1+\Delta$($\Delta\geqslant 0$), 那么, $r_2-r_1=x_2-x_1+2(l_2-l_1)p+p\geqslant m-(l_2+1)p-(m-l_1p-1)+2\Delta p+p=\Delta p+1>0$, 显然有 $r_2\neq r_1$。

再类似证得结论: 当列号 $x\in[m+lp, m+(l+1)p-1]$ $(l\geqslant1)$ 时, x 列中元素 $w_{x-(2l+1)p,x}$(或 $w_{x-2lp,x}$)的行号均不大于 m; 并且对任意的两列 x_1, x_2, 当 $x_1\neq x_2$ 时有 $r_1\neq r_2$。

2) 由引理2知: (i) $i\in[m-\varepsilon-kp, m-kp-1]$ 时, $\delta\in[0,2k]$; (ii) $i\in[m-(k+1)p, m-\varepsilon-kp-1]$ 时, $\delta\in[0,2k+1]$; (iii) $j\in[m+kp, m+\xi+kp-1]$ 时, $\tau\in[0,2k]$; (iv) $j\in[m+\xi+kp, m+(k+1)p-1]$ 时, $\tau\in[0,2k+1]$。以(i)为例:

(1) $\delta\in[0,k]$ 时, $x=i+\delta p\leqslant(m-kp-1)+kp<m$。由式(3)中④②知 x 列中非零元为 $w_{x-p,x}$, $w_{x,x}$, $w_{x+\beta p,x}$ ($\beta=2l$ 或 $2l+1(l\geqslant1)$)。由1), $w_{x+\beta p,x}$ 行号 $x+\beta p\geqslant m>i$。故只存在 $x-p=i$ 和 $x=i$, 即 δ 取值0和1。

(2) $\delta\in[k+1,2k]$ 时, $x=i+\delta p\geqslant m$, 且 $x+p\geqslant m$。由式(3)中③⑤知 x 列中非零元素的结构为 $w_{x-\beta p,x}$, $w_{x,x}$, $w_{x+p,x}$ ($\beta=2l$ 或 $2l+1(l\geqslant1)$)。再由1)知只有 $x-\beta p\leqslant m$, 因此, $i=x-\beta p$ 且 $\delta=\beta$。由 $x=i+\delta p$ 得 $x\in[m+\xi+(\Lambda-1)p, m+\Lambda p-1]$(令 $\Lambda=\delta-k$), $\Lambda=1,2,\cdots$, 再由式(3), $i=x-2\Lambda p\in[m-\varepsilon-\Lambda p, m-\Lambda p-1]$。根据题设条件, 知 $k=\Lambda$, 即 $\beta=\delta=2k$。因此, 由1)知存在唯一的列 $x=i+2kp$ 使得 $w_{x-\beta p,x}$ 的行号为 i, 即得 $\delta=2k$。综上所述, (i)中结论得证。 □

由引理2和引理3立即得到如下引理, 它是证明定理1的基础。

引理4 对形如式(3)的 W 因子, 设上半矩阵中行号记为 i, 下半矩阵中行号记为 j。则:

(a) 对于第 i 行, 若已获得第 $i+1$ 到 $2m-i-1$ 列的元素, 则该行中除 $w_{i,i}$ 未知外, 其它元素均已知。具体地, 在已知元素中, 除下述元素外, 其它元素均为零: 当 $i\in[m-\varepsilon-kp, m-kp-1]$ 时, 已获得了该行的非零元素 $w_{i,i+p}$ 和 $w_{i,i+2kp}$; 当 $i\in[m-(k+1)p, m-\varepsilon-kp-1]$ 时, 已获得了该行的非零元素 $w_{i,i+p}$ 和 $w_{i,i+(2k+1)p}$。

(b) 对于第 j 行, 若已获得第 $2m-j$ 到 $j-1$ 列的元素, 则该行中除 $w_{j,j}$ 未知外, 其它元素均已知。具体地, 在已知元素中, 除下述元素外, 其它元素均为零: 当 $j\in[m+kp, m+\xi+kp-1]$ 时, 已获得了该行的非零元素 $w_{j,j-p}$ 和 $w_{j,j-2kp}$; 当 $j\in[m+\xi+kp, m+(k+1)p-1]$ 时, 已获得了该行的非零元素 $w_{j,j-p}$ 和 $w_{j,j-(2k+1)p}$。 □

2.2 WZ 分解定理的证明

矩阵 $\boldsymbol{W}$ 具有式(2)的结构; 由第 m 行将矩阵 $\boldsymbol{W}$(或 $\boldsymbol{C}$)分成上半矩阵和下半矩阵。

第一步: 证明 i 取值从 $m-\varepsilon-p$ 到 $m+\xi+p-1$ 时(即式①和式②~⑤的 $k=1$ 情况)结论正确。

1) 考查 $i=m, m+1, \cdots, m+\xi-1$ 和 $i=m-1, m-2, \cdots, m-\varepsilon$: 从中间第 m 行开始, 交替的考查 $\boldsymbol{C}$ 的上半矩阵和下半矩阵。①矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 m 行: $a_m=w^2_{m,m}$, $b_{m+p}=w_{m,m}w_{m+p,m}$, $b_m=w_{m,m}w_{m-p,m}$; 其它元素为0。由此算得矩阵 $\boldsymbol{W}$ 中第 m 列的元素 $w_{m,m}$, $w_{m+p,m}$, $w_{m-p,m}$。因此, 矩阵 $\boldsymbol{W}$ 的 m 列 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}_m$ 中除元素 $w_{m,m}$, $w_{m+p,m}$, $w_{m-p,m}$ 外, 其它元素均为0, 即满足式(3)。②矩阵 C 的第 $m-1$ 行: 由引理4知 $w_{m-1,m}=0$, 故 $a_{m-1}=w^2_{m-1,m-1}$, $b_{m-1}=w_{m-1,m-1}w_{m-p-1,m-1}$, $b_{m+p-1}=w_{m-1,m-1}w_{m+p-1,m-1}$; 其它元素为0。由此得矩阵 $\boldsymbol{W}$ 的 $m-1$ 列 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}_{m-1}$ 中, 除元素 $w_{m-1,m-1}$, $w_{m+p-1,m-1}$, $w_{m-p-1,m-1}$ 外其它元素为0, 即满足式(3)。③矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 $m+1$ 行: 由引理4知 $w_{m+1,m}=w_{m+1,m-1}=0$ 故 $a_{m+1}=w^2_{m+1,m+1}$, $b_{m+1}=w_{m+1,m+1}w_{m+1-p,m+1}$, $b_{m+1+p}=w^{m+1,m+1}w_{m+1+p,m+1}$; 其它元素为0。从而 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}_{m+1}$ 满足式(3)。④交替的考查 $\boldsymbol{C}$ 中第 $i=m-2, \cdots, m-\varepsilon$ 和 $i=m+2, \cdots, m+\xi-1$ 行, 得到 $\boldsymbol{W}$ 的列向量 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}_i$ 满足式(3)。

2) 考查 $i=m+\xi, \cdots, m+p-1$ 和 $i=m-\varepsilon-1, \cdots, m-p$ 列。接着1)进行讨论, 仍交替考查 $\boldsymbol{C}$ 的上半矩阵和下半矩阵。令 $l_1=(m-1)-(m-\varepsilon-1)=\varepsilon$, $l_2=(m+\xi)-(m+1)=\xi-1$。当 p 为偶数时 $l_1=l_2+1$, 说明1)中最后讨论的行位于上半矩阵; 同理, 当 p 为奇数时, 1)中最后讨论的行位于下半矩阵。因此, 在本步讨论中: p 为偶数时, 先考查下半矩阵; 反之, 考查上半矩阵。

(a) 当 p 为偶数。①考查矩阵 $\boldsymbol{C}$ 第 $s=m+\xi$ 行(下半矩阵): 由引理4知, 第 s 行中 $w^{s,s-p}\neq0$, $w_{s,s}$ 未知, 其它元素均为0。故 $a_s=w^2_{s,s}+w^2_{s,s-p}$, 从而得到 $w_{s,s}$° $b_s=w_{s,s}w_{s-p,s}+w_{s,s-p}w_{s-p,s-p}=w_{s,s-p}w_{s-p,s-p}$, 与之前($s-p$ 行)的计算公式一致。$b_{s+p}=w_{s,s}w_{s+p,s}+w_{s,s-p}w_{s+p,s-p}=w_{s,s}w_{s+p,s}$ ($w_{s+p,s-p}=$

0), 得到 $w_{s+p,s}$。已知 $w_{s-2p,s-p}\neq 0$, 所以由计算公式 $0=w_{s,s}w_{s-2p,s}+w_{s,s-p}w_{s-2p,s-p}$ 得 $w_{s-2p,s}$; W 的 s 列中其它元素都为 0。由此得 $\boldsymbol{w}_s^{\mathrm{T}}$ 列满足式(3)。②考查矩阵 $\boldsymbol{C}$ 第 $m-\varepsilon-1$ 行(上半矩阵), 类似于 $s=m+\xi$ 行的推导过程, 得到 W 的 $m-\varepsilon-1$ 列满足式(3)。③交替的讨论矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的上下半矩阵中第 $m+\xi+1, \cdots, m+p-1$ 和 $m-\varepsilon-2, \cdots, m-p$ 行, 依次得到 W 的第 $m+\xi, \cdots, m+p-1$ 和 $m-\varepsilon-1, \cdots, m-p$ 列满足式(3)。

(b) 当 p 为奇数, 与 p 为偶数的不同之处仅在于考查次序不同。先考查 $\boldsymbol{C}$ 的第 $m-\varepsilon-1$ 行, 再考查第 $m+\xi$ 行。最终, 交替依次得到 W 的第 $m-\varepsilon-1, \cdots, m-p$ 和 $m+\xi, \cdots, m+p-1$ 列满足式(3)。

3) 考查第 $i=m+p, \cdots, m+\xi+p-1$ 和 $i=m-p-1, \cdots, m-\varepsilon-p$ 列: 接着 2) 进行讨论, 依次考查 $\boldsymbol{C}$ 的上半矩阵和下半矩阵中这些行。令 $l_3=(m-1)-(m-p-1)=p$, $l_4=(m+p)-(m+1)=p-1$。

当 p 为偶数和奇数时都成立 $l_3>l_4$, 说明 2) 中最后讨论的行位于上半矩阵。因此, 本步中先考查下半矩阵的 $m+p\,\dot{=}\,e$ 行。①由引理 4, e 行中 $w_{e,e}$ 未知, 已知 $w_{e,e-p}, w_{e,e-2p}\neq 0$, 其它元素均为 0。故, 由 $a_e=w_{e,e}^2+w_{e,e-p}^2+w_{e,e-2p}^2$ 得 $w_{e,e}$。由 $b_{e+p}=w_{e,e}w_{e+p,e}+w_{e,e-p}w_{e+p,e-p}+w_{e,e-2p}w_{e+p,e-2p}=w_{e,e}w_{e+p,e}$ $(w_{e+p,e-p}=0, w_{e+p,e-2p}=0)$, 得到 $w_{e+p,e}$。b_e 的计算公式在第 $e-p$ 行的计算中已得。此外, 已知 $w_{e-3p,e-p}=0$, $w_{e-3p,e-2p}\neq 0$, 所以, 由计算公式 $w_{e,e}w_{e-3p,e}+w_{e,e-p}w_{e-3p,e-p}+w_{e,e-2p}w_{e-3p,e-2p}=0$ 即得 $w_{s-3p,s}$。$\boldsymbol{W}$ 中第 s 列的其它元素都为 0。由此得 $\boldsymbol{w}_e^{\mathrm{T}}$ 列满足式(3)。②考查上半矩阵中的第 $m-p-1$ 行, 同样得到 $\boldsymbol{w}_{m-p-1}^{\mathrm{T}}$ 满足式(3)。③同理, 交替的依次得到 $\boldsymbol{W}$ 的第 $m+p, \cdots, m+\xi+p-1$ 和 $m-p-1, \cdots, m-\varepsilon-p$ 列满足式(3)。

第二步: 归纳法证明 $\lceil(\theta-1)/2\rfloor\geqslant k\geqslant 2$ 时结论成立。p 为奇偶数的区别仅在于讨论顺序不同, 但讨论方法完全相同。因此, 以 p 为偶数为例。设式(3) 中 $k\leqslant n_0$ 时结论成立, 则当 $k=n_0+1$ 时:

先考查下半矩阵中第 $i(i=m+\xi+n_0p)$ 行: 由归纳假设和引理 4 可以判断: i 行中, $w_{i,i}$ 未知, $w_{i,i-p}\neq 0$, $w_{i,i-(2n_0+1)p}\neq 0$; 且当 $x\neq i, i-p, i-(2n_0+1)p$ 时, $w_{i,x}=0$。同时, 由归纳假设: $i-p$ 列中 $w_{i-(2n_0+1)p,i-p}\neq 0$, $w_{i-p,i-p}\neq 0$, $i-(2n_0+1)p$ 列中 $w_{i-(2n_0+1)p,i-(2n_0+1)p}\neq 0$, $w_{i-2(n_0+1)p,i-(2n_0+1)p}\neq 0$; 其它元素均为 0。

由 $a_i=w_{i,i}^2+w_{i,i-p}^2+w_{i,i-(2n_0+1)p}^2$ 得 $w_{i,i}\neq 0$。$b_{i+p}=w_{i,i}w_{i+p,i}+w_{i,i-p}w_{i+p,i-p}+w_{i,i-(2n_0+1)p}w_{i+p,i-(2n_0+1)p}$, 由归纳假设 $w_{i+p,i-p}=w_{i+p,i-(2n_0+1)p}=0$, 故 $b_{i+p}=w_{i,i}w_{i+p,i}$, 得 $w_{i+p,i}$。由 $c_{i,i-2(n_0+1)p}=0=w_{i,i}w_{i-2(n_0+1)p,i}+w_{i,i-p}w_{i-2(n_0+1)p,i-p}+w_{i,i-(2n_0+1)p}w_{i-2(n_0+1)p,i-(2n_0+1)p}=w_{i,i}w_{i-2(n_0+1)p,i}+w_{i,i-(2n_0+1)p}w_{i-2(n_0+1)p,i-(2n_0+1)p}$ $(w_{i-2(n_0+1)p,i-p}=0)$, 即得 $w_{i-2(n_0+1)p,i}$。

同时, 由归纳假设, 在第 $i-p$ 行计算时已得 $b_i=w_{i-p,i-p}w_{i,i-p}+w_{i-p,i-(2n_0+1)p}w_{i,i-(2n_0+1)p}=w_{i-p,i-p}w_{i,i-p}$ $(w_{i-p,i-(2n_0+1)p}=0)$。因此, 由第 i 行计算 b_i 时可知 $w_{i,i}w_{i-p,i}=0$, 从而 $w_{i-p,i}=0$。其它 $x(x\neq i, i+p, i-2(n_0+1)p$ 和 $i-p)$ 有通式 $c_{i,x}=0=w_{i,i}w_{x,i}+w_{i,i-p}w_{x,i-p}+w_{i,i-2(n_0+1)p}w_{x,i-2(n_0+1)p}$。再由归纳假设知: 当 $x=i-(2n_0+1)p$ 时, $c_{i-(2n_0+1)p,i}=0=w_{i,i-p}w_{i-(2n_0+1)p,i-p}+w_{i,i-(2n_0+1)p}w_{i-(2n_0+1)p,i-(2n_0+1)p}$。因此, 由对称性即知 $c_{i,i-(2n_0+1)p}=w_{i,i}w_{i-(2n_0+1)p,i}=0$, 从而 $w_{i-(2n_0+1)p,i}=0$。当 $x\neq i-(2n_0+1)p$ 时, 有 $w_{x,i-p}=w_{x,i-2(n_0+1)p}=0$, 从而由 $c_{i,x}$ 的计算式知 $w_{x,i}=0$, 即 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}$ 中的其它元素均为 0。

综上所述, 列向量 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}(i=m+\xi+n_0p)$ 满足式(3)。

接着, 考查上半矩阵中的第 $i(i=m-\xi-n_0p-1)$ 行, 类似于前面的讨论, 同样得到 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}$ 满足式(3)。最后, 交替、依次得到 W 因子中第 $m+\xi+n_0p+1, \cdots, m+\xi+(n_0+1)p-1$ 和 $m-\varepsilon-n_0p-2, \cdots, m-\varepsilon-(n_0+1)p$ 列满足式(3)。由此, 归纳法证明结论正确。

第三步: 式(3) 中分成以 p 列为单位的块: 式①共有 p 列, 式②和③合在一起共有 p 列, 式④和⑤也共有 p 列。因此, θ 为分得的总块数, $\theta-1\,\dot{=}\,d$ 表示除去①外的总块数。式(3) 中 k 取值同一个整数值时, 包含公式②③和④⑤, 即 2 个块。从而, $\lceil d/2\rfloor$ 表示了包含公式②③和④⑤的个数, 恰对应于式(3) 中

k 的最大取值。同时, 由前面的证明过程可知, 当固定 k 的取值时, 块的计算顺序为先 ②③再 ④ ⑤。综上所述, 立即可得如下结论: 当 θ 为奇数时, $d/2$ 为整数, 说明计算式结束于 $k=\lfloor d/2\rfloor$ 的式 ④ ⑤。当 θ 为偶数时, $(d-1)/2=\lfloor d/2\rfloor$ 为整数, 计算结束于 ④ ⑤,但此时还剩余一块(p 列) , 由计算顺序知该块为 $k=\lceil d/2\rceil$ 时的②③。 □

注: 因该证明采用归纳法, 故 n 不能被 p 整除时结论仍正确。同样, 超出 W 因子边界的元素为 0。

2.3　WZ 分解的性质

由定理 1 的证明过程, 可以归纳出 W 因子非零元的计算公式, 统一由性质 1 表示。

性质 1　式(3) 中, 1) 当 $k\geqslant 1$ 时, 第 i($i>0$ 且为整数) 列中非零元为 $w_{i,i}, w_{i+\mathbf{1}p,i}, w_{i-(k_0+1)p,i}$, 计算式如下:

$$a_i = w_{i,i}^2 + w_{i,i-\mathbf{1}p}^2 + w_{i,i-k_0p}^2,\ b_{i+\mathbf{1}p} = w_{i,i}w_{i+\mathbf{1}p,i},\ c_{i,i-(k_0+1)p} = 0 = w_{i,i}w_{i-(k_0+1)p,i} + w_{i,i-k_0p}w_{i-(k_0+1)p,i-k_0p} \tag{4}$$

其中, $\mathbf{1}$ 和 k_0 为具相同符号的整数。$\mathbf{1}$ 表示 ±1, 符号由 k_0 确定; k_0 的表达式由式(3) 中各种情况确定。

$$k_0 = \begin{cases} -(2n_0+1), & i = m-\varepsilon-n_0p, \cdots, m-n_0p-1 \\ -2n_0, & i = m-n_0p, \cdots, m-\varepsilon-(n_0-1)p-1 \\ 2n_0, & i = m+\xi+(n_0-1)p, \cdots, m+n_0p-1 \\ 2n_0+1, & i = m+n_0p, \cdots, m+\xi+n_0p-1 \end{cases},\quad n_0\geqslant 1$$

2) 当 $i\in[m-\varepsilon, m+\xi-1]$ 时, 计算式为 $a_i = w_{i,i}^2$, $b_{i+p} = w^{i,i}w_{i+p,i}$, $b_i = w^{i,i}w_{i-p,i}$。 □

式(3) 为 W 因子的列向量表示法; 由引理 3 即得其行向量表示, 如定理 2。

$$\boldsymbol{w}_i = \begin{cases} (\cdots, w_{m,m}, \cdots), i = m-\varepsilon, \cdots, m, \cdots, m+\xi-1 \\ (\cdots, w_{i,i}, \cdots, w_{i,i+p}, \cdots), i = m-p, \cdots, m-\varepsilon-1 \\ (\cdots, w_{i,i-p}, \cdots, w_{i,i}, \cdots), i = m+\xi, \cdots, m+p-1 \\ (\alpha.1)\ (\cdots, w_{i,i}, \cdots, w_{i,i+p}, \cdots, w_{i,i+2kp}, \cdots), i = m-\varepsilon-kp, \cdots, m-kp-1 \\ (\alpha.2)\ (\cdots, w_{i,i-2kp}, \cdots, w_{i,i-p}, \cdots, w_{i,i}, \cdots), i = m+kp, \cdots, m+\xi+kp-1 \\ (\beta.1)\ (\cdots, w_{i,i}, \cdots, w_{i,i+p}, \cdots, w_{i,i+(2k+1)p}, \cdots), i = m-(k+1)p, \cdots, m-\varepsilon-kp-1 \\ (\beta.2)\ (\cdots, w_{i,i-(2k+1)p}, \cdots, w_{i,i-p}, \cdots, w_{i,i}, \cdots), i = m+\xi+kp, \cdots, m+(k+1)p-1 \end{cases} \tag{5}$$

$$k = 1, 2, \cdots, \lfloor(\theta-1)/2\rfloor$$

定理 2　设 p-三对角对称矩阵 $\boldsymbol{C}$, 其阶数 n 为偶数(设 $n=2m-2$) 且可以被 p 整除。那么, 式(5) 给出 w_i 的结构。当 k 固定时, 式(α) (包含(α. 1) 和(α. 2)) 必须在式(β) 之前计算(包含(β. 1) 和(β. 2)) 。当 n/p 为偶数时, 结束于(β) 式; 当 n/p 为奇数时, 结束于(α) 式。 □

定理 1 给出 n 为偶数时的情况, 当 n 为奇数时, 由定理 2 和式(4) 、(5) 易得如下推论:

推论 1　设对称 p-三对角矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的阶数 n 为奇数。如果 $\boldsymbol{C}$ 中去掉第 n 行和第 n 列后的 $n-1$ 阶矩阵 $\boldsymbol{C}_{n-1}$ 存在 **WZ** 分解式, 那么, $\boldsymbol{C}$ 存在 **WZ** 分解式。此外, 式(3) 仍然成立, 并且其中 $m=(n+1)/2$。 □

性质 2　式(3) 中 W 因子的第 i 列向量为 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}$, 且令 $t=\lceil(\theta-1)/2\rceil$, $r=\lfloor(\theta-1)/2\rfloor$。那么,

(1) 当 θ 为偶数时, 对于 $i\in[1,\xi]$ 和 $i\in[n-\varepsilon+1, n]$, 成立 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}} = (\cdots, w_{i,i}, \cdots)^{\mathrm{T}}$; 对于 $i\in[\xi+1, p]$ 和 $i\in[n-p+1, n-\varepsilon]$ 时, 成立

$$\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}} = \begin{cases} (\cdots, w_{i,i}, \cdots, w_{i+(2r+1)p,i}, \cdots)^{\mathrm{T}}, i\in[\xi+1, p] \\ (\cdots, w_{i-(2r+1)p,i}, \cdots, w_{i,i}, \cdots)^{\mathrm{T}}, i\in[n-p+1, n-\varepsilon] \end{cases}$$

(2) 当 θ 为奇数时, 对于 $i\in[1,\varepsilon]$ 和 $i\in[n-\xi+1, n]$, 成立 $\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}} = (\cdots, w_{i,i}, \cdots)^{\mathrm{T}}$; 对于 $i\in[\varepsilon+1, p]$ 和 $i\in[n-p+1, n-\xi]$ 时, 成立

$$\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}} = \begin{cases} (\cdots, w_{i,i}, \cdots, w_{i+2rp,i}, \cdots)^{\mathrm{T}}, i\in[\varepsilon+1, p] \\ (\cdots, w_{i-2rp,i}, \cdots, w_{i,i}, \cdots)^{\mathrm{T}}, i\in[n-p+1, n-\xi] \end{cases}$$

证明: 仅对结论的前半部分证明, 后半部分证明类似。只要证明第 i 列中除 $w_{i,i}$ 外, 其它可能非零元的行下标满足大于 n 或小于 1。分 θ 的奇偶性进行讨论。

(1) θ 为偶数。由式(3): $i\in[1,\xi]$ 时, 由 $i-p\leqslant\xi-p<1$ 和 $i+2tp\geqslant 2\lceil(\theta-1)/2\rceil p+1=1+n$ 知 $w_{i-p,i}$ 和 $w_{i+2tp,i}$ 的列号超出了 W 因子边界, 从而 $w_{i-p,i}=w_{i+2tp,i}=0$。同理, 当 $i\in[n-\varepsilon+1,n]$ 时, 有 $i+p>n$, $i-2tp<1$。

(2) θ 为奇数。由式(3): 当 $i\in[1,\varepsilon]$ 时, 有 $i-p\leqslant\varepsilon-p<1$, $i+(2r+1)p\geqslant 1+(2(\theta-1)/2+1)p>n$; 当 $i\in[n-\xi+1,n]$ 时, 有 $i+p>n$, $i-(2r+1)p<1$。 □

由性质2、引理 3 和式(5), 立即可得性质 3。

性质 3　式(3)所示 W 因子, 除去最前面 p 列和最后面的 p 列外, 每列中非零元个数为 3; 式(5)所示 W 因子, 当 $k\geqslant 1$ 时, 各行中非零元素个数均为 3。

3　实对称正定 *p*-三对角矩阵的 WZ 分解

定理 3　实 p-三对角矩阵 $\boldsymbol{C}$, 如果它是对称正定的, 那么, 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的 WZ 分解式的 W 因子为实矩阵且对角线元素均可以为正实数。

证明　矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为对称正定矩阵等价于主子式 > 0。以 p 为偶数为例, 有 $\varepsilon=\xi$。

(1) 设 $\boldsymbol{C}$ 的 i 行到 j 行及 i 列到 j 列组成子矩阵为 $\boldsymbol{C}_{i\to j}$, 其行列式为 $D_{i\to j}$。易证明: 当 $k=1,2,\cdots,m-1$ 时成立: (a) $D_{m-k\to m+k}=w^2_{m-k,m-k}w^2_{m-k+1,m-k+1}\cdots w^2_{m+k,m+k}$; (b) $D_{m-k-1\to m+k}=w^2_{m-k-1,m-k-1}w^2_{m-k,m-k}\cdots w^2_{m+k,m+k}$。

先证(a): 对 $\boldsymbol{C}_{m-k\to m+k}$ 中 k 用归纳法。当 $k=1$ 时, 由 2.2 节中证明过程, 令 $\boldsymbol{W}_{m-1\to m}=\mathrm{diag}(w_{m-1,m-1},w_{m,m})$, 则有 $\boldsymbol{C}_{m-1\to m}=\boldsymbol{W}_{m-1\to m}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}_{m-1\to m}$, 从而 $D_{m-1\to m}=w^2_{m-1,m-1}w^2_{m,m}$。令 $\boldsymbol{W}_{m-1\to m+1}=\mathrm{diag}(w_{m-1,m-1},w_{m,m},w_{m+1,m+1})$, 则有 $\boldsymbol{C}_{m-1\to m+1}=\boldsymbol{W}_{m-1\to m+1}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}_{m-1\to m+1}$, 从而 $D_{m-1\to m+1}=w^2_{m-1,m-1}w^2_{m,m}w^2_{m+1,m+1}$。

当 $k=l\,(<\varepsilon-1)$ 时结论成立, 则 $k=l+1\,(<\varepsilon)$ 时, 令 $\boldsymbol{W}_{m-l+1\to m+l-1}=\mathrm{diag}(w_{m-l-1,m-l-1},\boldsymbol{W}_{m-l\to m+l},w_{m+l+1,m+l+1})$, 有

$$\boldsymbol{C}_{m-l-1\to m+l+1}=\boldsymbol{W}_{m-l+1\to m+l-1}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}_{m-l+1\to m+l-1},\ D_{m-l-1\to m+l+1}=w^2_{m-l-1,m-l-1}D_{m-l\to m+l}w^2_{m+l+1,m+l+1}$$

当 $k=\varepsilon$ 时, $D_{m-\varepsilon+1\to m+\varepsilon-1}$ 已知, 由式(5)知:

$$\boldsymbol{C}_{m-\varepsilon\to m+\varepsilon}=\begin{bmatrix} w_{m-\varepsilon,m-\varepsilon} & & \\ & \boldsymbol{W}_{m-l\to m+l} & \\ w_{m+\varepsilon,m-\varepsilon} & & w_{m+\varepsilon,m+\varepsilon}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{m-\varepsilon,m-\varepsilon} & & \\ & \boldsymbol{W}_{m-l\to m+l} & \\ w_{m+\varepsilon,m-\varepsilon} & & w_{m+\varepsilon,m+\varepsilon}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$D_{m-\varepsilon\to m+\varepsilon}=w^2_{m-\varepsilon,m-\varepsilon}w^2_{m+\varepsilon,m+\varepsilon}D_{m-\varepsilon+1\to m+\varepsilon-1}$$

当 k 依次取值 $\varepsilon+1,\varepsilon+2,\cdots,p-1$ 时结论成立: 令 $\boldsymbol{W}_{m-k\to m+k}=\begin{bmatrix} w_{m-k,m-k} & (\cdots,w_{m-k+p,m-k+p},\cdots) & \\ & \boldsymbol{W}_{m-k+1\to m+k-1} & \\ & (\cdots,w_{m+k-p,m+k-p},\cdots) & w_{m+k,m+k}\end{bmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{C}_{m-k\to m+k}=\boldsymbol{W}_{m-k\to m+k}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}_{m-k\to m+k},\ D_{m-k\to m+k}=w^2_{m-k,m-k}w^2_{m+k,m+k}D_{m-k+1\to m+k-1}$$

当 $k=p$ 时, 令 $\boldsymbol{W}_{m-p\to m+p}=\begin{bmatrix} w_{m-p,m-p} & (\cdots,w_{m-p,m},\cdots) & \\ & \boldsymbol{W}_{m-p+1\to m+p-1} & \\ w_{m+p,m-p} & (\cdots,w_{m+p,m},\cdots) & w_{m+p,m+p}\end{bmatrix}$, 有

$$\boldsymbol{C}_{m-p\to m+p}=\boldsymbol{W}_{m-p\to m+p}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}_{m-p\to m+p},\ D_{m-p\to m+p}=w^2_{m-p,m-p}w^2_{m+p,m+p}D_{m-p+1\to m+p-1}$$

当 $k=p+1,\cdots,p+\varepsilon-1$ 时, 令 $\boldsymbol{W}_{m-k\to m+k}=\begin{bmatrix} w_{m-k,m-k} & (\cdots,w_{m-k,m-1},\cdots,w_{m-k,m+p-1},\cdots) & \\ & \boldsymbol{W}_{m-k+1\to m+k-1} & \\ & (\cdots,w_{m-k,m-p+1},\cdots,w_{m+k,m+1},\cdots) & w_{m+k,m+k}\end{bmatrix}$, 有

$$C_{m-k\to m+k} = W_{m-k\to m+k} W^{T}_{m-k\to m+k},\ D_{m-k\to m+k} = w^2_{m-k,m-k} w^2_{m+k,m+k} D_{m-k-1\to m+k+1} \tag{6}$$

当 $k = p + \varepsilon ¦ \chi$ 时, 令 $W_{m-\chi\to m+\chi} =$

$$\begin{bmatrix} w_{m-\chi,m-\chi} & (\cdots, w_{m-\chi,m-\chi+p}, \cdots, w_{m-\chi,m-\chi+2p}, \cdots) & \\ & W_{m-\chi+1\to m+\chi-1} & \\ w_{m+\chi,m-\chi} & (\cdots, w_{m+\chi,m+\chi-p}, \cdots) & w_{m+\chi,m+\chi} \end{bmatrix}$$, 有

$$C_{m-\chi\to m+\chi} = W_{m-\chi\to m+\chi} W^{T}_{m-\chi\to m+\chi},\ D_{m-\chi\to m+\chi} = w^2_{m+\chi,m+\chi} w^2_{m-\chi,m-\chi} D_{m-\chi+1\to m+\chi-1} \tag{7}$$

当 $k > \chi$ 时, 归纳假设: $k = k_0$ 时结论成立, 即 $D_{m-k_0\to m+k_0} = w^2_{m-k_0,m-k_0} w^2_{m-k_0+1,m-k_0+1} \cdots w^2_{m,m} \cdots w^2_{m+k_0,m+k_0}$。那么, 当 $k = k_0 + 1$ 时, 由上述分析和式(5)知, $C_{m-k\to m+k} = W_{m-k\to m+k} W^{T}_{m-k\to m+k}$, 其中 $W_{m-k\to m+k}$ 与 $W_{m-k_0\to m+k_0}$ 的关系式结构类似式(6)或式(7)。从而由归纳假设知 $D_{m-k\to m+k} = w^2_{m-k,m-k} w^2_{m+k,m+k} D_{m-k_0\to m+k_0}$。即(a)得证。

对(b): 由式(2)知第 $m-k-1$ 列中非零元的行下标范围为$[1, m-k-1]$和$[m+k+1, n]$, 因此, $w_{m-k-1,m+k} = 0$。再由式(5)知 $C_{m-k-1\to m+k} = \begin{bmatrix} w_{m-k-1,m-k-1} & * \\ 0 & W_{m-k\to m+k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{m-k-1,m-k-1} & 0 \\ *^{T} & W^{T}_{m-k\to m+k} \end{bmatrix}$, $D_{m-k-1\to m+k} = w^2_{m-k-1,m-k-1} D_{m-k\to m+k}$。其中, $*$ 表示任意列向量。而由(a)已证得 $D_{m-k\to m+k}$ 的表达式, 从而(b)正确。

(2) 由(1)结论得 $w^2_{m-k,m-k} = D_{m-k\to m+k-1} / D_{m-k+1\to m+k-1}$, $w^2_{m+k,m+k} = D_{m-k\to m+k} / D_{m-k\to m+k-1}$ $(k = 1, \cdots, m-1)$。即得 W 因子对角线元素的计算式。由于矩阵 C 对称正定, 所以上式中每个主子式 $D_{i\to j}$ 为正实数, 从而每个 $w^2_{m-k,m-k}$ 和 $w^2_{m+k,m+k}$ 为正实数, 且可以选择每个 $w_{m-k,m-k}$ 和 $w_{m+k,m+k}$ 为正实数。

(3) 由式(4)知其它非零元素计算均是实数间的运算, 故 W 因子中每个非零元素都是实数。 □

由定理3知, W 因子的正实数对角元素被 C 的各子式的行列式惟一确定, 因此可得如下定理:

定理4 实对称正定 p-三对角矩阵 C, 当对角线上元素均为正实数时, WZ 分解式被 C 惟一确定。

4 总 结

针对对称 p-三对角矩阵, 提出并证明了该类典型结构矩阵的 WZ 分解及其性质。针对对称正定 p-三对角矩阵, 证明了 WZ 分解中 W 因子的元素均为实数, 从而保证 WZ 分解在矩阵求解的算法设计中的有效性。此外, 还证明了 WZ 分解式的惟一性。

参 考 文 献:

[1] 骆志刚. 典型结构大型线性方程组的分布式并行算法研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2001.

[2] Evans D J. Implicit Matrix Elimination Schemes[J]. International Journal of Computer Mathematics, 1993, 48: 229-237.

[3] Chandra S R S. Existence and Uniqueness of WZ Factorization[J]. Parallel Computing, 1997, 23: 1129-1139.

[4] Bylina B. Solving Linear Systems with Vectorized WZ Factorization[J]. Annales UMCS Informatica, 2003, 1(1): 5-13.

[5] Chawla M M, Khazal R R. A New WZ Factorization for Parallel Solution of Tridiagonal Systems[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2003, 80(1): 123-131.

[6] Evans D J. The Cholesky Q. I. F. Algorithm for Solving Symmetric Linear Systems[J]. International Journal of Computer Mathematics, 1999, 72: 283-288.

[7] Chandra S R S, Sarita. Parallel Solution of Large Symmetric Tridiagonal Linear Systems[J]. Parallel Computing, 2008, 34: 177-197.