文章编号: 1001- 2486(2010) 04- 0165- 04

四元数的实矩阵表示*

王不了, 冯良贵
(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 四元数代数在计算机图形学、现代物理学、卫星的姿态表示等领域中都扮演着重要角色, 从数学角度对四元数进行彻底研究是有价值的, 但是, 由于不可交换性, 四元数并不像人们期望的那样易于掌握。处理四元数的方法之一是把它们等同为实数矩阵, 其中各位置上的元素当然是可交换的。这样的"等同"实际上是从四元数代数到 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的代数嵌入。研究了从四元数代数到 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的代数嵌入问题, 给出了把虚单位映成带符号置换矩阵条件下的所有可能的代数嵌入。我们用的方法是去考虑四元数代数生成元(即虚单位)的象。我们考察这些象的性质并确定有哪些实数矩阵满足它们。然后, 我们运用群作用的语言化简了问题。我们得到的结论是有趣的: 决定着嵌入的那些关键性的矩阵对是由的实数矩阵对构成的。而这样的矩阵对本质上只有两对。

关键词: 四元数; 实矩阵; 表示
中图分类号: O151.21 文献标识码: A

Real Matrix Representation of Quaternions

WANG Bu-liao, FENG Liang-gui
(College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Quaternion algebra plays an important role in computer graphics, modern physics, attitude representation of satellite among many others. It is valuable to make a thorough study of quaternion from a mathematical point of view. However, due to the non-commutative nature, quaternion algebra is not so easy to handle as people expected. One of the methods to deal with quaternions is to identify them with real matrices, the entries of which are of course commutative. These identifications are actually embeddings from quaternion algebra to $\mathbf{R}^{n\times n}$. The current method investigated the algebraic embedding problem from the quaternion algebra to $\mathbf{R}^{n\times n}$, and found out all the possible algebraic embeddings under the condition that maps the imaginary units to signed permutation matrices. The method is to consider the images of the generators (i.e. the imaginary units) of quaternion algebra., then investigated the properties of these images and determined what kind of real matrices fulfilled them. Next, it solved the problem by invoking the language of group action. The conclusion turns out to be interesting: the crucial pairs of matrices, which determine the embeddings, are made up of real matrix pairs And there are essentially two pairs of the latter kind.

Key words: quaternion; real matrix; representation

设R 表示实数域, $\mathrm{H} = \{a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \mid a, b, c, d \in \mathrm{R}\}$ 表示四元数代数, 它的乘法表: $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$, $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$。四元数在理论和工程领域有着重要的应用, 比如, 在纯粹数学中, 用四元数可以描述三维和四维空间中的旋转群[1]。在工程应用上, 文献[2]是将前述性质应用于卫星的姿态表示的一个综述。此外, 四元数还在物理学中有重要应用, 文献[3]是这种应用的一个总结。这些应用导致对四元数结构的研究成为数学研究的一个热点[4-6], 四元数的实矩阵表示理论将对四元数内部结构以及四元数矩阵的研究起积极的促进作用。

考察从H 到 $R^{n\times n}$ 的具有如下性质的代数嵌入的集合, 它们把 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 对应到带符号的置换矩阵(即, 每行每列都只有一个属于{1, -1}的非零元的矩阵)。把 $\mathrm{R}^{n\times n}$ 中带符号的置换矩阵和置换矩阵的集合分别记为 $SP(n)$ 和 $P(n)$。用这些记号, 要考察的前述集合与集合 $\Phi(n) \triangleq \{(A, B) \in SP(n) \times SP(n) \mid$

* 收稿日期: 2009-12-29
作者简介: 王不了(1981—), 男, 博士生。

$A^2 = B^2 = -I_n$ 并且 $AB = -BA\}$ 通过映射 $f \mapsto (f(i), f(j))$ 形成一一对应。因此在下文中集中研究并最终决定 $\Phi(n)$(这里 n 是任意自然数)。

1 记号与预备知识

把自然数的集合记做 $\mathbb{N}$, n 元对称群记做 S_n, n 阶单位阵记做 I_n, 最后, E_{ij} 将表示一个具有特定阶数的矩阵, 它的 (i, j) 位置的元素是 1, 其余位置上的都是 0。再做一个特殊的约定, 即把集合 $\{1, \cdots, n\}$ 记做 N, 而 $\{1, -1\}^N$ 表示所有从 N 到 $\{1, -1\}$ 的映射。

每个 n 阶置换矩阵都可以写成 $\sum_i E_{\sigma(i)i}$(记做 $[\sigma]$)的形式, 其中 $\sigma \in S_n$。故 $SP(n)$ 中的元素均有表示 $\sum_i f(i) E_{\sigma(i)i}$(记做 $[f, \sigma]$), 其中 $f \in \{1, -1\}^N$, $\sigma \in S_n$。在这种情形下, σ 被称为 $[f, \sigma]$ 对应的置换, 而 f 则与 $(f(1), \cdots, f(n))$ 这个 n 元组等同, 其中 $f(i)$ 是上述矩阵第 i 列唯一一个非零元。通过把 $[f, \sigma]$ 映到 $[\sigma]$, 再把 $[\sigma]$ 映到 σ, 得到如下的群同态:

$$SP(n) \to P(n) \to S_n \tag{1}$$

其中第二个映射事实上是同构。通过简单计算, 我们还确信对于 $SP(n)$ 中的每个元素 A, 有 $AA^{\mathrm{T}} = I_n$。

经过简单的计算可知: 如果存在 $A \in SP(n)$ 使得 $A^2 = -I_n$, 那么 n 是偶数(因为这样的 $A = [f, \sigma]$ 必须是斜对称的, 从而 σ 没有不动点, 而且是互不相交的对换的积)。现在设 $(A, B) \in \Phi(n)$, 其中 $A = [f, \sigma]$, $B = [g, \omega]$。类似地, σ 和 ω 都是互不相交对换的积并且没有不动点。根据计算并结合条件 $AB = -BA$ 以及 $(AB)^2 = -I_n$, 就知道 $\sigma\omega$ 同样拥有前述性质。这些性质在后面的证明中将被默认。运用归纳法, 可以证明:

命题 1 如果 $\Phi(n)$ 不是空集, 那么 n 是 4 的倍数。

2 集合 $\Phi(4)$ 在共轭作用下的轨道

把 $\mathbb{H}$ 视做 $\mathbb{R}$ 上的四维向量空间并取定它的基 $\boldsymbol{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, 和 $\boldsymbol{k}$。对于 $\mathbb{H}$ 中的每一个元素 h, 记 h^l 为它对应的左乘算子, 它把 x 映到 hx。可以看出, h^l 是 $\mathbb{H}$ 上基于 $\mathbb{R}$ 的线性变换, 而从 $\mathbb{H}$ 到 $\mathrm{End}({}_{\mathbb{R}}\mathbb{H})$ 的映射 $h \mapsto h^l$ 是一个代数嵌入。因此有自然的代数嵌入 $\alpha: \mathbb{H} \to \mathbb{R}^{4\times4}$; $h \mapsto (h^l)$, 其中 (h^l) 是 h^l 在给定基下的矩阵。

显然, α 是要考察的集合中的一员。根据我们的路线, α 可以表示成 $\Phi(4)$ 中的对子 (P, Q), 其中 $P = \alpha(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \alpha(j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

对称地, 从上述讨论的“右版本”中得到集合 $\Phi(4)$ 中的另一个对子 (P^-, Q^-), 其中 $P^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

在下文中把 S_4 中的元素 $(12)(34)$ 和 $(13)(24)$ 分别记做 γ 和 δ, 于是 $\gamma\delta = (14)(23)$。下面的命题是由 Farebrother 等在文献[7]中得到的。

命题 2[7] 集合 $\Phi(4)$ 中一共有 48 个元素。

为了探讨集合 $\Phi(n)$ 的具体结构, 首先注意到对于任何 $(A, B) \in \Phi(n)$, $T \in P(n)$, 对子 (TAT^{-1}, TBT^{-1})(记做 $T(A, B)T^{-1}$)都仍在 $\Phi(n)$ 中。更进一步, 在 $\Phi(n)$ 非空的情形下, 如下定义的共轭作用: $T \cdot (A, B) \triangleq T(A, B)T^{-1}$ 是 $P(n)$ 对集合 $\Phi(n)$ 的群作用。称 $\Phi(n)$ 中的两个对子相互共轭, 如果它们在这个作用下的同一轨道中。

引理 1 (a) 如果 $T\in P(4)$ 并且 $T(P,Q)T^{-1}=(P,Q)$, 那么 $T=I_4$。

(b) 如果 $T\in P(4)$ 并且 $T(P^-,Q^-)T^{-1}=(P^-,Q^-)$, 那么 $T=I_4$。

(c) 群 $P(4)$ 没有元素 T 能满足等式 $T(P,Q)T^{-1}=(P^-,Q^-)$。

此引理可通过映射(1), 把对矩阵的讨论转化为对置换的讨论, 从而得证。这里不再赘述。由上述引理, 就可以给出 $\Phi(4)$ 的具体描述。

定理 1 集合 $\Phi(4)$ 是 $\{T(P,Q)T^{-1}\mid T\in P(4)\}$ 和 $\{T(P^-,Q^-)T^{-1}\mid T\in P(4)\}$ 的不交并, 而他们都有 24 个元素。

3 集合 $\Phi(4k)$ 的具体表示

把下面的引理作为对 $\Phi(4k)(k\in \mathrm{N})$ 研究的开始, 这个引理说明 $\Phi(4k)$ 中的元素是由基本表示对堆砌起来的。

引理 2 对于任何自然数 k, 集合 $\Phi(4k)$ 中的每一个元素都共轭于如下形式的对子:

$$\left(\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_k),\mathrm{diag}(B_1,\cdots,B_k)\right) \tag{2}$$

其中 $(A_r,B_r)=(P,Q)$ 或 (P^-,Q^-) (对于所有 $r=1,\cdots,k$)。

这个引理可以用归纳法证明, 限于篇幅, 这里从略。

对于任意自然数 k, 称式(2)所示的矩阵为一个 k 级的 L-R 对子, 当然这里要求 $(A_r,B_r)=(P,Q)$ 或 (P^-,Q^-) 对于所有的 r 成立。同时称等于 (P,Q) 的对子 (A_r,B_r) 的个数为该 L-R 对子的指数。明显地, 对于具有式(2)形式的任何一个 L-R 对子, 其第一、二项对应的置换分别是

$$\gamma_{4k}=(12)(34)\cdots(4k-3,4k-2)(4k-1,4k) \tag{3}$$

$$\delta_{4k}=(13)(24)\cdots(4k-3,4k-1)(4k-2,4k) \tag{4}$$

利用上述术语, 给出对最终结果有决定意义的如下引理。

引理 3 相互共轭的两个 L-R 对子具有相同的指数。

证明: 设 $n=4k, N=\{1,\cdots,n\}$ (与预备知识中一致)。如果 (A,B) 是一个 k 级的形如式(2)的 L-R 对子, 而 (A',B') 是与之同级的 L-R 对子, 其主对角块分别是 $A'_1,\cdots,A'_k$ 和 $B'_1,\cdots,B'_k$。再假定 $T(A',B')T^{-1}=(A,B)$, 其中 $T\in P(4k)$。

由式(3)以及置换的型的讨论可知, ρ 把 1, 2, 3, 4 对应到四个连续整数, 记它们为 $s+1, s+2, s+3, s+4$。并且可以确定 $(s+1,s+2)$ 和 $(s+3,s+4)$ 是 γ_{4k} 的因子, 而 $(s+1,s+3)$ 和 $(s+2,s+4)$ 是 δ_{4k} 的因子。通过对模 4 的余数的讨论, 对比式(3)中 γ_{4k} 的因子和 $(s+1,s+2)$, 就知道 s 只能是 4 的倍数。

暂时称集合 $\{4(t-1)+1,\cdots,4(t-1)+4\}$ 是 N 的第 t 部分。由整数 s 的性质知, 存在某个 $t\in\{1,\cdots,k\}$ 使得 $\rho(\{1,2,3,4\})$ 是 N 的第 t 部分, 并且存在 S_k 中的置换 μ, 使得对于任何 $t\in\{1,\cdots,k\}$, ρ 把 N 的第 t 部分对应到第 $\mu(t)$ 部分。

对于每个 $t\in\{1,\cdots,k\}$, 显然有 S_4 中的置换 ε_t, 使得 $\rho(4(t-1)+i)=4(\mu(t)-1)+\varepsilon_t(i)$ 对 $i=1,2,3,4$ 成立。所以能把 ρ 写成复合 $\xi\eta$, 其中 $\eta: 4(t-1)+i\mapsto 4(\mu(t)-1)+i$, 而 $\xi: 4(t-1)+i\mapsto 4(t-1)+\varepsilon_t(i)$ 对任何 $t\in\{1,\cdots,k\}$ 和 $i\in\{1,2,3,4\}$。同时注意到 $[\eta]=[\mu]\otimes I_4$ 的 $(\mu(j),j)$-块是 I_4, 而 $[\xi]=\mathrm{diag}(T_1,\cdots,T_k)$, 其中 $T_t=[\varepsilon]\in P(4)$。

把对应的矩阵分解同我们做的假设相对比并观察该 L-R 对子的第一项, 得到等式

$$([\mu]\otimes I_4)\,\mathrm{diag}(A'_1,\cdots,A'_k)=\mathrm{diag}(T_1^{-1}A_1T,\cdots,T_k^{-1}A_kT_k)([\mu]\otimes I_4)$$

从而 A'_t 和 $T_{\mu(t)}^{-1}A_{\mu(t)}T_{\mu(t)}$ 相等, 因为它们分别是上述等式左右两边乘积矩阵的 $(\mu(t),t)$-块。根据对第二项同样的讨论, 就知对任何 $t\in\{1,\cdots,k\}$, μ 满足等式 $(A'_t,B'_t)=T_{\mu(t)}^{-1}(A_{\mu(t)},B_{\mu(t)})T_{\mu(t)}$, 其中 $T_{\mu(t)}\in P(4)$。回忆引理 1(c) 及 L-R 对子的定义就得到所要证明的结论。 □

最后这条定理阐述了我们的最终结果。

定理 2 对于任意自然数 k, 集合 $\Phi(4k)$ 是 $k+1$ 个互不相交的集合 $\{T(A(r),B(r))T^{-1}\mid T\in$

$P(4k)\}$, $r=0,1,\cdots,k$ 的并集, 其中$(A(r),B(r))$是如下的指数为 r 的 L-R 对子:

$$\left(\mathrm{diag}(P,\cdots,P,P^{-},\cdots,P^{-}),\mathrm{diag}(Q,\cdots,Q,Q^{-},\cdots,Q^{-})\right) \tag{5}$$

证明: 关于互不相交的断言直接来自引理3。而这些集合都包含在 $\Phi(4k)$ 中则是明显的。

下面证明 $\Phi(4k)$ 中的每一个元素都共轭于对子$(A(r),B(r))$, 对于某个 $r\in\{0,1,\cdots,k\}$。令 $E(i,j)=I_k-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}\in P(k)$, 那么 $E(i,j)$ 对$\mathbb{R}^{k\times k}$ 的共轭作用使得对角矩阵的(i,i)和(j,j) 元素交换位置。在分块矩阵的情形下, $P(4k)$ 中的元素 $E(i,j)\otimes I_4$ 能对 $k\times k$ 块的 L-R 对子起同样的作用。于是每一个 k 级的指数为r 的 L-R 对子都共轭于对子$(A(r),B(r))$。回顾引理2, 我们的断言立即得到证明。 □

上述定理表明, 在 $P(4k)$ 的共轭作用下, 集合 $\Phi(4k)$ 被分割成 $k+1$ 个轨道, 它们分别包含着如式(5)所示的 $k+1$ 个"标准"的 L-R 对子。

4 小结

本文研究四元数代数到$\mathbb{R}^{n\times n}$ 的代数嵌入问题, 用初等的方法给出了把虚单位映成带符号置换矩阵条件下的所有代数嵌入的全体, 并剖析了其结构。推广并系统地完善了文献[7]中得到的仅在 $n=4$ 这种特殊情形下的结果。我们清楚地看到, 集合 $\Phi(n)$ 非空当且仅当 n 是4的倍数。在非空的情形下, 概略地说, 集合 $\Phi(4)$ 中本质上只有两个元素: (P,Q) 和(P^{-},Q^{-}); 而如果不计置换的共轭作用, 集合 $\Phi(4k)$ 中的每个元素都是由这两个对子堆砌起来的。

参考文献:

[1] Altmann S L. Rotations, Quaternions and Double Groups [M]. Oxford University Press, New York, 1986.

[2] Shuster M D. A Survey of Attitude Representations [J]. J. of the Astron. Sci., 1993, 41: 439-517.

[3] Marchiafava S, Piccinni P, Pontecorvo M. Quaternionic Structures in Mathematics and Physics [M]. World Scientific, New Jersey, 2001.

[4] Feng L. Simultaneously Reducing Two Quaternionic Matrices and Its Applications [J]. Indian J. Pure Appl. Math., 2008, 39: 509-522.

[5] Ciavarella M, Terracni L. Some Explicit Constructions of Integral Structures in Quaternion Algebras [J]. Linear Alg. Appl., 2009, 431: 1013-1026.

[6] Ozdemir M. The Roots of a Split Quaternion[J]. Appl. Math. Letters, 2009, 22: 258-263.

[7] Farebrother R W, Gro J, Troschke S O. Matrix Representation of Quaternions [J]. Linear Algebra Appl., 2003, 362: 251-255.