

文章编号: 1001- 2486(2010) 05- 0012- 05

## 航天器交会中的多圈 Lambert 问题研究\*

谭丽芬, 闫野, 周英, 唐国金

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 针对大椭圆轨道追踪器固定时间直接碰撞交会问题, 介绍了一种快速确定多圈 Lambert 问题最优解的新方法。研究了多圈 Lambert 转移解, 分析了转移时间与转移轨道参数的关系; 研究了无时间约束最优直接碰撞交会及其必要条件。仿真表明: 最优解快速确定方法有效、可行, 并可提高计算效率。

**关键词:** 多圈 Lambert 转移; 最优交会; 大椭圆轨道

**中图分类号:** V412.4      **文献标识码:** A

Research on Multiple revolution Lambert Problem in  
Spacecraft Rendezvous

TAN Li-fen, YAN Ye, ZHOU Ying, TANG Guo-jin

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** According to the fixed time hard rendezvous with chase spacecraft in high eccentric orbit, a new algorithm was introduced to solve multiple revolution Lambert problem, which can find the optimal transfer orbit quickly. The solutions of multiple-revolution Lambert transfer problem were researched, and the relationship between transfer time and transfer orbit elements was figured out while the optimal rendezvous problem without time constraint was also studied. The calculation results for fixed time rendezvous validate the correctness and high-level efficiency of the algorithm.

**Key words:** multiple-revolution lambert transfer; optimal rendezvous; high eccentric orbit

Lambert 问题是航天动力学中的一个基本问题, 其实质是两点边值问题, 主要研究如何根据两个位置矢量和转移时间确定航天器转移轨道。依转移时间长短可分为经典 Lambert 问题与多圈 Lambert 问题。在经典 Lambert 问题中, 转移时间短于转移轨道周期。在多圈 Lambert 问题中, 因转移时间较长, 航天器需要在转移轨道上停泊多圈以节省燃料。Lambert 问题涉及范围广, 在空间交会、星际飞行等领域中都有应用。在空间交会中, 追踪器与目标航天器的交会有直接碰撞交会与软交会两种方式, 直接碰撞交会在交会点只有相对位置约束, 而软交会在交会点同时有相对位置与相对速度约束。

关于 Lambert 问题, 目前已有一些较深入的研究。文献[1]研究了共面、沿圆轨道同向运动两航天器的固定时间双冲量最小速度增量交会问题, 提出了一种可以快速确定最优解的方法。文献[2]基于共面两圆轨道上的两个固定点交会问题, 给出了一种多圈 Lambert 问题求解方法; 其研究表明多圈 Lambert 算法可节省燃料。文献[3]研究了基于多脉冲多圈 Lambert 方法的远程调相问题。文献[4]应用 Lagrange 飞行时间方程研究两圆轨道上两固定点间的 Lambert 交会问题, 提出满足最小变轨速度增量要求的轨道转移图解法。文献[5]采用求解 Gauss 问题的普适变量法求解 Lambert 问题, 清晰描述了 Lambert 问题的另一种求解思路, 得到了多圈 Lambert 问题解。本文采用文献[1]提出的辅助转移方法, 重点研究了共面与非共面两种情况下大椭圆轨道追踪器固定时间交会问题中的多圈 Lambert 算法最优解确定。

## 1 固定时间多圈 Lambert 转移研究

给定两位置矢量  $r_1, r_2$ , 对应  $P, Q$  两固定点(见图 1), 过该两点的椭圆转移轨道有无数多条。给定

\* 收稿日期: 2010- 04- 02

基金项目: 国家 863 高技术资助项目

作者简介: 谭丽芬(1981-), 女, 博士生。

航天器运行方向,若转移轨道半长轴  $a$  一定,则有两条椭圆转移轨道:长程转移轨道与短程转移轨道<sup>[4]</sup>;若转移时间  $t_f$  一定,过  $P$ 、 $Q$  两点有一条(经典 Lambert 问题)或  $2N_{\max} + 1$  ( $N_{\max}$  为多圈 Lambert 转移中允许的最大飞行圈数)条椭圆转移轨道<sup>[4]</sup>;若  $t_f$  和  $a$  都一定,过  $P$ 、 $Q$  两固定点只有一条椭圆轨道,该轨道可能属于长程转移轨道类型,也可能属于短程转移轨道类型。

文献[2]研究表明,较经典 Lambert 转移,多圈 Lambert 转移可节省变轨燃料。但该文献没有深入研究燃料消耗最优算法,而是直接比较  $2N_{\max} + 1$  个解,找到最小值。本节简单介绍固定时间多圈 Lambert 转移问题,研究无时间约束最优直接碰撞交会(以下简称交会)问题,即辅助转移问题。基于辅助转移结果,快速确定固定时间多圈 Lambert 转移最优解。

### 1.1 固定时间多圈 Lambert 转移轨道

给定两位置矢量  $r_1, r_2$ , 可用 Lagrange 飞行时间定理描述相应转移时间如下:

$$\sqrt{\mu} t_f = a^{\frac{3}{2}} [2N\pi + \alpha - \beta - (\sin\alpha - \sin\beta)] \quad (1)$$

其中  $\mu$  是地球引力常数,  $N$  是转移轨道上停泊圈数,  $\alpha, \beta$  具体定义为

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{s}{a}\right), \quad \beta = \arccos\left(1 - \frac{s-d}{a}\right) \quad (2)$$

其中  $d$  是  $P$ 、 $Q$  两点间直线距离,  $s = r_1 + r_2 + d$ 。为研究方便,采用  $r_2$  及以  $r_2$  为半径的圆轨道周期  $T_2$  分别作为距离、时间归一化标准,进行归一化,即有  $r_2 = 1, T_2 = 1$ 。此时引力常数  $\mu = 4\pi^2$ 。

根据式(1),图2描述了转移时间  $t_f$ 、转移轨道停泊圈数  $N$  及转移轨道半长轴  $a$  之间的关系。由图可知,转移轨道停泊圈数  $N$  对应的  $t_f - a$  曲线由上下两支组成,上支属于长程转移轨道,下支属于短程转移轨道。给定两位置矢量( $r_1, r_2, \theta$ )和转移时间,由该曲线可方便、准确确定多圈 Lambert 问题的最大允许停泊圈数  $N_{\max}$ 。

### 1.2 辅助转移问题

得到  $t_f - a$  曲线及转移轨道参数后,下面研究无时间约束最优交会,以得到变轨速度增量  $\Delta v$  - 转移轨道半长轴  $a$  曲线,及最优交会轨道( $\Delta v_{\min}, a_{\min}$ ),为固定时间多圈 Lambert 转移最优交会问题的最优解提供参考(基于( $a_{\min}, t_f$ )点,从  $2N_{\max} + 1$  条转移轨道中确定需要比较的两条转移轨道,见图4)。

图2描述了  $t_f = 1.6$  时  $N_{\max}$  的一种确定方法,由  $t_f = 1.6$  直线与  $a = a_{\min}$  直线(交点为  $O'$ ),结合 Lagrange 飞行时间定理,求出  $N_{O'}$ 。  $N_{\max} = [N_{O'}]$  (向  $-\infty$  取整)。由图2易知,固定时间多圈 Lambert 问题有  $2N_{\max} + 1$  个解。文献[2]给出  $2N_{\max} + 1$  个解的具体求解方法。

文献[1]研究、推导了共面两圆轨道上运动航天器的无时间约束双冲量最优解。本文的辅助转移问题需要研究异面椭圆轨道、圆轨道运行航天器的无时间约束一次冲量最优直接碰撞交会,即求最小能量交会轨道。先导出两位置矢量  $r_1, r_2$ , 包括最小能量交会轨道在内的所有椭圆轨道,然后由最小能量要求找出需要的轨道<sup>[6]</sup>。

异面交会对变轨的第一个要求是在变轨点使轨道面改变  $\xi$ , 即变轨前轨道面(记为 I)与转移轨道面(记为 II)的夹角。规定  $\xi$  角从变轨前轨道面开始,绕  $r_1$  轴逆时针旋转为正。已知  $r_1, r_2, v_1, \xi$  可用下式<sup>[6]</sup>求解。

$$\xi = \arctan\left[\frac{z_1^0 \times z_{II}^0}{z_1^0 \cdot z_{II}^0}\right] \quad (3)$$

上式中  $r_1^0$  是变轨点  $P$  的地心矢量  $r_1$  的单位矢量,  $z_1^0$  是追踪器初始轨道动量矩单位矢量,  $z_{II}^0$  是转移轨道动量矩单位矢量,具体描述如下:

$$z_1^0 = r_1 \times v_1 / |r_1 \times v_1| \quad z_{II}^0 = r_1 \times r_2 / |r_1 \times r_2| \quad (4)$$

在该问题中为了研究方便,用  $r_1$  将长度无量纲化,有

$$Q_{II} = p_{II}/r_1, m = r_2/r, e_{II}^2 = c_2 Q_{II}^2 + c_1 Q_{II} + c_0 \quad (5)$$

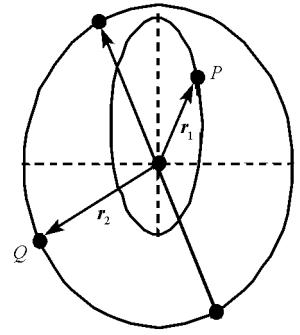


图1 Lambert 问题几何示意图  
Fig. 1 Geometry of Lambert problem

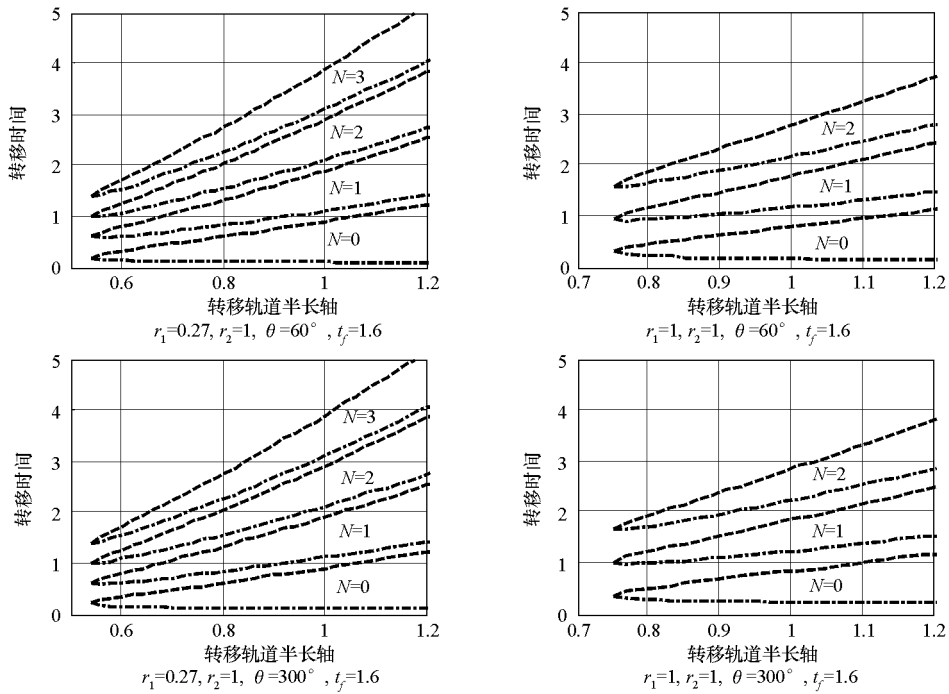


图2 转移时间-转移轨道半长轴曲线

Fig. 2 Relationship between transfer time and semi-major axis of transfer orbit

其中  $p_{II}$ ,  $e_{II}$  分别为转移轨道半通径, 偏心率。  $c_2$ ,  $c_1$ ,  $c_0$  为常数, 其表达式见文献[6]。下面结合最小能量要求确定转移轨道半通径  $p_{II}$ 。 I 为椭圆轨道, II 也为椭圆轨道, P 点变轨所需的速度增量  $\Delta v$  为

$$\Delta v^2 = v_1^2 + v_{II}^2 - 2v_1 v_{II} \left( \sin \Theta_I \sin \Theta_{II} + \cos \Theta_I \cos \Theta_{II} \cos \xi \right) \quad (6)$$

其中  $v_1$ ,  $\Theta_I$ ,  $\xi$  为已知量,  $v_{II}$ ,  $\Theta_{II}$  为变轨后 II 轨道运动参数, 用机械能守恒和动量矩守恒定理, 可将其描述为

$$v_{II}^2 = v_1^2 + \mu a_1 - \mu \left( 1 - e_{II}^2 \right) / \left( Q_{II} r_1 \right) \quad (7)$$

$$v_{II} \cos \Theta_{II} = \sqrt{\mu Q_{II} / r_1} \quad (8)$$

将式(7)、(8)代入式(6)可得式(9), 该式描述了变轨速度增量  $\Delta v$  随归一化转移轨道半通径  $Q_{II}$  的变化规律。该式比较复杂, 很难直接观察出  $\Delta v$  的变化规律。

$$\Delta v^2 = v_1^2 + \mu r_1 \left[ 2 + c_2 Q_{II} + c_1 + \left( c_0 - 1 \right) / Q_{II} \right] - 2v_1 \sin \Theta_I \sqrt{\mu r_1} \left[ \left( c_2 - 1 \right) Q_{II} + \left( c_1 + 2 \right) + \left( c_0 - 1 \right) / Q_{II} \right]^{1/2} - 2v_1 \cos \Theta_I \sqrt{\mu Q_{II} / r_1} \cos \xi \quad (9)$$

为直观, 给出  $\Delta v$  变化曲线。取  $r_1 = [11378.137; 0; 0]$ ,  $v_1 = [0; 7.428; 0]$ , 可得到如图3所示曲线。

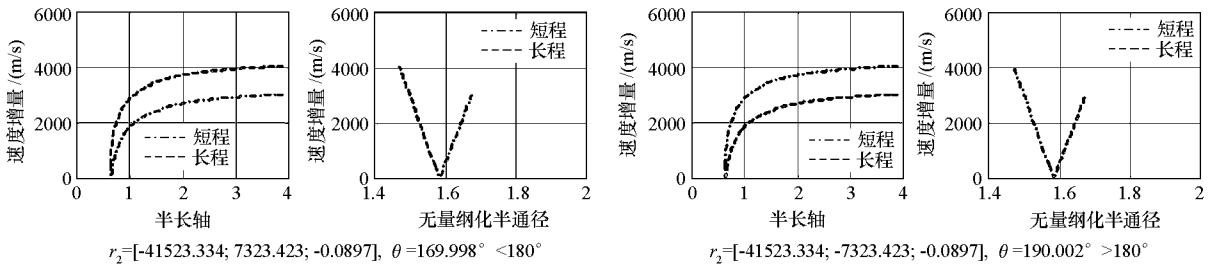


图3 异面交会速度增量  $\Delta v$  变化曲线

Fig. 3 Curve of impulse magnitude of non-coplanar rendezvous

由图3知, 分离角  $\theta$  对  $\Delta v - a$  曲线影响较大。当  $\theta < 180^\circ$  时,  $\Delta v - a$  曲线上支属于长程转移轨道, 下支属于短程转移轨道, 短程转移轨道对应速度增量小于长程转移轨道; 当  $\theta > 180^\circ$  时,  $\Delta v - a$  曲线上支属于短程转移轨道, 下支属于长程转移轨道, 长程转移轨道对应的速度增量要小于短程转移轨道。由

图还可知,速度增量存在极小值点 $(\Delta v_{\min}, a_{\min})$ 。速度增量极小值必要条件为 $d\Delta v/dQ_{\parallel} = 0, d\Delta v/dQ_{\parallel}$ 可描述为

$$\frac{d\Delta v}{dQ_{\parallel}} = \frac{1}{2\Delta v} \left[ \frac{\mu}{r_1} \left( c_2 + \frac{1-c_0}{Q_{\parallel}^2} \right) - v_1 \sin \Theta \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \frac{c_2 - 1 + \left( \frac{1-c_0}{Q_{\parallel}^2} \right) / Q_{\parallel}^2}{\sqrt{(c_2-1)Q_{\parallel} + c_1 + 2 + (c_0-1)/Q_{\parallel}}} - v_1 \cos \Theta \cos \xi \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \frac{1}{\sqrt{Q_{\parallel}}} \right] \quad (10)$$

采用牛顿迭代法等数值方法求解该式,可得到最小 $\Delta v$ 及以对应的 $Q_{\parallel}$ ,转移轨道半长轴 $a_{\min}$ 。

## 2 固定时间多圈 Lambert 转移最优解快速确定

基于辅助转移问题的研究结论:不同情况下 $\Delta v-a$ 曲线变化规律及确定的最小速度增量 $\Delta v_{\min}$ 对应的转移轨道半长轴 $a_{\min}$ ,结合 $t_f-a$ 曲线及给定的转移时间 $t_f$ ,可以把从 $2N_{\max}+1$ 个解中确定最优解的问题转换为比较两个解最优的问题,见图4。

图4中 $t_{Nl}$ 表示 $t_f-a$ 曲线第 $N$ 圈的长程轨道部分与 $a=a_{\min}$ 直线的交点对应的转移时间, $t_{Ns}$ 表示 $t_f-a$ 曲线第 $N$ 圈的短程轨道部分与 $a=a_{\min}$ 直线的交点对应的转移时间。

结合图4,最优解的具体确定过程可描述为:1)确定辅助转移问题中的 $a_{\min}$ ;2)给定 $r_1, r_2, \theta$ ,绘制 $t_f-a$ 曲线;3)给定转移时间 $t_f$ ;4)把以上三个信息在 $t_f-a$ 图中综合表达,可确定 $a=a_{\min}$ 直线与 $t=t_f$ 直线的交点 $O$ ,由此点可确定需要关注的转移轨道停泊圈数 $N$ ;5)结合“ $\theta \leq 180^\circ$ ,半长轴一定,短程转移轨道对应速度增量较长程转移轨道小; $\theta > 180^\circ$ ,半长轴一定,长程转移轨道对应速度增量较短程转移轨道小。”的结论(见图3),确定最终需要比较的两个解(若 $\theta \leq 180^\circ$ ,短程转移类型;若 $\theta > 180^\circ$ ,则是长程转移类型,见图4。)—— $L$ 点表示的解与 $R$ 点表示的解,此两个解中速度增量较小的解即为固定时间多圈 Lambert 转移的最优解。

根据 $\Delta v-a$ 曲线,确定 $a_{\min}$ 后。把 $a_{\min}, t_f$ 代入式(1),求出 $N_o$ (也可用类似的方法确定 $N_{\max}$ )。计算 $N' = [N_o]$ (向 $-\infty$ 取整)的 Lambert 解 $a_{N'l}, a_{N's}$ 。结合图4可得

$$\begin{cases} t_{Nl} \leq t_f \leq t_{(N+1)s}, & a_{\min} < a_{N'l} \\ t_{Ns} \leq t_f \leq t_{Nl}, & a_{N'l} \leq a_{\min} \leq a_{N's} \end{cases} \quad (11)$$

根据式(11)可知, $O$ 点位置有两种情况,分别满足: $t_{Ns} \leq t_f \leq t_{Nl}; t_{Nl} \leq t_f \leq t_{(N+1)s}$ 。不同位置情况的求解过程也不同<sup>[1]</sup>,结合图4,进行具体描述。

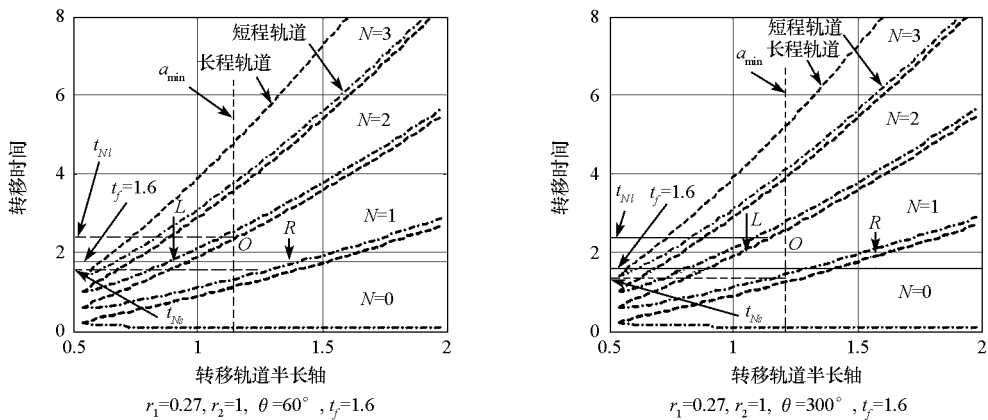


图4 最优解确定方法示意图

Fig. 4 Sketch map for optimal transfer determination

(1)  $N=0$ 情况。① $\theta \leq 180^\circ$ ,若为长程转移解 $a_{Nl}$ ,则需比较 $a_{Nl}$ 与 $a_{(N+1)s}$ 两个解对应的变轨速度增量,以确定最优解;若为短程转移解 $a_{Ns}$ ,则需比较 $a_{Ns}$ 与 $a_{(N+1)s}$ ;② $\theta > 180^\circ$ ,若为长程转移解,则该解为最优;若 $N=0$ 解为短程转移解 $a_{Ns}$ ,则需要比较 $a_{Ns}$ 与 $a_{(N+1)l}$ 两个解,以确定最优解。

(2)  $N=N_{\max}$ 情况。① $\theta \leq 180^\circ$ ,若 $a_{Nl} \leq a_{\min} \leq a_{Ns}$ ,则 $a_{Ns}$ 为最优解;若 $a_{\min} < a_{Nl}$ ,则需比较 $a_{Ns}$ 与 $a_{Nl}$ 两个解;② $\theta > 180^\circ$ ,若 $a_{Nl} \leq a_{\min} \leq a_{Ns}$ ,则需比较 $a_{Nl}$ 与 $a_{(N-1)l}$ 两个解;若 $a_{\min} < a_{Nl}$ ,则 $a_{Nl}$ 为最优解。

(3)  $N \neq N_{\max}, N \neq 0$  情况。①  $\theta \leq 180^\circ$ 。若有  $a_{NI} \leq a_{\min} \leq a_{Ns}$ , 结合  $t_f - a$  曲线与  $\Delta v - a$  曲线变化规律可得需要比较的两个解为:  $a_{Ns}$  与  $a_{(N+1)s}$ , 比较两个解的速度增量大小, 以确定速度增量最小的最优解; 若  $a_{\min} < a_{NI}$ , 则也需比较  $a_{Ns}$  与  $a_{(N+1)s}$  两个解; ②  $\theta > 180^\circ$ 。若有  $a_{NI} \leq a_{\min} \leq a_{Ns}$ , 则需要比较  $a_{NI}$  与  $a_{(N-1)l}$  两个解; 若  $a_{\min} < a_{NI}$ , 则需要比较  $a_{NI}$  与  $a_{(N+1)l}$  两个解。

综上所述, 确定多圈 Lambert 问题最优解不再要求  $2N_{\max} + 1$  个解, 然后一一比较对应速度增量, 而只需比较两个解对应的速度增量大小<sup>[1]</sup>, 就可从此两个解中选择出多圈 Lambert 算法最优解。

### 3 仿真与分析

#### 3.1 辅助转移问题

该仿真研究无时间约束大椭圆轨道追踪器与圆轨道目标的交会问题。针对异面交会问题与共面交会两种情况, 求解速度增量  $\Delta v$  最小的转移轨道。

表 1  $t_0$  时刻追踪器与目标器的位置、速度矢量(地心惯性系)

Tab. 1 Position and velocity vectors of chaser and target at  $t_0$  in ECI

| Q <sub>0</sub> 点位置(km) |              |           | Q <sub>0</sub> 点速度(km/s) |                |                | P 点位置(km)  |   |   | P 点速度(km/s)    |                |                |
|------------------------|--------------|-----------|--------------------------|----------------|----------------|------------|---|---|----------------|----------------|----------------|
| x                      | y            | z         | v <sub>x</sub>           | v <sub>y</sub> | v <sub>z</sub> | x          | y | z | v <sub>x</sub> | v <sub>y</sub> | v <sub>z</sub> |
| 22 351. 079            | - 35 714 980 | 1639. 900 | 2. 607                   | 1. 627         | - 0. 108       | 11 378 137 | 0 | 0 | 0              | 7. 428         | 0              |

表 2 辅助转移最优解

Tab. 2 Optimal transfer of auxiliary transfer problem

| 参数 | $r_1$ (km)  | $\theta(^{\circ})$ | Q 点位置(km)       |               |             | $Q_{II}$ | $a_{\min}$ (km) | $\Delta v_{\min}$ (m/s) |
|----|-------------|--------------------|-----------------|---------------|-------------|----------|-----------------|-------------------------|
|    |             |                    | x               | y             | z           |          |                 |                         |
| 共面 | 11 378. 137 | 169. 997           | - 41 523 334    | 7323. . 423   | - 0. 0897   | 1. 582   | 27 215. 070     | 16. 368                 |
|    | 11 378. 137 | 190. 002           | - 41 523. . 334 | - 7323. . 423 | - 0. 0897   | 1. 582   | 27 215. 070     | 16. 368                 |
| 异面 | 11 378. 137 | 122. 012           | - 22 351 079    | 35 714 980    | - 1639. 900 | 1. 837   | 70 975. 534     | 671. 095                |
|    | 11 378. 137 | 236. 787           | - 23 095 704    | - 35 217 838  | 2027. 831   | 1. 825   | 65 922. 350     | 638. 246                |

表 1 和表 2 中的 P、Q 点表示 Lambert 问题中的固定点。针对表 1 中的追踪器与目标, 经过仿真给出如表 2 的共面与异面交会最优解。

#### 3.2 固定时间多圈 Lambert 转移最优解

该仿真采用快速确定多圈 Lambert 最优解的新方法, 研究固定时间多圈 Lambert 最优交会问题。针对异面交会与共面交会, 求解最小的速度增量  $\Delta v_{\min}$  及相应转移轨道。根据表 2 的无时间约束固定点最优交会仿真结果, 表 3 给出了相同工况下有时间约束的固定点最优交会仿真结果: 固定时间多圈 Lambert 转移的最小速度增量及转移轨道参数。

表 3 多圈 Lambert 问题最优解

Tab. 3 Optimal solutions of multiple-revolution Lambert problem

| 参数   | $r_1$ (km)  | $\theta_1(^{\circ})$ | N  | $t_f$ (s)      | a(km)       | e      | $\Delta v_{\min}$ (m/s) |
|------|-------------|----------------------|----|----------------|-------------|--------|-------------------------|
| 共面交会 | 11 378. 137 | 169 997              | 41 | 1 864 017. 961 | 27 352. 165 | 0. 584 | 69. 113                 |
|      | 11 378. 137 | 190 002              | 41 | 1 864 017. 961 | 27 271. 452 | 0. 583 | 33. 049                 |
| 异面交会 | 11 378. 137 | 122 012              | 9  | 1 852 529. 961 | 69 989. 256 | 0. 838 | 758. 877                |
|      | 11 378. 137 | 236 787              | 11 | 1 880 000. 0   | 66 797. 496 | 0. 830 | 777. 088                |

在仿真过程中采用本文介绍的最优解快速确定方法, 只通过比较两个解就可以完全确定  $2N_{\max} + 1$  个解中的最优解, 提高了效率。以上仿真所得结果都利用 STK 验证了正确性, 确定能在  $t_f$  时刻实现对目标的直接碰撞。

化的特点。设计变量灵敏度分析表明了影响封装体变形和应力的主要参数,提出的方法和数值分析结果为此种结构的设计和 optimization 提供一定参考。

## 参考文献:

- [1] Zhang X W, Wong E H, et al. Thermo-mechanical Finite Element Analysis in a Multichip Build up Substrate Based Package Design[J]. *Microelectronics Reliability*, 2004, 44: 611- 619.
- [2] Liu D S, Ni C Y, Chen C Y. Integrated Design Method for Flip Chip CSP with Electrical, Thermal and Thermo-mechanical Qualifications[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2003, 39: 661- 667.
- [3] Zhang X W, Kripesh V, Chai T C, et al. Board Level Solder Joint Reliability Analysis of a Fine Pitch Cu Post Type Wafer Level Package (WLP) [J]. *Microelectronics Reliability*, 2008, 48: 602- 610.
- [4] 邵宝东, 孙兆伟, 王丽凤, 等. 陶瓷球栅阵列封装热致疲劳寿命分析[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2007, 39(10): 1625- 1630.
- [5] Ren W, Wang J J. Shear-based Simplified Electronic Package Model Development and Its Application for Reliability Analysis[J]. *Electronics Packaging Technology Conference*, 2003, 217- 222.
- [6] Lai Y S, Wang T H. Optimal Design Towards Enhancement of Board-level Thermo-mechanical Reliability of Wafer-level Chip-scale Packages[J]. *Microelectronics Reliability* 2007, 47: 104- 110.
- [7] Lee T, Lee J, Jung I. Finite Element Analysis for Solder Ball Failures in Chip Scale Package[J]. *Microelectronics Reliability* 1998, 38: 1941- 1947.
- [8] 许杨剑, 刘勇, 梁利华, 等. 芯片叠层球栅阵列尺寸封装的焊球疲劳寿命预测[J]. *浙江工业大学学报*, 2004, 32(6): 668- 673.
- [9] Borgesen P, Li C Y. Analytical Estimates of Thermally Induced Stresses and Strains in Flip-chip Solder Joints[C]//*Proceedings of the joint ASME/JSME Advances in Electronic Packaging*, Book No. G0660B, 1992, 845- 854.
- [10] Hossain M M, et al. Design Optimization and Reliability of PWB Level Electronic Package[J]. *Journal of Electronic Packaging*, 2007, 129: 9- 18.
- [11] Xu L, et al. A Simulation-based Multi-objective Design Optimization of Electronic Packages Under Thermal Cycling and Bending [J]. *Microelectronics Reliability*, 2004, 44: 1977- 1983.
- [12] 葛增杰, 顾元宪, 王宏伟, 等. 电子封装件受热载荷作用有限元数值模拟分析[J]. *大连理工大学学报*, 2005, 45(3): 320- 325.
- [13] Chan Y S, Ricky Lee S W. Thermal Resistance Analysis of a Multi-stack Flip Chip 3- D Package[C]//*Electronic Components and Technology Conference*, 2006.
- [14] Syed A. Predicting Solder Joint Reliability for Thermal, Power, & Bend Cycle within 25% Accuracy [C]//*Electronic Components and Technology Conference*, 2001.

(上接第 16 页)

## 4 结论

本文研究了大椭圆轨道追踪器的固定时间多圈 Lambert 转移最优解快速确定。通过对固定时间多圈 Lambert 转移解的深入分析,阐述了转移时间与转移轨道参数的关系,结合无时间约束最优直接碰撞交会的辅助研究,只比较两个解就可以得到固定时间多圈 Lambert 转移  $2N_{\max} + 1$  个解中的最优解。仿真结果表明提出新方法的正确性,且多圈 Lambert 转移最优解的计算效率可得到提高(对于转移时间较长的多圈 Lambert 问题,该方法优越性更显著)。

## 参考文献:

- [1] Shen H J, Tsiotras P. Optimal Two-impulse Rendezvous Using Multiple-revolution Lambert Solutions[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 26(1).
- [2] Prussing J E. A Class of Optimal Two-impulse Rendezvous Using Multiple-revolution Lambert Solution[C]//*Advances in the Astronautical Sciences*, Univelt. Inc. San Diego, CA, 2000, 106.
- [3] Luo Y Z, Tang G J, Lei Y J, et al. Optimization of Multiple-impulse Multiple-revolution Rendezvous Phasing Maneuvers[J]. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2007, 30(4): 946- 952.
- [4] 朱仁璋, 蒙薇. 航天器交会两点边界值问题[J]. *宇航学报*, 2006, 27(6).
- [5] 韩潮, 谢化伟. 空间交会中多圈 Lambert 变轨算法研究[J]. *中国空间科学技术*, 2004(5).
- [6] 任莹. 人造地球卫星轨道力学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2001.