

文章编号: 1001- 2486(2010) 06- 0064- 07

## 抽鞭现象研究综述\*

秦子增<sup>1</sup>, 郭 鹏<sup>1</sup>, 陶午沙<sup>2</sup>, 夏 刚<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073; 2. 总装备部武器装备论证研究中心, 北京 100101)

**摘要:** 介绍了抽鞭现象的理论与试验研究情况, 着重介绍了试验研究结果及抽鞭过程的能量方法与动量方法, 以及近年来抽鞭过程理论研究的最新进展, 总结出抽鞭现象的一般特点及影响因素, 并指出抽鞭现象与大型柔性结构中存在的部分现象如大型伞伞衣顶部抽打、空中加油机软管的摆动等存在相似性, 对抽鞭现象的研究有助于深化对该类现象的机理认识。

**关键词:** 抽鞭; 大型柔性结构; 甩动

**中图分类号:** V476. 2 **文献标识码:** A

## An Overview of the Researches on Whipcrack Phenomenon

QIN Zi-zeng<sup>1</sup>, GUO Peng<sup>1</sup>, TAO Wu-sha<sup>2</sup>, XIA Gang<sup>1</sup>

(1. College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Center of Demonstration and Research of Arms Equipment, Beijing 100101, China)

**Abstract:** After presenting the experimental and theoretical researches on whipcrack phenomenon, the current study gives a particular description of Kiehl's experimental results, the whip models based on conservation of energy and based on conservation of momentum, and the current researches on this unique phenomenon. Finally, the characteristics of whipcrack were acquired, and the comparison between the whipcrack and other large flexible structures' swing phenomena such as the huge parachutes' whip or the "probe drogue" in-flight refueling system's whip showed that there was much comparability, so the study of the whipcrack phenomenon will help researchers obtain a better understanding of these phenomena.

**Key words:** whipcrack; large flexible structure; swing

随着科技水平的飞速发展, 大型机构在人们的科研和生活中发挥着越来越重要的作用, 而大型结构中某些特有的力学现象也不断引起人们重视。对于大型柔性结构而言, 在受到冲击力后, 往往会出现速度在传递中剧烈增加从而产生甩动的现象, 如在大型伞的开伞拉直过程中, 由于上下部存在较大的速度差, 拉直结束瞬时, 可能会导致伞衣顶部出现剧烈的甩动现象<sup>[1-8]</sup>, 我们称之为“抽打”。“插头- 锥管”式空中加油机在加油过程中, 如果受油机与加油机锥管之间速度差较大, 作用于锥管的冲击力会导致软管发生剧烈摆动(或称甩动)从而出现破裂的危险<sup>[9-10]</sup>。船舶起重机装卸作用中, 索- 货物系统也会出现非周期性的摆动, 影响到装卸定位。这些现象与抽鞭现象有着诸多相似之处。其实, 柔性体在冲击力作用下出现的摆动、甩动及抽打现象与抽鞭现象的力学机理基本一致, 只是剧烈程度有所不同, 抽鞭只是其中一种最为典型的情况, 可以视为是剧烈的“甩动”或者“抽打”。

人们对于抽鞭这一物理现象的认识由来已久, 诸如大型建筑结构在强风及强震作用下出现的顶部突出物数倍于主体结构的强烈振动也被研究人员称之为“鞭梢效应”<sup>[11-14]</sup>。但是, 在抽打和抽鞭这一现象中涉及了复杂的力学和动力学理论, 因此, 尽管早在上个世纪初期就有人进行“抽鞭”现象的理论和试验研究, 但直至今日也未能建立一套能够准确描述这一过程并得到一致认可的数学模型。

本文通过对国内外现有抽鞭研究资料的总结分析, 对抽鞭现象的试验及理论研究情况进行了阐述, 并总结出抽鞭现象的一般特点与规律。我们课题组针对大型伞开伞拉直过程中出现的伞衣顶部抽打现

\* 收稿日期: 2010- 05- 06

基金项目: 国家部委资助项目(2009HK 10015)

作者简介: 秦子增(1940—), 男, 教授, 博士生导师。

象进行了包括试验录像分析、理论研究及数值分析在内的一系列工作,并取得了相近或一致的结果<sup>[4-7]</sup>。总结我们的研究经历,感到早期有关抽鞭现象的研究结果,对于我们开展的大型伞拉直过程中的抽打现象研究具有很好的参考作用,故撰写此文,以期能够为大型柔性结构相关现象的研究提供借鉴。

## 1 抽鞭现象研究状况

抽动鞭子后,速度在沿着鞭绳的传递过程中会迅速增大,到达鞭梢部位时,速度往往已经增大为初始速度的几十乃至上百倍,一旦鞭梢部分速度超过声速,就有可能产生清脆的抽鞭声,这种现象称为“抽鞭现象”(whipcrack)<sup>[15-16]</sup>。抽鞭是鞭绳受到一种突加的冲击力(速度)而产生的波在柔性绳传播,导致绳端速度剧烈增大的一种甩动现象,它不能简单地以材料的回弹来解释。然而,并非任意抽动鞭子均会产生抽鞭声。只有当鞭梢部分的速度大于声速并足以产生激波时,抽鞭现象才会发生。

抽鞭现象的研究主要涉及试验与理论两方面内容。

### 1.1 试验研究

1905年,波兰布雷斯劳大学物理学教授 Lummer<sup>[17-18]</sup>首次将“抽鞭”现象与激波联系在一起,并且通过相关试验观测到抽鞭过程中鞭绳速度可达 200m/s。1927年,法国的 Carriere<sup>[17-18]</sup>通过试验验证了 Lummer 的假设,他观测到在抽鞭过程中鞭梢速度最大达到 900m/s,并且还利用投影技术观测到鞭梢前部发出的激波。1958年,美国海军研究实验室的 Bernstein, Hall 以及 Trent<sup>[19]</sup>使用帧频为 120 帧/s 和 4000 帧/s 的高速摄像机拍摄到了抽鞭过程中传向鞭梢的波的形成、加速及在鞭梢附近速度超过声速,并得到了抽鞭声发出时发射的激波的一些特性。

抽鞭过程鞭梢速度会在短时间之内发生极其剧烈的变化,因此,对抽鞭现象的试验研究在很大程度上依赖于试验的巧妙设计及高速摄影技术的发展。1998年,德国科学家 Krehl<sup>[17]</sup>利用先进的声学传感器和同步激光脉冲,采用投射造影的方法观测到了抽鞭全过程及激波的产生,得到了抽鞭过程清晰的完整的图像,如图 1 所示。

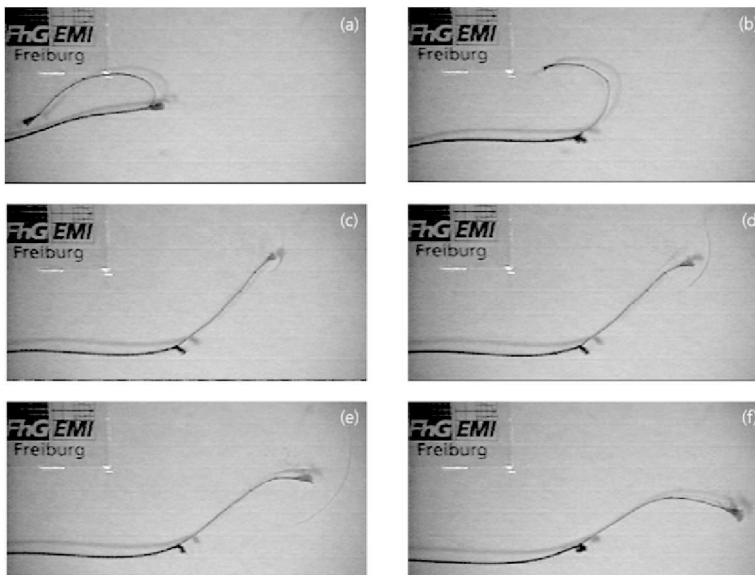


图 1 高速摄像机拍摄到的抽鞭过程中鞭梢的运动  
Fig.1 High-speed digital shadow graphs of a cracking whip

Krehl 认为,鞭绳被拉动时绳子中部往往会产生一个圆弧,当圆弧传至鞭梢部位时,在离心力的作用下,鞭梢速度会迅速增大。通过对录像的分析, Krehl 得到了抽鞭过程中鞭梢速度变化曲线,如图 2 所示。

从图中可以看出,在抽鞭末期激波即将形成时,鞭梢速度会在 0.85ms 内由 340m/s 迅速增至 744m/s

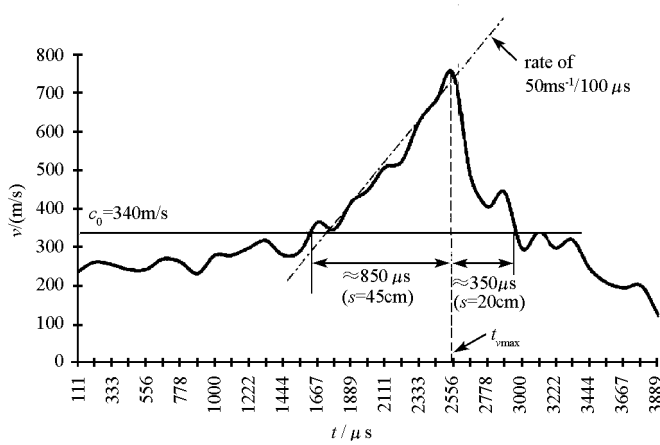


图2 抽鞭过程鞭梢速度变化曲线

Fig. 2 Curve of the whip tip's velocity with the time change

( $M = 2.19$ ), 加速度最大可以达到  $50000g$ 。当激波发射出去后, 鞭梢速度即迅速减少, 约在  $0.35ms$  内由最大值降至亚音速。抽鞭过程中鞭梢速度剧烈变化产生的张力会造成鞭梢材料破损。

试验中还发现, 与以往的激波形成理论不同, 抽鞭声并不是在鞭梢速度大于声速的时候出现的, 而是在鞭梢速度接近 2 倍声速的时候才出现, 因此 Krehl 认为, 抽鞭之所以能够发出声音, 并不仅仅是因为鞭梢速度达到了超声速, 而是因为鞭梢位置甩动形成了一个圆环, 圆环的出现才导致激波的产生, 这一现象直到 2002 年才得到合理的解释。从 Krehl 拍摄到的抽鞭过程图像中还可以看出, 在抽鞭发生时, 发生剧烈甩动的其实只有鞭梢部位一段, 然而 Krehl 并未给出甩动部位的长度。

## 1.2 理论研究

由于抽鞭现象极其复杂, 不同的模型得到的结论非但未能取得一致, 甚至还可能存在相反的结果。例如, 大多数模型都将抽鞭过程视为一维的能量问题, 在抽鞭过程中能量守恒, 从而得到鞭梢速度趋于无穷大; 而另一部分研究人员则认为在抽鞭过程中动量守恒。以下即对抽鞭现象的几种典型模型进行介绍。

### 1.2.1 能量方法

能量方法中最为典型的模型是 1995 年 Burger<sup>[17]</sup> 建立的抽鞭过程模型, 如图 3 所示。Burger 在模型中假定: (1) 甩动过程中鞭绳中部弯曲部位的半径很小(趋于 0); (2) 抽鞭开始后, 鞭柄即处于静止状态, 在抽鞭过程中不再提供能量; (3) 忽略抽鞭过程中气动力与重力的影响; (4) 不考虑鞭绳的伸长; (5) 在抽鞭开始时, 鞭绳保持为一直线。在以上简化条件下, 若记鞭绳总长度为  $L$ , 质量为  $M$ , 鞭梢质量为  $m$ , 抽

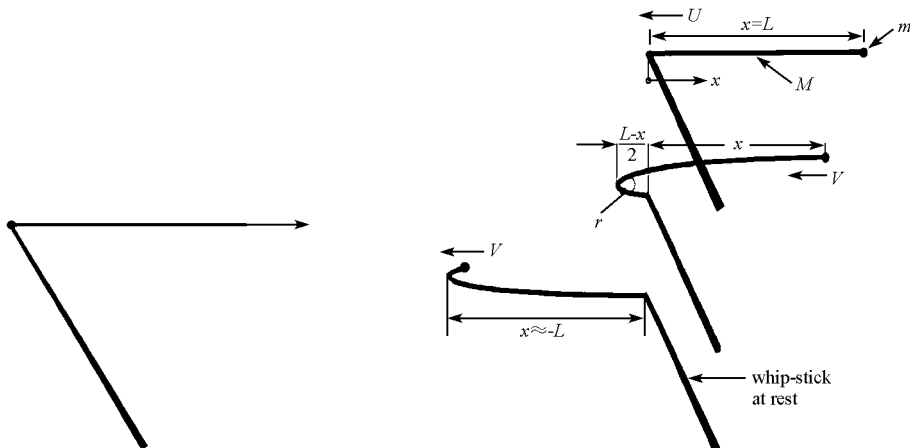


图3 Burger 的抽鞭过程简化模型

Fig. 3 Burger's model of whip-loop motion

鞭时鞭绳的初始速度为  $U$ , 鞭梢速度为  $V$ , 根据能量守恒定律可以得到抽鞭最后阶段鞭梢速度的表达式为:

$$V_{\max} = V(-L) = U \sqrt{\frac{M}{m} + 1} \quad (1)$$

由于鞭梢质量为一小量, 因此式中  $M/m$  比较大, 一般可以达到 300 左右。因此, 尽管在抽鞭的初始阶段鞭绳运动速度比较小, 在末端鞭梢依旧可以获得一个很大的速度。

德国柏林技术大学的 Szabo<sup>[20]</sup> 同样将抽鞭看成是一维的物理过程, 而后采用 Lagrange 方法, 推导出了抽鞭时鞭绳的运动方程, 其抽鞭模型如图 4 所示。

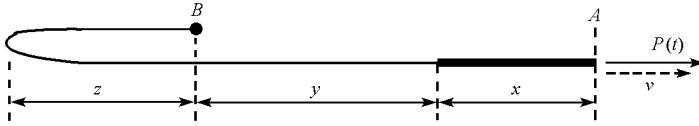


图 4 Szabo 的抽鞭模型  
Fig. 4 Szabo's model of whip-loop motion

记鞭绳的全长为  $l$ , 鞭柄长度为  $x$ ,  $z$  为弯曲部分的鞭绳长度,  $y$  为未弯曲部分的鞭绳长度, 则有  $l = x + y + 2z$ , 根据能量守恒定律, 可以推导得到  $z$  与  $x$  的表达式如下:

$$z \geq -\frac{v}{2} \sqrt{\frac{uz_0 + m}{uz + m}} \quad (2)$$

$$z(t) = \frac{1}{u} \left[ \sqrt[3]{\left( \left( uz_0 + m \right) \left( uz_0 + m - 3ut \right)^2 - m \right)} \right] \quad (3)$$

北京大学武际可<sup>[21]</sup> 同样采用 Lagrange 方法推出了鞭梢速度可以轻而易举超过声速这一结论。

### 1.2.2 动量方法

动量方法认为在抽鞭过程中鞭绳的动量保持不变。1995 年, Steiner 和 Troger<sup>[22]</sup> 通过研究发现, 如果波在传递过程中动量保持不变, 那么当波传至鞭梢部分时, 鞭梢部分仅仅能够获得与初始波速相差不大的速度。1996 年, Bhat<sup>[23]</sup> 采用开链式多体系统对抽鞭类运动进行建模, 并采用角动量定理进行分析, 得到如图 5 所示的两体铰接系统顶部速度为:

$$v_{tip} = \sqrt{l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \phi_2} \quad (4)$$

式(4)中,  $v_{tip}$  为定点速度,  $l_i, \theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) 分别表示长度与角速度,  $\phi_2$  为两体之间夹角。对于多段铰接体可以得到类似的结论。

1997 年, Myhrvold<sup>[24]</sup> 在研究梁龙的尾部甩动时指出: 当鞭子以弧形摆动时将会获得一定的角动量, 在抽鞭过程中遵循角动量守恒, 但是文中并未给出相应的证明方法。

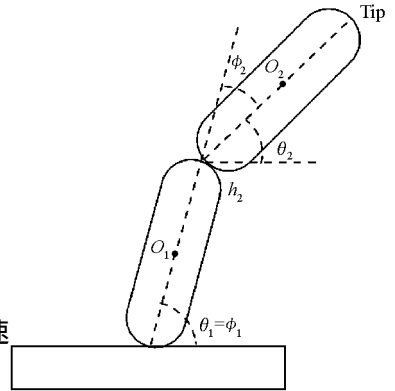


图 5 Bhat 多体铰接模型  
Fig. 5 Bhat's two-link system of whip-type motion

### 1.3 最新进展

20 世纪内开展的研究虽然已经可以解释抽鞭过程中鞭梢速度超过声速这一现象, 然而, 对于研究中所建立的数学模型, 动量守恒和能量守恒定律并不能同时成立。直到 2002 年, 美国亚利桑那州大学数学系的 Goriely 和 McMillen<sup>[18,25]</sup> 通过分析不同边界条件对抽鞭过程的影响, 得到了能量守恒和动量守恒在抽鞭过程中成立的条件, 才较好地解决了长久以来存在的对于同一抽鞭模型能量守恒和动量守恒不协调的问题。

McMillen 和 Goriely 指出, 抽鞭时, 作用于鞭柄处的冲击力使得鞭绳中产生波, 抽鞭过程可以视为波在弹性杆中的传递过程<sup>[16]</sup>。通过对已有抽鞭资料的研究, 他们指出以往的研究存在以下方面的问题: (1) 未能解释 Krehl 观测到的抽鞭声只有在鞭梢速度达到 2 倍声速的情况下才会出现这一现象; (2) 以往针对“抽鞭”过程的机理研究都是首先假设一定的鞭绳形状和运动方式, 再按照一定的动力学定理进行

建模分析,然而在一个抽鞭模型中,能量守恒定律与动量守恒定律不能同时成立;(3)以往研究并未分析边界条件和鞭绳形状的对抽鞭现象的影响;(4)已有模型大多将抽鞭过程视为一维问题考虑。基于此,McMillen和Goriely建立了更接近实际情况的鞭绳模型,并分别考虑了4种鞭柄处可能出现的边界情况对抽鞭过程进行分析研究,得到了大量有意义的结论。

为研究抽鞭问题,模型中同样做出了不少简化假设:(1)鞭绳的横截面为圆截面;(2)不考虑鞭绳的伸长;(3)鞭绳中无剪切力作用;(4)鞭绳横截面积随长度增加而均匀减小;(5)制作鞭绳的材料物理性能如密度、弹性模量均为常数;(6)不考虑抽鞭过程中重力的影响;(7)抽鞭过程中鞭绳的运动为平面运动。在以上简化假设下,他们建立了如图6所示的鞭绳的柔性杆模型,并假设抽鞭过程中鞭绳仅在 $xy$ 平面运动。

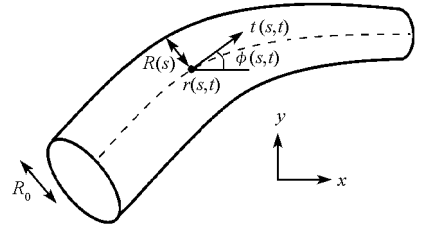


图6 连续的鞭绳模型

Fig. 6 The elastic rod's model of whip

抽动鞭绳形成波后,McMillen和Goriely将波在传播过程中鞭绳的边界条件分为4种情况考虑:(1)鞭梢部位为自由端,鞭柄处存在周期性作用的拉力;(2)鞭梢自由,鞭柄处作用着大小恒定的拉力;(3)鞭梢自由,鞭柄处完全固定(理论模型的边界条件);(4)鞭梢自由,鞭柄处位置固定但是能够转动。通过分析计算,McMillen和Goriely得到了能量守恒、动量守恒和角动量守恒成立的情况,如表1所示。

表1 4种不同边界条件下动力学守恒定律的成立情况

Tab. 1 The establishment of different conservation laws in 4-kind boundary conditions

	能量守恒	动量守恒	角动量守恒
Case I	成立	不成立	成立
Case II	不成立	不成立	不成立
Case III	成立	不成立	不成立
Case IV	成立	成立	不成立

McMillen和Goriely的研究表明,抽鞭会使鞭绳中出现波环,在波的传播过程中,波环顶端的速度恰好为波环本身速度的两倍,这就解释了为何在录像中观察到只有在鞭梢速度为2个马赫数时才会出现抽鞭声,也验证了Krehl文章中的结论:抽鞭声是由波环而不是由鞭梢发出的。

McMillen和Goriely还指出,如果鞭绳的横截面积在不断减小,则波环在鞭绳中传播的速度会越来越快。相反,如果横截面积在增加,那么波的传播速度会降低,如果鞭绳为无穷长,那么在鞭绳上肯定存在一个反射点,在这一点,波在鞭子中的传播速度将降为0,动能全部转化为弹性势能并产生一反向波向回传递。

利用McMillen和Goriely建立的数学模型进行的数值仿真较为真实地反映了抽鞭过程中波在鞭绳中的传播过程及鞭梢的运动轨迹,如图7所示。数值仿真计算表明,当波环运动到鞭梢部位时,无张力的顶部受到波环的拉力沿一点进行离心运动,从而最终实现鞭梢的加速。从图中还可以观察到,对于一根长度约为2m的鞭绳而言,甩动部分的长度约为20~30cm。

## 2 抽鞭现象的一般特点

时至今日,对于抽鞭现象的研究尚未得到完全一致的结论,这主要在于鞭绳为柔性体,速度(波)在鞭绳中的传递过程又涉及了极其复杂的力学内容。然而,现有理论与试验研究仍有一些相同或相近的结果,从而表明抽鞭现象具有以下方面的特点。

(1)抽鞭是鞭梢速度剧烈变化的一种外在表现。对抽鞭的试验观察表明,抽鞭发生时,鞭梢速度会在短时间内加速至2倍以上的声速,Krehl更得出鞭梢部位的最大加速度可以达到50000g,而由能量方法进行的近似研究表明,如果鞭梢质量足够小,其速度数值上会极大甚至趋近于无穷。

(2)抽鞭具有短时性。Krehl的试验观测表明,抽鞭发生时,鞭梢速度会在0.85ms时间内由1个马

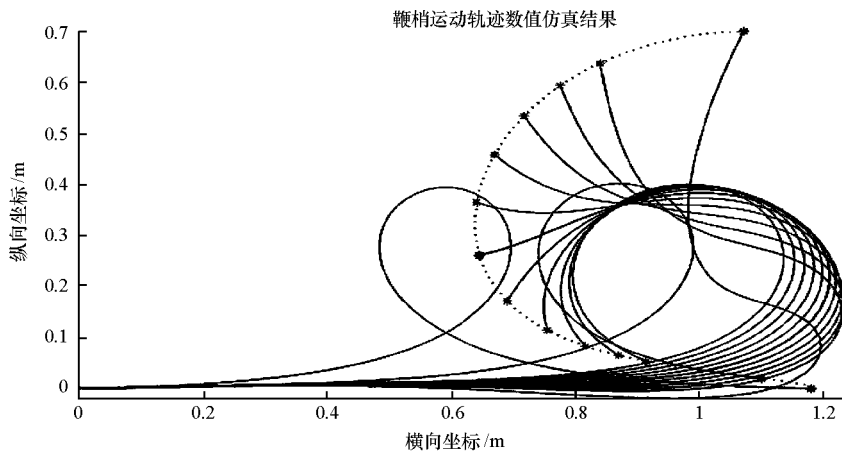


图7 抽鞭过程数值仿真结果

Fig. 7 Numerical solutions of a realistic whip

赫数迅速增加至 2.19 个马赫数,随后又会在 0.35ms 时间内降至亚音速,在整个超声速区持续时间约为 1.2ms。

(3) 试验观测与理论研究都表明,抽鞭声出现之前某一瞬时鞭梢会形成一曲率半径很小的圆弧。在其他条件相同的情况下,圆弧的曲率半径越小,抽鞭时甩动的鞭梢部分就越少,鞭梢产生的加速效应就越明显。

作用于鞭柄处的冲击力会导致鞭绳中出现波的传动,但并非任何情况下均会引起鞭梢速度的剧烈增加并超过声速。抽鞭现象的产生,还需要满足一定的条件。如 Krehl 就认为产生抽鞭声的一个重要条件即为在鞭柄处作用一冲击力的同时鞭绳中存在一定的弯曲,McMillen 和 Goriely 则在论文中指出,鞭绳的质量分布、边界条件均会对鞭梢最终的甩动速度造成影响。对已有资料的总结和分析表明,影响抽鞭现象产生的因素主要包括以下几点:

(1) 初始速度。在鞭绳质量与鞭梢质量之比有限的条件下,要产生抽鞭现象,鞭绳的初始速度应该足够大,以确保鞭梢最终速度超过 2 倍声速。

(2) 鞭绳的质量分布。McMillen 和 Goriely 在论文中提出,对于密度均匀的鞭绳,只有保证沿鞭柄至鞭梢方向鞭绳的截面积逐渐减小,波在鞭绳的传播过程当中才能得到有效的加速,而当横截面积增加时,波的传播速度只会降低。因此可以初步判定,要产生抽鞭现象,鞭绳还需要满足一定的质量分布条件。式(1)也表明,在一定的初始速度条件下,鞭绳质量与鞭梢质量之比需要足够大,才能产生抽鞭现象。

### 3 抽鞭现象研究的工程意义

大型伞在拉直开伞过程中,可能会产生类似抽鞭的伞衣顶部剧烈甩动现象,在对空投试验录像分析过程中,能够观察到少量架次伞衣顶部出现的抽打现象。伞衣顶部的抽打现象虽然不一定会造成伞衣损伤,但存在着可能的风险,如可能造成伞衣破损或者缠绕,严重时甚至会导致降落伞失效。通过对比分析,可以发现大型伞的抽打现象与抽鞭之间存在较多的相似之处:如降落伞伞绳伞衣均为柔性体,且沿着伞顶孔方向,单位长度的伞衣质量不断减小;在拉直过程中伞衣易出现弯曲,产生绳帆现象等。

与之类似,“插头-锥管”式空中加油机油路为柔性管,在加油过程中,软管一般为弯曲状态,此时,如果受油机与加油机锥管之间的速度差过大,则受油接头作用于锥管的冲击力(速度差)会导致软管发生剧烈甩动,从而可能导致软管产生破裂。但与抽鞭过程及大型伞伞衣抽打不同的是,加油机油管的另一端在甩动过程中始终与加油机相连,可以视为是顶部受到一定约束的甩动问题。

除此之外,船舶起重机装载作业时货物的甩动、绳系卫星释放与工作过程中的振动,与抽鞭也有大量相似之处。由此可见,对于抽鞭现象的研究,有助于研究人员深入认识此类现象的动力学机理,了解其产生的条件和规律,从而进一步掌握有效抑制措施。

## 4 结语

抽鞭是鞭绳受到一种突加的冲击力(速度)而产生波在柔性绳传播,导致绳端速度剧烈增大的一种现象。抽鞭现象具有短时、剧烈的特点,在抽鞭发生时,鞭绳本身的质量分布、初始速度及边界条件均会对抽鞭过程产生影响。现有的抽鞭过程数学模型多是从经典力学角度出发,着重研究抽鞭发生时鞭梢速度的变化情况,解释能够直接观察到的一些物理现象。但就其本质而言,抽鞭过程可能是一个应力波在柔性体的传播、反射和相互作用的复杂过程。因此,对于抽鞭现象的研究还必须进行更为深入而细致的分析。而对于抽鞭现象的了解,对于抑制大型伞“抽打”、加油机软管甩动等现象的工程设计改进具有参考价值。

## 参考文献:

- [1] Norman L C, Suit K L. An Investigation of The Initial Century Series Ringsail Parachute [R]. NASA TND- 5968, 1970.
- [2] Moog R D. Aerodynamic Line Bowing during Parachute Deployment [R]. AIAA 75- 1381, 1975.
- [3] Bruce R, David H, Wolf D F. A Textile Vent Hoop Replacement for Parachute Vent Lines [R]. AIAA 2001- 2041, 2001.
- [4] 宋旭民. 大型降落伞系统动力学建模及抽鞭现象研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2006.
- [5] 宋旭民, 范丽, 秦子增. 大型降落伞开伞过程中的“抽鞭”现象[J]. 航天返回与遥感, 2009, 30(3): 16- 21.
- [6] 王海涛, 秦子增, 宋旭民, 等. 牵顶伞对大型降落伞抽打现象的作用[J]. 国防科技大学学报, 2010, 32(4): 49- 54.
- [7] 王海涛, 秦子增, 宋旭民, 等. 大型降落伞拉直过程中的抽打现象分析[J]. 国防科技大学学报, 2010, 32(5): 34- 39.
- [8] 夏刚, 程文科, 秦子增. 航天器回收中几种主伞失效案例介绍[J]. 航天返回与遥感, 2002, 23(4): 4- 8.
- [9] Vassberg J C, Yeh D T, Blair A J, et al. Numerical Simulations of KC- 10 In-flight Refueling Hose-drogue Dynamics with an Approaching F/A- 18D Receiver Aircraft [R]. AIAA 2005- 4605, 2005.
- [10] Ribbens W B, Saggio F, Wierenga R, et al. Dynamic Modeling of An Aerial Refueling Hose & Drogue System [R]. AIAA 2007- 3802, 2007.
- [11] 钟万勰, 林家浩. 高层建筑振动的“鞭梢效应”[J]. 振动与冲击, 1985, (2): 90- 96.
- [12] 王雷, 宋维源, 李吉. 框架结构鞭梢效应的分析与讨论[J]. 黑龙江科技学院学报, 2004, 14(3): 177- 179.
- [13] 杨佑发, 袁政强, 敬登虎. 高层建筑结构抗震设计中鞭梢效应的分析[J]. 世界地震工程, 2004, 20(1): 85- 89.
- [14] 曾桂香, 郭呈祥. 高层建筑顶部细小突出物的鞭梢效应[J]. 自然灾害学报, 2008, 17(4): 143- 146.
- [15] Morgan D. Whips and Whipmaking [M]. Cornell Maritime Press, Centerville, MD, 1972.
- [16] Edwards R. How to Make a Whip [M]. Cornell Maritime Press, Centerville, MD, 1997.
- [17] Krehl P, Engemann S, Schwenkel D. The Puzzle of Whip Cracking: uncovered by A Correlation of Whip-tip Kinematics with Shock Wave Emission [J]. Shock Waves, 1998, 8: 1- 9.
- [18] Mcmillen T, Goriely A. Whip Waves [J]. Physica D, 2003, 184: 192- 225.
- [19] Bemstein B, Hall D A, Trent H M. On The Dynamics of A Bull Whip [J]. JASA, 1958, 30(7): 691- 697.
- [20] Taft J. The Propagation of Waves through A Cracking Whip [D]. The University of Arizona, 2003.
- [21] 武际可. 甩鞭子为什么会响——兼谈鞭梢效应[J]. 力学与实践, 1995, 17(5): 72- 73.
- [22] Steiner W, Troger H. On The Equations of Motion of The Folded Inextensible String [J]. ZAMP, 1995, 46: 960- 970.
- [23] Bhat D N, Keamey J K. On Animating Whip-type Motions [J]. Journal of Visualization and Computer Animation, 1996, 7: 229- 249.
- [24] Myhrvold N P, Currie P J. Supersonic SauroPods? Tail Dynamics in The Diplodocids [J]. Paleobiology, 1997, 23(4): 393- 409.
- [25] Goriely A, Mcmillen T. Shape of A Cracking Whip [J]. Physical Review Letters, 2002, 88(24): 244301.