

文章编号: 1001- 2486(2010) 06- 0076- 06

一种基于低扩散通量分裂方法的 WENO 格式研究*

陈 遯, 孙明波, 范晓樯, 梁剑寒, 刘卫东

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 将低扩散通量分裂格式(LDFSS)和加权基本无振荡格式(WENO)相结合,构造出一种混合格式,其中WENO格式用于物理量重构,而LDFSS用于通量分裂。采用这种格式对Riemann问题、钝头体高超声速无粘绕流流场进行了计算,并对超声速平板湍流边界层进行了混合LES/RANS模拟,计算结果表明:相对于采用Lax-Fridrichs分裂的WENO格式来说,这种混合格式对于激波和接触间断的分辨率更高,并且在标量保正性方面更优,收敛性更好;而相对于采用带有Minmod限制器的MUSCL方法进行物理量高阶重构的LDFSS格式来说,这种混合格式在混合模拟的计算中能够更好地反映湍流流场的脉动特性,计算得到的湍流速度脉动量的统计值更加准确。

关键词: 低扩散通量分裂格式; WENO格式; Riemann问题; 湍流边界层; 钝头体; 混合LES/RANS模拟

中图分类号: V435.12 **文献标识码:** A

Investigation on a WENO Scheme Based on Low-Diffusion-Flux-Splitting Scheme

CHEN Ti, SUN Ming-bo, FAN Xiao-qiang, LIANG Jian-han, LIU Wei-dong

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Low-diffusion-flux-splitting scheme(LDFSS) was combined with weighted essentially non-oscillatory scheme(WENO) to form a hybrid scheme. WENO was used to the reconstruction of physical variables and LDFSS to the splitting of the flux. Riemann problems and inviscid hypersonic blunt body flow were calculated with the hybrid scheme. Also a supersonic turbulent plate boundary-layer was calculated by using hybrid LES/RANS simulation. The results showed that, compared with WENO schemes based on Lax-Fridrichs, the splitting scheme has better resolution on shock and contact discontinuity and better positivity property of scalars and robustness. In the hybrid simulation, the scheme exhibits better prediction of the fluctuating characteristics of the turbulent flow field and statistics of turbulent fluctuating velocities in the hybrid simulation.

Key words: LDFSS; WENO scheme; Riemann problems; turbulent boundary-layer; blunt body; hybrid LES/RANS simulation

在高雷诺数流动中,粘性项相对较小但在很多情况下却起到重要作用而不可忽略,为了不使得粘性项的作用被无粘项离散的截断误差所掩盖,常要求采用高阶的差分格式,除此之外在湍流的大涡模拟(LES)、直接数值模拟(DNS)、计算电磁学(CEM)和计算气动声学(CAA)中,高精度、高分辨率的差分格式成为数值模拟的要求^[1]。

加权基本无振荡格式(Weighted Essentially Non-oscillatory Scheme)^[2]是常用的高阶差分格式之一,被广泛用于各种CFD数值计算中,而常用的WENO格式一般基于Lax-Fridrichs分裂,这种分裂方式属于通量矢量分裂(Flux Vector Splitting, FVS)的一种,鲁棒性好、计算量较小,但对于各种间断的数值耗散较大^[3-4],加密网格和提高格式精度对其改善作用有限。而通量差分分裂(Flux Difference Splitting, FDS)类型的格式(例如Roe格式)和通量混合分裂类型的格式(例如AUSM格式)对于间断的分辨率较高,其中通量差分分裂的格式通常需要依赖于经验的熵修正,鲁棒性相对较差,而通量混合分裂类的格式则兼有FVS和FDS的优点。通常通量混合分裂方法在高阶重构时会采用MUSCL插值^[5],为了消除数值振荡,

* 收稿日期:2010- 01- 12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10802096)

作者简介:陈遯(1983-),男,博士生。

采用 MUSCL 插值的过程中会用到 TVD 型的限制器^[6] (例如 Minmod、Superbee 等), 而这类限制器往往对于流场物理量的脉动有很强的衰减作用, 这无疑使得格式在湍流流场计算中的效果恶化, 而采用 WENO 格式进行重构则不存在这一问题。如果能够将 WENO 格式和通量分裂方式相结合, 则可能有效地提高 WENO 格式的分辨率, 同时能够在粘性流动计算中保持对于湍流脉动的较为精确的捕捉。

本文将一种通量混合分裂方法——低扩散通量分裂格式 (Low-Diffusion-Flux-Splitting Scheme) 和 WENO 格式相结合, 构造出一种混合通量分裂的 WENO 格式, 考察了这种格式对于几种间断和湍流流动的分辨率, 为 CFD 格式的发展提供了参考。

1 低扩散通量分裂格式

Edwards 的低扩散通量分裂格式^[7]的思想类似于 AUSM 类格式, 将对流项和压力项分开进行迎风处理。对于一维双曲守恒系统:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

无粘通量可以表示为对流项和压力项之和

$$F = \rho u M F^c + p F^p \quad (1)$$

$$F^c = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ H \end{bmatrix} \quad F^p = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 $H = C_p T + \frac{1}{2} u^2$, 为比总焓。

在网格界面 $i + 1/2$ 处, 对流部分和压力部分计算式为

$$F_{i+1/2}^c = \rho_{L,R} C^+ F_L^c + \rho_{R,L} C^- F_R^c \quad (3)$$

$$F_{i+1/2}^p = F^p (D_L^+ p_L + D_R^- p_R) \quad (4)$$

其中

$$D_{L,R}^\pm = \alpha_{L,R}^\pm (1.0 + \beta_{L,R}) - \beta_{L,R} P_{L,R}^\pm \quad P_{L,R}^\pm = \frac{1}{4} (M_{L,R} \pm 1.0)^2 (2.0 + M_{L,R})$$

$$C^+ = \alpha_L^+ (1.0 + \beta_L) M_L - \beta_L M_L^+ - M_{i+1/2} \quad C^- = \alpha_R^- (1.0 + \beta_R) M_R - \beta_R M_R^- + M_{i+1/2}$$

界面马赫数定义为

$$M_{i+1/2} = \frac{1}{4} \beta_L \beta_R \left[\sqrt{\frac{1}{2} (M_L^2 + M_R^2)} - 1.0 \right]^2 \quad (5)$$

分裂马赫数定义为

$$M_{L,R}^\pm = \pm \frac{1}{4} (M_{L,R} \pm 1.0)^2 \quad (6)$$

$$\alpha_{L,R}^\pm = \frac{1}{2} [1.0 \pm \text{sgn}(M_{L,R})] \quad \beta_{L,R} = -\max[0.0, 1.0 - \text{int}(|M_{L,R}|)]$$

2 WENO 格式和 LDFSS 的结合

对于一维标量方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$, 其离散格式可以表示为 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1/2} - f_{i-1/2}}{\Delta x}$, 采用 WENO 格式对于值 $f_{i+1/2}$ 进行重构^[2]的过程为

$$f_{i+1/2} = \sum_{j=0}^{k-1} w_j f_{i+1/2}^{(j)} \quad (7)$$

在 WENO 格式向双曲系统的推广中, 常采用 Lax-Friedrichs 将系统分裂后解耦成为单个方程, 然后逐一进行重构计算, 本文直接采用式 (7) 对流场参数的原始变量 (密度、速度、压力) 进行重构, 获取网格界面 $i + 1/2$ 处的左变量和右变量, 然后采用式 (1) ~ (6) 进行求解, 对 $i - 1/2$ 处的处理与上述过程类似。

3 对于无粘流动的数值模拟

为了考察这种格式对于间断的分辨能力,本文选择三种一维 Riemann 问题^[8]和二维钝头体无粘高超声速绕流进行计算。Riemann 问题的计算域取为 $[-1, 1]$,边界条件采用内点一阶外推得到,初始条件定义为左右两个不同的初始状态

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (\rho, u, p)_L & -1 \leq x \leq 0 \\ (\rho, u, p)_R & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

时间迭代均采用二阶有 TVD 性质的 Runge-Kutta 方法,取全局最小时间步长,钝头体问题的计算参数见 3.4 节。在下文中,采用 Lax-Fridrichs 分裂的 WENO 格式记为 WENO-LF,而采用 LDFSS 分裂的 WENO 格式记为 WENO-LDFSS。

3.1 定常激波问题

在左右两侧给定满足静止激波 Rankine-Hugoniot 关系式的初始条件,理论上流场中会存在一道位置和强度不随时间变化的激波,这个模型问题常用于考察格式对于激波的分辨率。初始条件为: $(\rho, u, p)_l = (1, 10, 1)$, $(\rho, u, p)_r = (5.6075, 1.7833, 83.1667)$,网格数取 20 和 40 两种情况, CFL 数取为 0.2。

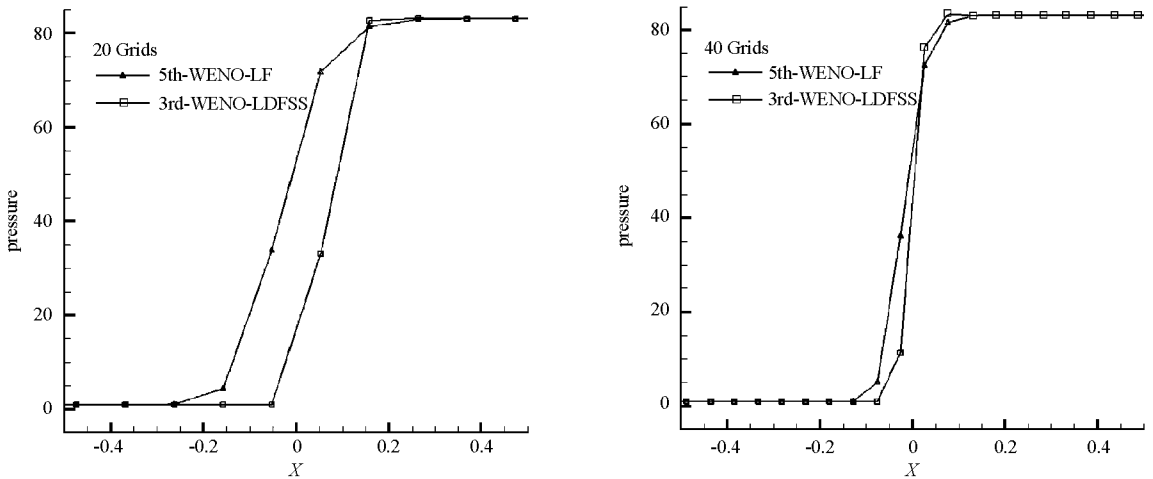


图 1 定常激波问题
Fig. 1 Stationary shock problem

由图 1 可以看出,网格数取 20 时,5th-WENO-LF 在 5 个网格内捕捉到了激波,而 3rd-WENO-LDFSS 仅仅用了 3 个网格就捕捉到了激波;网格数取 40 时,二者捕捉激波所用到的网格数分别为 5 和 4,而 3rd-WENO-LDFSS 计算得到的压力曲线的斜率明显高于 5th-WENO-LF,这说明前者对于激波的分辨率要明显高于后者。

3.2 定常接触间断问题

初始条件为 $(\rho, u, p)_l = (10, 0, 1)$, $(\rho, u, p)_r = (1, 0, 1)$,网格数分别取 20 和 40, CFL 数取 0.2。从图 2 可以看到,在两种网格下 5th-WENO-LF 对于接触间断都有明显的抹平作用,而 3rd-WENO-LDFSS 则精确地捕捉到了接触间断。

3.3 后退流动

后退流动也可称为真空问题,两边的流体以大小相等、方向相反的速度运动,使得中间形成压力和密度很低的区域,这个问题可以用于考察格式对于密度、压力等标量参数的保正性。初始条件为: $(\rho, u, p)_l = (1, -5, 1)$, $(\rho, u, p)_r = (1, 5, 1)$,网格数 100,经过计算,5th-WENO-LF 格式计算出现负密度导致计算失败,而 3rd-WENO-LDFSS 和 3th-WENO-LF 则能够保持计算至计算机的最小有效位,在本文中不给出计算结果。

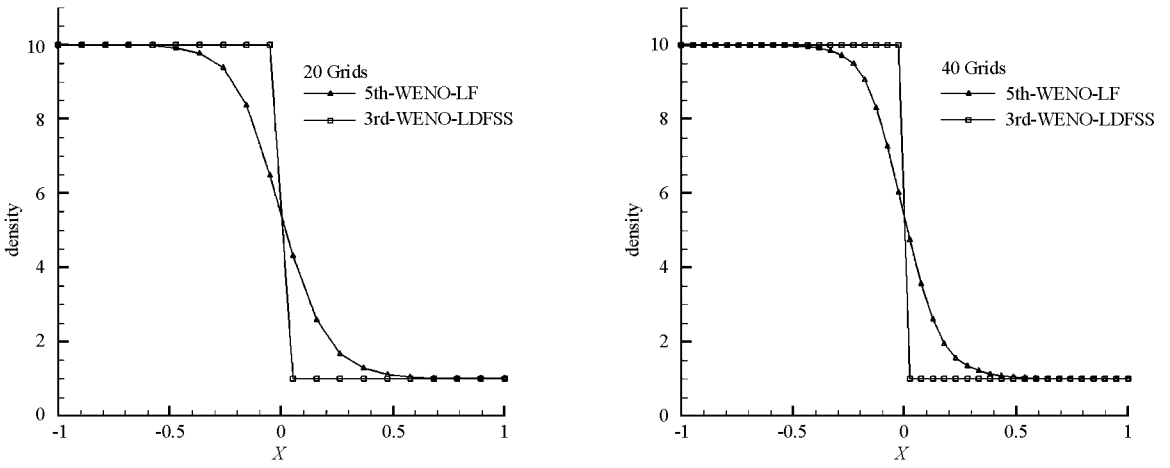


图 2 定常接触间断问题
Fig. 2 Stationary contact discontinuity problem

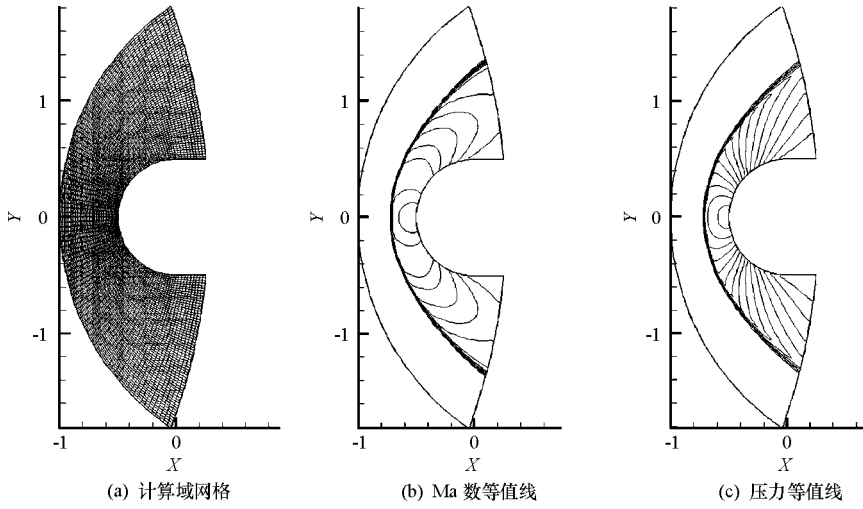


图 3 钝头体 $Ma=10$ 绕流
Fig. 3 Blunt body flow $Ma=10$

3.4 二维钝头体 $Ma=10$ 无粘绕流

本文对二维钝头体 $Ma=10$ 的无粘绕流进行模拟, 网格如图 4(a) 所示, 数目为 101×61 (钝头体表面

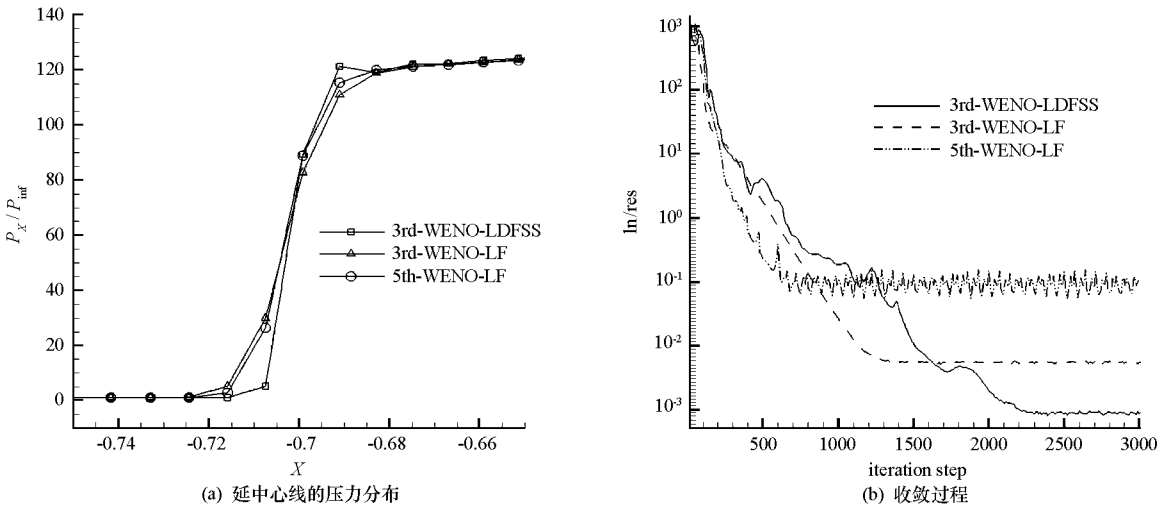


图 4 钝头体的 $Ma=10$ 绕流
Fig. 4 Blunt body flow $Ma=10$

×法向), 计算域左侧提超声速入口条件, 入口 $Ma = 10$, 右侧上下均采用外推, 而钝头体表面采用滑移固壁条件。时间迭代选取 LU-SGS 方法, CFL 数统一取为 5。

从图 4 可以看到, 采用 3rd-WENO-LDFSS 格式计算得到 Ma 数和压力等值线非常光滑, 图 5 给出了沿计算域中心线的压力分布和残差曲线, 可以看到: 5th-WENO-LF 格式计算得到的压力曲线斜率稍高于 3rd-WENO-LF 得到的结果, 而二者明显小于 3rd-WENO-LDFSS 的计算结果, 说明 3rd-WENO-LDFSS 对于头部弓形激波的分辨率要高于 5th-WENO-LF 格式。而从残差曲线可以看到, 3rd-WENO-LDFSS 的收敛较慢, 但是能够收敛 6 个量级, 而 3rd-WENO-LF 和 5th-WENO-LF 分别能收敛 5 个和 4 个量级。

4 对于粘性流动的数值模拟

为了考察格式的高阶重构过程对于粘性分辨率的影响, 本文使用 3rd-WENO-LDFSS 和采用带有 Minmod 限制器的 MUSCL 插值得到的三阶 LDFSS 格式(记为 3rd-MUSCL-LDFSS)对文献[9]中超声速平板湍流边界层进行混合大涡/雷诺平均 NS 模拟, 其来流条件为 $Ma = 2.8$, 总温 $T_0 = 298K$, 总压 $P_0 = 2.1 \times 10^5 Pa$, 边界层厚度 $\delta = 9.9mm$ 。混合模拟采用的模型见文献[10], 粘性项采用二阶中心差分, 时间迭代采用双时间尺度法^[11]。计算区域在流向、法向和展向的尺度分别为 $10\delta, 5\delta, 4\delta$, 相应的计算网格为 $200 \times 200 \times 80$, 网格在流向和横向均匀, 法向向壁面加密保证壁面附近 $y^+ \approx 1$ 。左侧入口处提超声速入口边界条件, 并采用“回收-调节”方法^[12]给定湍流脉动量, 其中回收平面置于入口下游 7.5δ 处(图 5), 上侧和右侧提超声速出口边界, 壁面为无滑移绝热壁。初场为采用 $k-\omega$ SST 模型计算得到的定常流场, 并按照文献[13]的方法在初场上添加随机扰动, 以激励湍流大尺度结构更快地形成。从初场开始计算 4 倍通流时间(定义为流体微团从进入计算域到流出计算域的时间)后达到统计定常状态, 然后

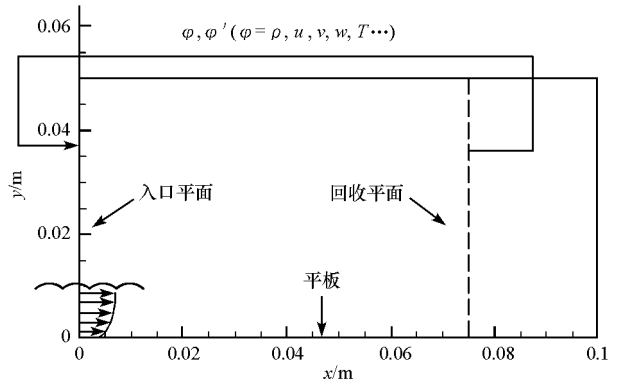


图 5 Luker 试验中的超声速平板湍流边界层
Fig. 5 Supersonic turbulent plate boundary layer in Luker's experiment

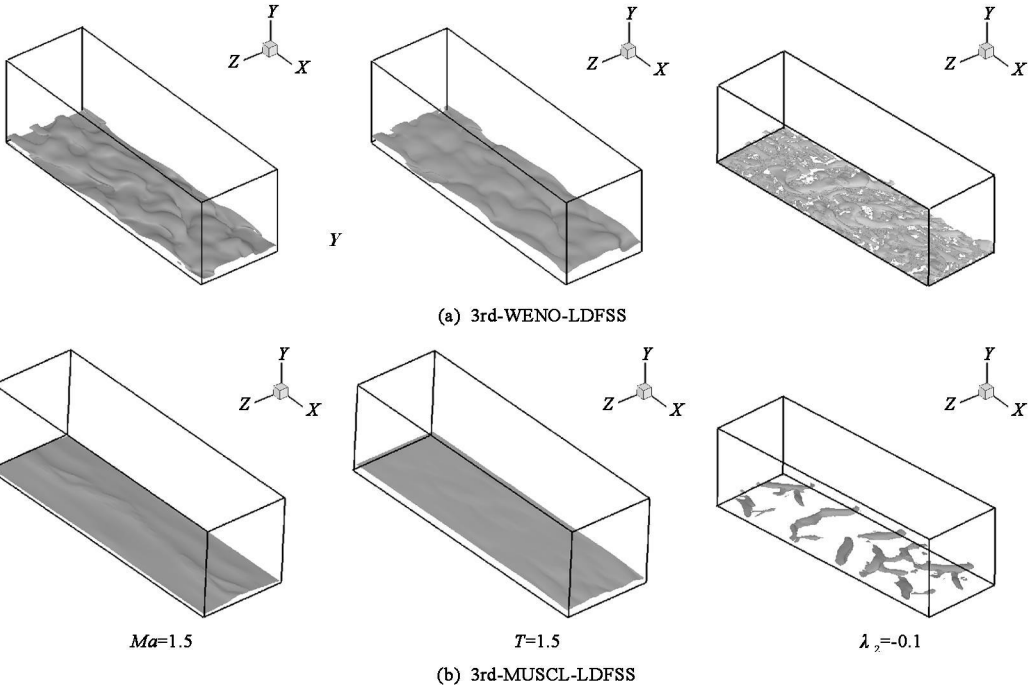


图 6 $Ma = 2.8$ 湍流边界层的瞬态 Ma 数、静温和涡量等值线云图

Fig. 6 Instantaneous contours of Mach number, static temperature and vorticity of Mach 2.8 turbulent boundary layer

继续计算5倍通流时间,记录湍流的脉动参数用于统计得到时均参数。

图6给出了采用两种格式计算结果在同一时刻下的 Ma 数、无量纲温度和 λ 涡^[14] 无量纲涡量的等值线云图,可以看到:3rd-WENO-LDFSS 计算得到的流场的大尺度结构比较明显,流场的湍流特征非常显著;而3rd-MUSCL-LDFSS 对于湍流脉动的抹平作用很强,流场等值线波动不明显,趋于时均化。图7给出了文献[9]中测量的目标截面流向和法向脉动速度的均方根值的展向平均量,可以看到:3rd-WENO-LDFSS 的计算结果和试验吻合较好,而3rd-MUSCL-LDFSS 得到的脉动速度均方根值要显著小于试验结果,这进一步说明了采用MUSCL插值进行高阶重构时,采用的Minmod限制器对于流场脉动的衰减作用过强。

5 结论

本文将低扩散通量分裂格式对WENO格式

相结合,构造出一种混合通量分裂的WENO格式,对Riemann问题、钝体高超声速无粘绕流和超声速湍流平板边界层进行了计算,结果表明:这种格式对于激波、接触间断的分辨率高于采用Lax-Friedrichs分裂的5阶WENO格式,而对于密度、压力等标量参数的保正特性较好,而且适应高 Ma 数流场的计算,并有较好的收敛性;在湍流流动计算中,这种格式可以较好地捕捉到流场的脉动特征,计算得到的速度脉动量的均方根值和试验吻合较好。综上所述,这种格式用于超声速、高超声速的计算是合适的,可为CFD差分格式的发展提供参考。

参考文献:

- [1] 张涵信,沈孟育. 计算流体力学——差分方法的原理和应用[M]. 北京:国防工业出版社,2001.
- [2] Jiang G, Shu C W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126: 917–923.
- [3] Steger J L, Warming R F. Fluxvector Splitting of the Inviscid Gas-dynamics Equations with Application to Finite Difference Methods[J]. Journal of Computational Physics, 1981, 40(2).
- [4] VanLeer B. Flux Vector Splitting for Euler equations[J]. Lecture Notes in Physics, 1981, 40(2).
- [5] Vanleer B. Towards the Ultimate Conservative Scheme V. A Second-order Sequel to Godunov's Method[J]. Journal of Computational Physics, 1979, 32: 101–136.
- [6] 阎超. 计算流体力学方法及应用[M]. 北京航空航天大学出版社,2005.
- [7] Edwards J R. A Low-diffusion Flux-splitting Scheme for Navier-stokes Calculations[J]. Computer and Fluids, 1997, 26(6): 635–659.
- [8] Glimm J. Solutions in Large for Non-linear Hyperbolic Systems of Equations[J]. Pure and Applied Mathematics, 1965, 18(4): 697–715.
- [9] Luker J L, Buter T A. Influence of Curvature-driven Favorable Pressure Gradient on Supersonic Turbulent Boundary Layer[J]. AIAA Journal, 2008, 38(8).
- [10] Ghosh S, Choi J, Edwards J R. RANS and Hybrid LES/RANS Simulation of the Effects of Micro Vortex Generators Using Immersed Boundary Methods[R]. AIAA Paper 2008–3728, 2008.
- [11] Pulliam T H. Time Accuracy and the Use of Implicit Methods[R]. AIAA Paper 93–3360, 1993.
- [12] Fan T C, Xiao X D, Edwards J R, et al. Hybrid LES/RANS Simulation of a Mach 3 Shock Wave/ Boundary Layer Interaction[R]. AIAA Paper 2003–80, 2003.
- [13] Norris J W, Edwards J R. Large eddy Simulation of High-speed, Turbulent Diffusion Flames with Detailed Chemistry[R]. AIAA Paper 1997–0370, 1997.
- [14] Jeong J, Hussain F. On the Identification of a Vortex[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1995, 285: 69–94.

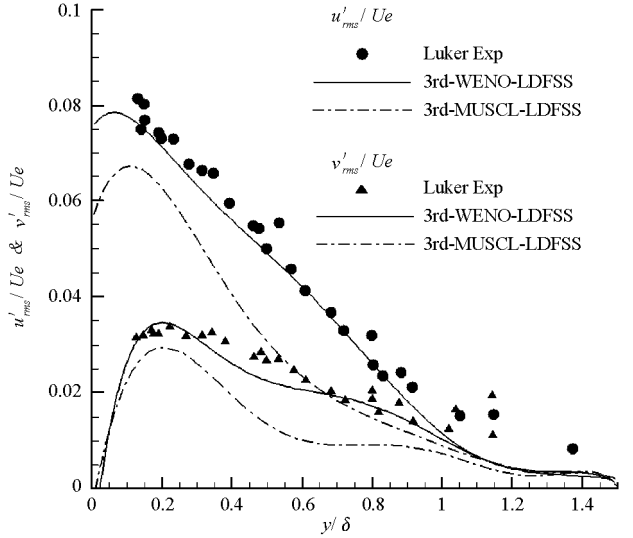


图7 流向和法向脉动速度的均方根值

Fig. 7 RMS values of streamwise and normal velocity fluctuations