文章编号: 1001- 2486(2010) 06- 0087- 06

单航天器无需变轨与 Walker 星座多星交会的充分条件及特性分析*

张 敬, 郗晓宁, 王 威
(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 以 Walker 星座为研究对象, 对单航天器无需变轨实现多星交会的问题展开研究。从 Walker 星座相位同构特性出发, 得到了单航天器无需变轨能够对多颗星座卫星交会的充分条件, 对交会的星座卫星的数目和星座卫星组合等问题进行了研究。在此基础上, 提出了利用解析法求解交会轨道的轨道设计方法, 并对交会轨道的特性进行了分析。对交会更多星座卫星(大于 3 颗) 的可能性展开了讨论。研究结果可为单航天器无需变轨对星座多星交会提供理论依据。

关键词: 相位同构; 多星交会; 充分条件; 轨道设计; 特性分析
中图分类号: V412.41 文献标识码: A

Sufficient Condition and Characteristic Analysis for a Spacecraft Rendezvous with Walker Constellation Satellites without Orbital Maneuver

ZHANG Jing, XI Xiao-ning, WANG Wei
(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Taking Walker constellation as object, the problem of single spacecraft rendezvous with multiple constellation satellites without orbit maneuver was investigated. According to the phase homogeneous character of Walker constellation, the sufficient condition that a spacecraft rendezvous with multiple Walker constellation satellites without orbital maneuver was obtained, followed by the investigation of the problems with rendezvous number and combination of constellation satellites. Furthermore, the orbital design method that can compute spacecraft orbit analytically was presented, and the characteristic of rendezvous orbit was analyzed as well. Finally, the possibility of spacecraft rendezvous with more than three constellation satellites was discussed. The theoretical proof is provided for single spacecraft rendezvous with multiple constellation satellites without orbital maneuver by research findings.

Key words: phase homogeneous; rendezvous with multiple satellites; sufficient condition; orbital design; characteristic analysis

Walker 星座基本特点: 由具有相同轨道半径 a 的 T 颗圆轨道卫星组成; P 个轨道平面与某一参考平面(通常为赤道面) 有相同的倾角 i, 并且按升交点均匀分布; 每个轨道面内均匀分布 S 颗卫星, 满足关系 $T = P \cdot S$。定义星座基本单位为 $U = 2\pi/T$, 当一个轨道面内的一颗卫星通过其升交点时, 它东面相邻轨道面内最近一颗通过了升交点的卫星的相位角(即纬度幅角) 为 $F \cdot U$, 相位参数 F 为 0~ $(P-1)$ 之间的整数。于是, 相位同构星座的构形可用描述符 i: $T/P/F$ 唯一确定[1] 。

文献[2-3] 以描述符为 18/6/2 的 Walker 星座为研究对象, 通过双星基准或者单星基准的数值搜索方法可以得到航天器轨道, 从而使单航天器无需变轨与 3 颗非共轨卫星交会。但是在这些搜索方法中, 并没有利用与 Walker 星座相位同构特性相关的先验知识, 因此在得到搜索结果之前, 无法预先知道能够交会的星座卫星数目以及哪些星座卫星能够被航天器交会。

对于与 Walker 星座的交会问题, 根据不同的交会任务, 我们感兴趣的是单航天器能够交会的星座卫星的数目以及组合, 因此结合星座特性在理论上对这些问题进行回答是十分必要的。本文针对 Walker 星座, 给出了单航天器与三颗星座卫星交会的充分条件, 然后以描述符为 18/6/2 的 Walker 星座为例, 对交会轨道进行解析求解和特性分析, 最后对交会更多星座卫星(大于 3 颗) 的可能性展开了讨

* 收稿日期: 2010- 09- 30
基金项目: 国家部委重点基金项目(6140551)
作者简介: 张敬(1982—), 男, 博士生。

论。

1 单航天器与三颗星座卫星交会的充分条件

如图1所示，在 Walker 星座中，自西向东分别将 P 个轨道面表示为 $O_1 \sim O_P$。如果航天器 S 与 O_i 轨道上的星座卫星在升交点 O 处交会，而且航天器能够与东西两个相邻轨道面上的卫星交会，不妨假设航天器在 O_i 上交会的卫星为 W_i，而在 O_{i+k} 和 O_{i-k} 上能够交会的卫星为 W_{i+k} 和 W_{i-k}。

根据航天器 S 与 O_{i+k} 轨道上星座卫星交会点的位置，航天器轨道可以分为两种类型（交会点在赤道上方或者下方），考虑到轨道运行的方向，每种类型的轨道又包括两个方向，总计4种情况。

图1给出了航天器轨道 S_1（虚线所示）和 S_2（实线所示）与星座卫星轨道 O_i，以及相同间隔数 k 的东西两个轨道面 O_{i+k} 和 O_{i-k} 的球面几何关系。其中 S_1 与星座卫星轨道 O_{i+k} 和 O_{i-k} 的交点分别为 B 和 D，S_2 与星座卫星轨道 O_{i+k} 和 O_{i-k} 的交点分别为 E 和 F。

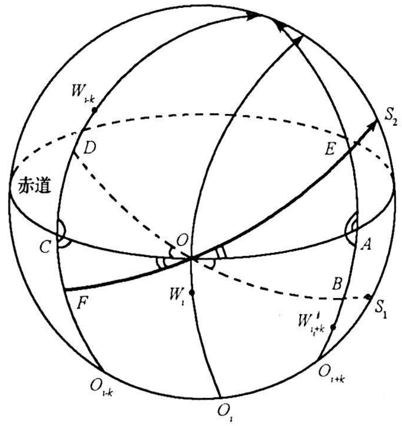

图1 轨道的球面几何关系

Fig.1 Spherical geometry between the orbits

选择 W_i 与航天器交会的时刻为参考时刻，记为 t_0，下面分别按照轨道类型和方向，推导出满足交会条件的星座卫星对应的纬度幅角 u_i、u_{i+k} 和 u_{i-k} 之间的约束关系。

(1)如果航天器按照类型1顺行方向（与图1中的轨道 S_1 一致）飞行，t_0 时刻有 $u_i=0°$。W_{i+k} 和航天器在 B 点交会，W_{i-k} 和航天器在 D 点交会，由于航天器与星座卫星运行在等高的圆轨道上，从而 t_0 时刻 W_{i+k} 和 W_{i-k} 的纬度幅角 u_{i+k} 和 u_{i-k} 为

$$\begin{cases} u_{i+k} = -(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{OB}) \\ u_{i-k} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{OD} \end{cases} \tag{1}$$

在球面△OCD 和△OAB 中，根据 Walker 星座的定义：$\angle AOB = \angle COD$，$\overset{\frown}{OA} = \overset{\frown}{OC}$ 以及 $\angle OAB = \angle OCD$。那么球面△OCD 和△OAB 全等[6]，则有

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \tag{2}$$

$$\overset{\frown}{OB} = \overset{\frown}{OD} \tag{3}$$

从而在 t_0 时刻：

$$u_{i+k} = -u_{i-k} \tag{4}$$

(2)如果航天器按照类型1逆行方向（与图1中的轨道 S_1 方向相反）飞行，t_0 时刻有 $u_i=0°$。W_{i+k} 和航天器在 B 点交会，W_{i-k} 和航天器在 D 点交会，从而 t_0 时刻 W_{i+k} 和 W_{i-k} 的纬度幅角 u_{i+k} 和 u_{i-k} 为

$$\begin{cases} u_{i+k} = \overset{\frown}{OB} - \overset{\frown}{AB} \\ u_{i-k} = \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{OD} \end{cases} \tag{5}$$

同理根据球面△OCD 和△OAB 全等可知 t_0 时刻：

$$u_{i+k} = -u_{i-k} \tag{6}$$

(3)同理得航天器按照类型2运行时，不论顺行或逆行，都有如下关系：

$$u_{i+k} = -u_{i-k} \tag{7}$$

根据(1)、(2)和(3)将四种情况进行归纳可知，航天器无需变轨能够交会三颗非共轨星座卫星的充分条件为

1)当 W_i 位于升交点时，与之相同间隔的东西两个轨道面上，存在两颗星座卫星 W_{i+k} 和 W_{i-k} 的纬度

幅角反号。

2)存在一条航天器轨道,使航天器能够在 W_i 的升交点处与 W_i 交会,而且能够与 W_{i+k} 和 W_{i-k} 中任意一颗交会。

由于 Walker 星座的"相位同构特性",即当一个轨道面内的一颗卫星通过其升交点时,它东、西面间隔数为 k 的轨道面内存在一颗星座卫星的纬度幅角分别为

$$u_{i+k} = k \cdot F \cdot U \tag{8}$$

$$u_{i-k} = -k \cdot F \cdot U \tag{9}$$

因此,Walker 星座的"相位同构特性"可保证充分条件中的第一条必然成立。下面对充分条件中第二条是否成立加以证明。

2 单航天器对三颗星座卫星交会轨道的存在性与唯一性

任意选择 Walker 星座中的两个轨道面,如图 2 所示,分别记为 O_1 和 O_2,两轨道交点为 J 和 K。假设航天器与 O_1 上的星座卫星 W_1 在 O_1 轨道上的升交点 O 处交会,同时能够与 O_2 上的星座卫星 W_2 交会,根据充分条件,航天器在这条轨道上必定能够交会三颗非共轨星座卫星。下面将对交会轨道的存在性和唯一性加以证明。

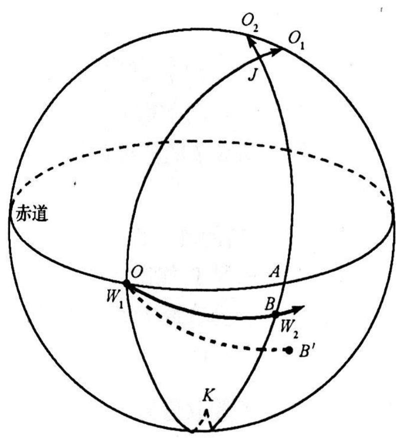

图 2　交会轨道的存在性与唯一性

Fig.2　Presence and unique of rendezvous orbit

(1)交会轨道的存在性

如图 2 所示要使航天器与 W_1 在 O_1 轨道上的升交点 O 处交会,而且能够与 W_2 交会,那么存在两种情况:

1)航天器由 O 点出发,在弧段$\overset{\frown}{JAK}$上与 W_2 交会;

2)航天器由弧段$\overset{\frown}{JAK}$上与 W_2 交会的点出发,与 W_1 在 O 点交会。

如果以 W_1 经过升交点的时刻为参考时刻,记为 t_1,设 t_1 时刻 W_2 的纬度幅角 $u_2 = x$,其取值范围为$(-180°, 180°)$。当航天器与 W_2 的交会点为$\overset{\frown}{JAK}$上任意一点时,利用航天器在球面上相同时间飞过的圆心角相等的约束条件,可以得到 t_1 时刻满足约束条件所需的 W_2 的纬度幅角 u'_2,从而可得判决函数:

$$f = u'_2 - u_2 \tag{10}$$

当判决函数取值为零时,航天器就能够实现与 W_2 交会。易知当航天器与 W_2 的交会点在弧段$\overset{\frown}{JAK}$上连续变化时,f 是一个连续函数,由此可以依据判决函数 f 在端点处的取值f_J 和f_K,讨论交会轨道的存在性。

对于情况 1,如果航天器由 O 出发,在 K 处与 W_2 交会,那么航天器经过的大圆弧 $u_h = \overset{\frown}{OK}$,那么 t_1 时刻 W_2 对应的纬度幅角为

$$u'_2 = -(\overset{\frown}{AK} + \overset{\frown}{OK}) \tag{11}$$

那么判决函数在端点 K 处的取值为

$$f^1_K = u'_2 - u_2 = -(\overset{\frown}{AK} + \overset{\frown}{OK}) - x \tag{12}$$

在球面$\triangle ABD$ 中,$\overset{\frown}{AK} + \overset{\frown}{OK} = 180°$,则

$$f^1_K = -180° - x \tag{13}$$

如果航天器由 O 出发,在 J 处与 W_2 交会,那么航天器经过的大圆弧 $u_h = \overset{\frown}{OJ}$,从而 t_1 时刻 W_2 对应的纬度幅角为

$$u'_2 = \overset{\frown}{AJ} - \overset{\frown}{OJ} \tag{14}$$

那么判决函数在端点 J 处的取值为

$$f_J^1 = u'_2 - u_2 = (\overset{\frown}{AJ} - \overset{\frown}{OJ}) - x \tag{15}$$

对于情况2,如果航天器由 K 出发,在 O 处与 W_1 交会,同理可得判决函数在端点 K 处的取值为

$$f_K^2 = u'_2 - u_2 = (\overset{\frown}{OK} - \overset{\frown}{AK}) - x \tag{16}$$

以及判决函数在端点 J 处的取值为

$$f_J^2 = 180° - x \tag{17}$$

由于判决函数 f_J^1 中的$(\overset{\frown}{AJ} - \overset{\frown}{OJ})$与 f_K^2 中的$(\overset{\frown}{OK} - \overset{\frown}{AK})$相等,从而

$$f_J^1 = f_K^2 \tag{18}$$

同时根据 x 的取值范围:

$$\begin{cases} f_K^1 < 0 \\ f_J^2 > 0 \end{cases} \tag{19}$$

因此无论 f_J^1 与 f_K^2 的符号为正或者为负,在情况1或者2下的两个端点 J 与 K 处判决函数的取值(f_J^1, f_K^1)或者(f_J^2, f_K^2)将反号。

根据判决函数 f 的连续性可知,必然存在至少一条航天器轨道使航天器与 W_1 在 O 点交会而且与 W_2 交会。

(2)交会轨道的唯一性

对于交会情况1,如图2所示,假设航天器轨道 OB 和 OB' 均为交会轨道。

那么对于交会轨道 OB', t_1 时刻 W_2 对应的纬度幅角为

$$u'_2 = -(\overset{\frown}{AB'} + \overset{\frown}{OB'}) \tag{20}$$

那么判决函数取值为

$$f_1 = u'_2 - u_2 = -(\overset{\frown}{AB'} + \overset{\frown}{OB'}) - x \tag{21}$$

对于交会轨道 OB,参考时刻 W_2 对应的纬度幅角为

$$u'_2 = -(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{OB}) \tag{22}$$

那么判决函数取值为

$$f_2 = u'_2 - u_2 = -(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{OB}) - x \tag{23}$$

f_2 和 f_1 之差为

$$f_2 - f_1 = (\overset{\frown}{AB'} + \overset{\frown}{OB'}) - (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{OB}) \tag{24}$$

又因为$\overset{\frown}{BB'} = \overset{\frown}{AB'} - \overset{\frown}{AB}$,那么

$$f_2 - f_1 = (\overset{\frown}{BB'} + \overset{\frown}{OB'}) - \overset{\frown}{OB} \tag{25}$$

由于在球面△OBB'中,两边之和大于第三边,那么(25)式的值大于0,从而当交会点由 K 向 J 移动的过程中,f 为增函数。对于情况2,同理可证当交会点由 K 向 J 移动的过程中,f 也为增函数。而且根据 x 的取值范围,可知$|f| \leqslant 360°$。综上所述,在情况1与情况2下面,有且只有一条航天器轨道使航天器与 W_1 在 O 点交会而且与 W_2 交会。

3 交会轨道的解析求解

由于航天器运行在与星座卫星等高的圆轨道上,那么通过对航天器轨道的倾角、升交点赤经、纬度幅角的求解,航天器轨道就可以唯一确定。

如图2所示,航天器在轨道 OB 上与星座卫星 W_1 和 W_2 交会。以 W_1 经过升交点的时刻为参考时刻 t_1, t_1 时刻 W_2 的纬度幅角 $u_2 = \Delta u$。

如图2所示,在球面△OAB 中,设弧长$\overset{\frown}{AB} = x$。由于满足交会的条件,而且在 t_1 时刻 W_2 对应的纬

度幅角 $u_2 = \Delta u$,那么弧长 $\overset{\frown}{OB} = \Delta u - x$。同时,星座卫星 W_1 与 W_2 轨道升交点之差为 $\overset{\frown}{OA}$,星座卫星轨道倾角 $i = \angle OAB$,那么根据球面三角形边的余弦公式[6]可得

$$\cos(\Delta u - x) = \cos x \cos \overset{\frown}{OA} + \sin x \sin \overset{\frown}{OA} \cos i \tag{26}$$

那么

$$\tan x = \frac{\cos\Delta u - \cos \overset{\frown}{OA}}{\sin \overset{\frown}{OA} \cos i - \sin\Delta u} \tag{27}$$

利用(27)式中求解得到的 x,设航天器轨道的倾角为 i_a(即令球面角 $\angle AOB = i_a$),再一次利用球面三角形边的余弦公式对 i_a 求解,同样可以得到升交点赤经和 t_1 时刻的纬度幅角,那么航天器轨道就被唯一确定了。

4　交会轨道的特性分析

对于交会轨道的特性分析主要从两个方面展开,分别为交会轨道的类型和交会轨道的数目。以倾角为 i,描述符为 18/6/2 的 Walker 星座为例,选择第 1 个轨道面内某颗卫星通过升交点的时刻为参考时刻,用 $O_1 \sim O_6$ 分别表示 6 个轨道面,W_{mn} 表示第 $m(m \leqslant 6)$ 个轨道面上的第 $n(n \leqslant 3)$ 颗卫星,得到的星座卫星分布如图 3 所示。

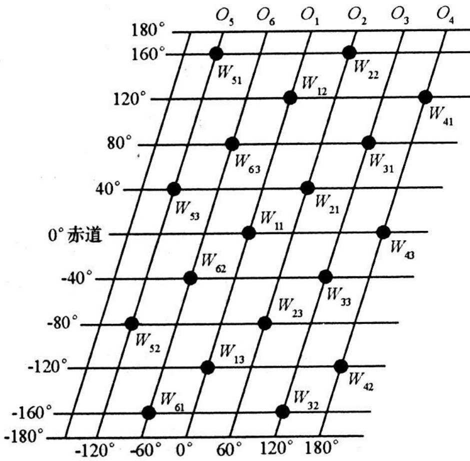

图 3　星座卫星分布图

Fig.3　Distributing of constellation satellites

从图 3 可以看出,相对于星座卫星 W_{11},在轨道 O_2 和 O_6 上存在(W_{21}, W_{62})、(W_{22}, W_{61})和(W_{23}, W_{63})三对纬度幅角反号的星座卫星,而在轨道 O_3 和 O_5 上存在(W_{31}, W_{52})、(W_{32}, W_{51})和(W_{33}, W_{53})三对纬度幅角反号的星座卫星。

(1)交会轨道的类型

如果航天器在升交点与星座卫星 W_{11} 交会,以此时为参考时刻,由于在轨道 O_2 和 O_6,以及轨道 O_3 和 O_5 上,存在 6 对纬度幅角反号的星座卫星,因此能够得到的交会轨道有 6 条。将每条交会轨道作为一种类型,各种类型的交会轨道的区别在于倾角的不同。

(2)交会轨道的数目

当任意一颗星座卫星通过升交点的时候,将这颗卫星编号为 W_{11},对轨道面和轨道面内的卫星重新编号,得到的星座卫星纬度幅角分布与图 3 中一致。从而航天器在升交点与这颗卫星交会,而且能够交会 3 颗非共轨星座卫星的交会轨道同样也有 6 条。

由于星座卫星纬度幅角分布与图 3 中一致,如果按照倾角划分,那么这 6 条轨道可以合并到上述的 6 种轨道类型里。同时由于选择的星座卫星 W_{11} 的改变(如果同一个轨道面,则星座卫星的纬度幅角发生改变;如果不同的轨道面,则星座卫星的升交点赤经和纬度幅角发生改变),如果仍然保持参考时刻不变,那么每种类型里航天器轨道的区别在于升交点赤经(由选定的星座卫星 W_{11} 的升交点赤经决定)和纬度幅角(由选定的参考时刻起算,W_{11} 到达升交点所需的时间决定)的不同。

综上所述,总共有 18 颗星座卫星,每颗卫星对应 6 条交会轨道,总共的交会轨道数目为 $18 \times 6 = 108$ 条。在 108 条交会轨道中,根据轨道倾角的不同,可以分为 6 种类型,在每一种类型中,根据升交点赤经和纬度幅角的区别又包含 18 条轨道。

5　对更多星座卫星交会的可能性分析

如果仍以描述符为 18/6/2 的 Walker 星座为例,根据对三颗星座卫星交会的充分条件,如果航天器能够交会 O_1 和 O_2 轨道上的两颗卫星,那么航天器就能够与 O_6 轨道上的卫星交会。如果要实现对更多星座卫星交会,则航天器需要与其余星座卫星轨道上的卫星交会。

设星座卫星轨道面之间升交点的间隔为$\Delta\Omega$，倾角为i，选定O_1和O_2轨道上的两颗卫星，利用第3节中的方法得到的航天器轨道的倾角为i_a，所得的示意图如图4所示。以O_3轨道为例，如果航天器同时能够与O_3轨道上的星座卫星交会，那么航天器就能够实现与更多星座卫星的交会。

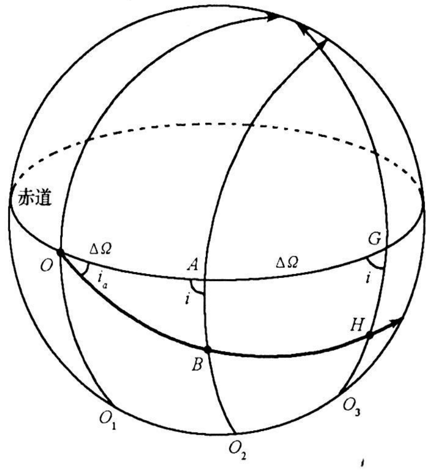

图4　对更多星座卫星交会的可能性
Fig.4　Possibility of rendezvousing with more constellation satellites

设航天器在O点的时刻为参考时刻，记为t_2，那么t_2时刻O_2和O_3上星座卫星的纬度幅角分别为

$$u_2 = -(\widehat{AB} + \widehat{OB}) \tag{28}$$

$$u_3 = -(\widehat{GH} + \widehat{OH}) \tag{29}$$

在球面△ABD和△ACF中分别利用耐皮尔相似[8]可得

$$\tan\left(\frac{\widehat{AB} + \widehat{OB}}{2}\right) = \tan\frac{\Delta\Omega}{2}\cos\frac{1}{2}(i - i_a)/\cos\frac{1}{2}(i + i_a) \tag{30}$$

$$\tan\left(\frac{\widehat{GH} + \widehat{OH}}{2}\right) = \tan\Delta\Omega\cos\frac{1}{2}(i - i_a)/\cos\frac{1}{2}(i + i_a) \tag{31}$$

将上面两个等式相除可得

$$\tan\left(\frac{\widehat{AB} + \widehat{OB}}{2}\right)/\tan\left(\frac{\widehat{GH} + \widehat{OH}}{2}\right) = \tan\frac{\Delta\Omega}{2}/\tan\Delta\Omega \tag{32}$$

上式为航天器对更多星座卫星交会的约束条件，左边的项由t_2时刻O_2和O_3上星座卫星的纬度幅角决定，也就是由星座卫星相位同构特性决定，右边的项由星座轨道面升交点之间的间隔$\Delta\Omega$决定，通过分析可以得到如下结论：

（1）当$\Delta\Omega$和星座卫星相位特性保持不变，通过航天器轨道倾角i的变化，无法使约束条件得到满足。

（2）通过$\Delta\Omega$和星座卫星相位特性的连续变化，可以满足约束条件。但是根据Walker星座的特性，$\Delta\Omega$和星座卫星相位特性并不能够连续改变。

（3）在通常情况下，对于Walker星座，不进行变轨的航天器轨道无法与更多的星座卫星交会。

6　小结

利用双星基准[2]或者单星基准[3]的搜索方法可以实现单航天器无需变轨对3颗非共轨卫星的交会，但是搜索空间较大，耗时较长，而且由于采用数值搜索算法，无法对航天器能够交会的星座卫星数目以及星座卫星的组合予以准确的回答。

本文从星座相位同构特性出发，得到了单航天器无需变轨对星座多星交会的充分条件，从理论上回答了单航天器能够交会的星座卫星的数目以及星座卫星的组合的问题，并给出了航天器轨道的解析求解方法，为单航天器无需变轨对星座多星交会提供了理论依据。

参考文献：

[1]　Walker J G. Satellite Constellation[M]. JBIS, 1984.
[2]　白晓征，郗晓宁. 无需变轨实现单航天器对星座中多卫星的近距离接近[J]. 宇航学报，2005, S1: 114-116.
[3]　王威，黄文德，付晓锋，等. 单个航天器对Walker星座中多卫星的近距离接近[J]. 空间科学学报，2005, 25(6): 547-551.
[4]　张敬，王威，郗晓宁. 对偏差Walker星座卫星的接近轨道设计[J]. 宇航学报，2008, 29(4): 342-346.
[5]　王威，郗晓宁，于志坚. 接近Walker星座多颗卫星的轨道问题[J]. 863航空航天技术，2004
[6]　郗晓宁，王威，高玉东. 近地航天器轨道基础[M]. 长沙：国防科技大学出版社，2003.
[7]　王威，付晓锋，郗晓宁. 单航天器无需机动对星座多星交会轨道全解[J]. 宇航学报，2007, 28(3): 663-666.
[8]　叶其孝，沈永欢. 实用数学手册[M]. 北京：科学出版社，2006.