

文章编号: 1001- 2486(2010) 06- 0111- 05

任意多边形的非结构网格快速生成算法研究*

刘 枫, 冯定华, 丁昊, 潘 沙, 李 桦

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 对于包含大尺度运动边界的 CFD 数值模拟, 网格重构是其中的关键, 快速稳定的网格生成技术是其中的重要组成部分。建立了基于有向边的适用于任意多边形的快速三角初始化算法; 证明了最长边剖分网格细化算法在一定条件下发散, 并结合 Delaunay 边交换技术使细化算法封闭; 建立了基于顶点弹簧理论的网格优化方法, 以提高网格生成的质量。结果表明, 算法具有较好的鲁棒性和高效性。

关键词: 任意多边形; 非结构网格; 有向边; 网格细化

中图分类号: O35; O43 文献标识码: A

Fast Unstructured Mesh Generation Based on Arbitrary Polygon

LIU Feng, FENG Ding-hua, DING Guo-hao, PAN Sha, LI Hua

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Mesh reconstruction is the key to the numerical simulation in CFD with large scale moving boundary which contains fast and stable mesh generation arithmetic. Firstly, this framework established efficient initial triangulation arithmetic based on directional edge theory which is fit for arbitrary polygon. Then it proved the arithmetic of longest edge division matches the divergence at some time and closes down the divergence with Delaunay edge swapping. Finally, the paper optimizes mesh with vertex spring model. The results indicate the way established in this study is efficient and stable.

Key words: arbitrary polygon; unstructured mesh; directional edge; grid refine

随着计算技术的发展, 复杂条件下的流动数值模拟越来越受到关注。如何运用数值方法求解包含运动物体的流场, 如对弹箭从飞机上分离等问题进行数值模拟, 成为目前计算流体力学研究的热点之一。对于大尺度运动的模拟, 网格重构是其中的关键, 而网格快速生成成为制约其发展的瓶颈。

网格生成是计算流体力学(CFD)中的关键环节, 其中非结构网格由于适合含复杂外形流场的数值模拟, 而得到了广泛的应用。在非结构网格生成中, 主要有阵面推进法(Advancing Front Method)和 Delaunay 方法。阵面推进法由于其搜索量大, 每次搜索只能完成一个网格的生成, 因此网格生成速度较慢, 生成网格不能满足 Delaunay 准则; 与此同时, Delaunay 方法因其生成网格的效率较高, 而得到了广泛的应用。然而, 传统的非结构网格生成算法往往伴随着较高的计算复杂度, 且对于复杂外形的网格生成耗时长, 网格质量不高, 因而有必要发展快速网格生成算法。本文基于计算几何的基本原理, 在 Delaunay 剖分思想的基础上, 运用三角细化准则、边交换技术和网格优化技术, 发展了一套任意多边形快速剖分算法。

1 基于有向边的任意多边形初始三角化算法

1.1 基本概念^[1]

定义 1 有向边和边界环。有向边是指包围任意平面多边形的区域的相邻点的有向连接, 记为 $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 。边界环是有向边的集合。一般的, 外边界环以逆时针为正, 内边界环以顺时针为正。

* 收稿日期: 2010- 07- 12

基金项目: 国家重大专项资助项目; 国防科学技术大学优秀研究生创新资助项目(B080103)

作者简介: 刘枫(1983-), 男, 博士生。

定义2 可视。已知点 p_m 与任意一点 p_k 构成的线段 $p_m p_k$ 与边界边不相交, 称点与点可视。显然, 点 p_m 对自身可视。

定义3 点与线段的夹角。已知线段 $p_m p_n$ 与线段外的一点 p_k , p_k 与 p_m, p_n 的连线所围成的夹角 α_k 称为点与线段的夹角。

定义4 合理三角形。三角形中不包含任意其他边界点, 该原则称为三角剖分原则。

1.2 初始三角化算法

定理1 设有有向边 $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$, 任取一点 $p_k (k \neq i, i+1)$, 与有向边 $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 组成一个三角形。若 p_k 在剖分区域内, 且点 $i, i+1$ 对点 k 可视, 则三角形 $p_i p_{i+1} p_k$ 是一个合理三角形。

证明:

(1) 若 p_k 不在剖分区域内部, 三角形 $p_i p_{i+1} p_k$ 显然不能成为网格剖分的一部分;

(2) 若点 i, j 中的任意一点对点 k 不可视, 不妨设点 i 对点 k 不可视。则线段 ik 必与某有向边分列, 三角形 $p_i p_{i+1} p_k$ 不满足三角剖分原则。 □

文献[2]在判断每个点能否成为当前边的候选节点时都要判断该点与当前边是否可视, 所以每次在查找当前边的候选节点时效率特别低, 且原算法可能出现“位置违约”的情况。本文提出基于有向边的任意多边形三角剖分初始化算法是: 首先判断当前多边形的任一边界点 p 是否在当前边的左侧, 若是则计算 p 点与当前边的夹角, 并添加到候选节点链表中, 然后用快速排序法对候选节点链表按照夹角从大到小排序。将候选节点链表中与当前边的夹角最大且与当前边可视的候选节点作为能和当前边构成合理三角形的顶点。因此取排序后的第一个候选节点 p , 判断 p 点是否与当前边 $\overrightarrow{p_i p_{i+1}}$ 可视。若可视, 则 p 点即为能和当前边构成合理三角形的节点。若不可视则取下一个候选节点, 直到找到与当前边可视的候选节点即为所求得的顶点。如图1所示, 点 A, B, C 在有向边 \vec{IJ} 的左侧, 点 A, B 对边 \vec{IJ} 可视。线段 IC 与线段 AB 分列, 点 C 对边 \vec{IJ} 不可视。与此同时, 点 A 与边 \vec{IJ} 的夹角小于点 B 与边 \vec{IJ} 的夹角, 因此 $\triangle BIJ$ 构成一个合理三角形。图2和图3分别给出了单连通域和多连通域的初始化结果。

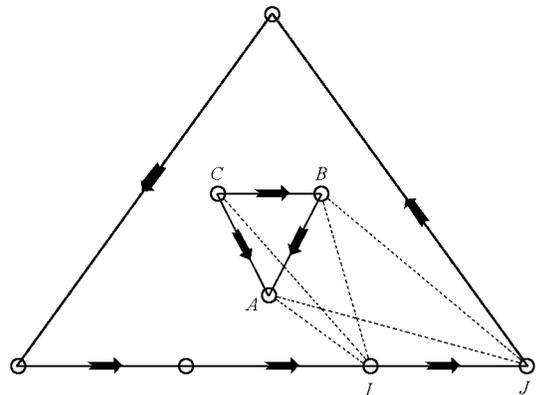


图1 合理三角形示意图
Fig.1 Reasonable triangle

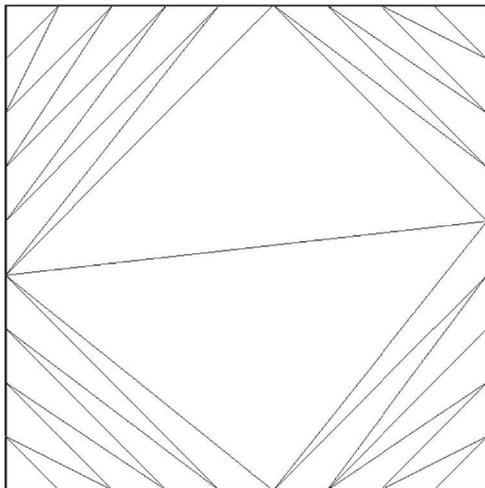


图2 单连通域的初始三角剖分

Fig.2 The initial triangulation of simple connected region

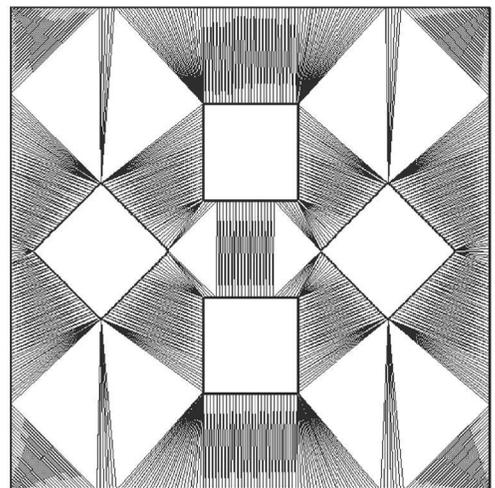


图3 多连通域的初始三角剖分

Fig.3 The initial triangulation of multiply connected region

2 三角细化准则

在以上初始化三角形的基础上,给定网格密度,生成内部节点,构建新的三角单元,在满足网格密度要求的同时,考虑网格单元的形状质量。文献[3-5]对网格细化技术进行了详尽的阐述,各类网格细化技术对网格整体或者局部加密,使网格更适合于CFD计算的要求。

目前主流的网格细化技术主要有: Delaunay 准则插点、边(面)剖分、阵面推进插入等等。为了克服单一细化技术的弱点,提高网格生成质量,同时兼顾计算效率,本文将最长边剖分技术同 Delaunay 准则相结合,发展了基于最长边剖分的 Delaunay 边交换网格生成算法。

2.1 最长边剖分

边剖分是一类广泛使用的网格细化方法。对于初始网格中一个尺寸过大的单元,通过将三角形中的最长边对分,连接该边的中点和对顶点,将原三角形剖分为两个三角形。重复上述过程,直到网格密度满足要求。当每一个三角形的最长边小于所有初始边平均长度,剖分结束。

本文通过研究对边剖分技术,发现该方法在一定条件下存在算法不收敛的情形,见图4。

定理2 当相邻边的最大距离与最小距离之比大于2时,最长边剖分算法在局部发散。

证明:不妨设边AD和边AC是初始三角形 $\triangle ACD$ 的一对相邻边。边CD是 $\triangle ACD$ 的最长边,点B是线段AC的三分点。图4说明了算法局部发散的过程。

证明过程分为两步:

(1)不失其一般性,设点A, C, D的坐标分别为 $(0, 0)$, $(x_C, 0)$ 和 (x_D, y_D) 。根据最长边剖分算法,点E的坐标容易得到 $(\frac{x_D + x_C}{2}, \frac{y_D}{2})$ 。逐次剖分三角形 $\triangle ACE$,剖分n次后得到点E'的坐标为: $(\sum_{k=1}^n \frac{x_C}{2^{2k-1}} + \frac{x_D}{2^{2k-1}}, \frac{y_D}{2^{2n-1}})$ (n为奇数), $(\sum_{k=1}^n \frac{x_C}{2^{2k}} + \frac{x_D}{2^{2k}}, \frac{y_D}{2^{2n}})$ (n为偶数)。当 $n \rightarrow \infty$ 时,点E'的坐标分别收敛到: $(\frac{1}{3}x_C, 0)$ 和 $(\frac{2}{3}x_C, 0)$;

(2)第一步的证明中,假设了线段AC不被剖分。在图5、图6所示的条件下,线段AC不会被剖分。当 $|AD|/|AC| < 2$ 时,根据最长边剖分原则,图4的剖分方式是唯一的。

综合(1)(2),最长边剖分算法在图5、图6的条件下发散。 □

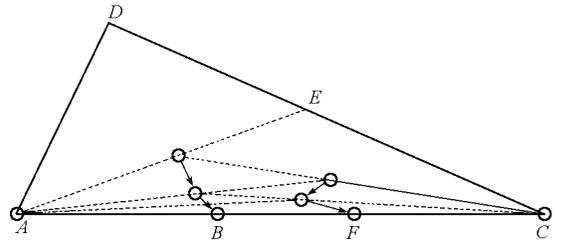


图4 最长边剖分算法发散分析图
Fig. 4 The analysis of algorithmic divergence

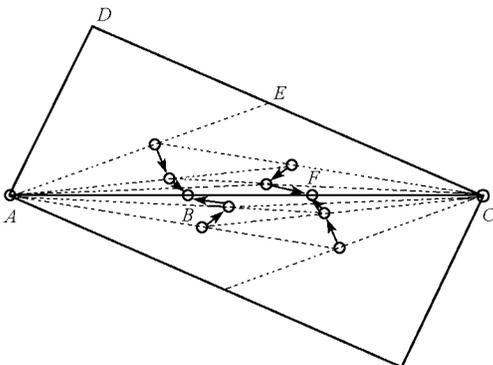


图5 翻转条件下的算法发散示意图
Fig. 5 Algorithmic divergence under rolling condition

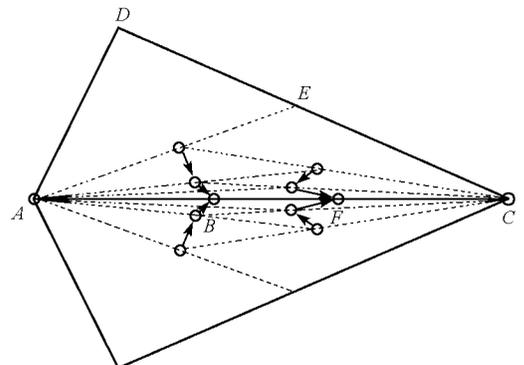


图6 镜像条件下的算法发散示意图
Fig. 6 Algorithmic divergence under mirror condition

2.2 Delaunay 边交换技术

为了克服由定理 2 给出条件可能出现的算法发散的缺陷, 本文将最长边剖分算法与 Delaunay 边交换技术结合。Delaunay 边交换^[6]是一种简单快速的拓扑交换, 通过更改局部的节点连接方式提高网格质量。如图 7 所示, 如果两个相邻三角形违反 CP 准则(空圆准则), 则把当前对角线 AB 与另一条对角线 CD 交换。

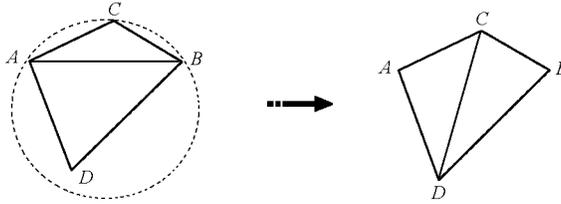


图 7 Delaunay 边交换技术
Fig.7 Delaunay edge swapping

3 基于顶点弹簧模型的网格优化技术

为了提高网格质量, 本文将基于顶点弹簧的网格优化技术引入到网格生成算法中。其基本描述如下: 对于顶点弹簧, 节点 i, j 间的弹簧张力为

$$f_{ij} = K_{ij}(x_j - x_i) \quad (1)$$

其中 K_{ij} 凡为连结节点 i, j 的弹簧的倔强系数, x_i, x_j 分别是节点 i, j 的位置矢量。节点 i 所受的合力可以表示为

$$f_i = \sum_{j=1}^{N_i} f_{ij} \quad (2)$$

推广后的顶点弹簧方法认为网格点的受力始终等于初始状态所受的合力, 则当运动边界上的点移动后, 其他网格点的新位置坐标可以通过迭代求解如下的线性系统得到

$$\begin{bmatrix} \sum_j K_{1j} & & & & b_{m1} \\ & \sum_j K_{2j} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ b_{mn} & & & & \sum_j K_{node_numj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{node_num} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{node_num} \end{bmatrix} \quad (3)$$

上式中,

$$b_{mn} = \begin{cases} -K_{mn} & \text{if } (m \text{ connect to } n) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (4)$$

线性系统式(3)系数矩阵是对角占优的, 可以用 Jacobi 或者 Gauss-Seidel 迭代求解。

4 算例验证

本文选择了单连通域和多连通域的多个算例来验证算法的正确性, 同时将该算法的计算时间同阵面推进法和 Delaunay 算法相比较(如表 1), 表明本文发展的算法是高效的。

表 1 网格剖分时间对比(单位: 秒/个)

Tab. 1 Character time (unit: s)

| | 阵面推进 | Delaunay | 本文算法 |
|--------------|-------------|-------------|------------|
| “CFD”/ 网格单元 | 15. 6'9017 | 12. 6'9205 | 4. 2'9249 |
| 复杂多连通域/ 网格单元 | 21. 4'35218 | 19. 4'35681 | 7. 1'35553 |

图 8~ 图 9 分别给出了多个几何条件下的剖分算例。算例表明,该算法鲁棒性较高,能够成功地对任意多边形进行三角剖分。



图 8 “CFD” 字样网格剖分
Fig. 8 The triangulation of character CFD

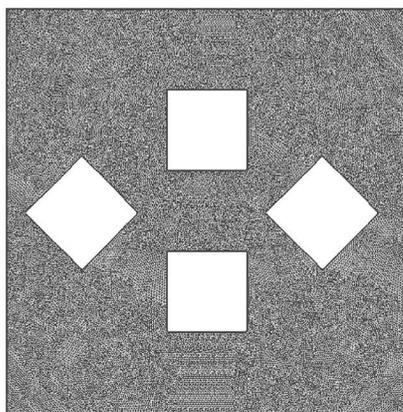


图 9 复杂多连通域网格剖分
Fig. 9 The triangulation of multiply connected region

5 结论

- (1) 传统的最长边剖分算法在一定条件下发散,不能完全适用于任意多边形的三角剖分。
- (2) Delaunay 边交换技术与最长边剖分算法相结合,可以有效地提高算法的适用性和鲁棒性。
- (3) 本文提出的基于有向边的初始化三角算法与网格细化算法能够适用于任意多边形的三角剖分问题中,且快速高效。

参考文献:

- [1] 周培德. 计算几何[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [2] Lawson C L. Software for C1 Surface Interpolation[C]//Mathematical Software, Academic Press, New York, 1977: 161- 194.
- [3] Rivara M C. New Longest-edge Algorithms for Triangular Mesh Generation[J]. Computational Geometry: Theory and Application, 2002, 22: 86- 95.
- [4] Bowyer A. Computing Dirichlet Tessellations[J]. The Computer Journal, 1981, 24(2): 151- 166.
- [5] Thompson J F, Weathill N P. An Aspects of Numerical Grid Generation: Current Science and Art[R]. AIAA 93- 3539, 1993.
- [6] 陈欣,等. 复杂平面区域的三角网格生成算法[J]. 国防科技大学学报, 2008(6).