

文章编号: 1001- 2486(2010) 06- 0135- 07

基于小波配点法的空间机械臂关节轨迹规划*

刘泽明, 张青斌, 丰志伟, 杨 涛

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 针对平面型空间机械臂关节轨迹优化问题, 提出一种基于小波配点法的数值算法。该算法在区间样条小波函数及其导数算法的基础上, 对状态变量与控制变量在小波配点上作离散化处理, 然后将原最优控制问题转化为以小波系数为优化参数的非线性规划问题, 利用非线性规划算法求解该问题得到原问题的解。算法可充分利用小波具有非线性逼近的优点, 提高计算精度和效率。对典型问题进行数值仿真, 结果表明该算法对空间机械臂关节轨迹优化问题是有效的。

关键词: 区间样条小波; 轨迹优化; 非完整系统; 空间机械臂

中图分类号: V412.4 **文献标识码:** A

Space Manipulators Path Planning Based on Wavelet Collocation

LIU Ze-ming, ZHANG Qing-bin, FENG Zhi-wei, YANG Tao

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: A novel numeric method for the planar space manipulators joint trajectory optimization problem was proposed based on the wavelet collocation. Based on the interval spline wavelet according with its derivation algorithms, the approach expanded the state and control variables via cubic spline wavelet decomposition, and then the trajectory optimization problem was translated to nonlinear programming problem with wavelet coefficient being parameters. The wavelet advantageous properties of compact representation could inherently make it efficiently and accurately capture the discontinuities. The novel approach was demonstrated by a typical space manipulators joint trajectory optimization problem, and the optimal results show that our approach is efficient and accurate.

Key words: interval spline wavelet; trajectory optimization; nonholonomic system; space manipulators

近年来, 随着航天技术的发展, 空间机械臂系统在航天任务中得到了广泛应用, 如航天器在轨维护、跟踪监视、抓取或释放卫星等, 空间机械臂的路径规划问题日益受到重视。在机械臂执行任务期间, 航天器姿控系统一般处于关闭状态, 机械臂的相对运动将导致载体姿态的改变。因此为了使载体和机械臂达到预定姿态, 需要对机械臂的运动路径进行规划。如果忽略重力梯度, 则整个系统的角动量守恒, 具有非完整约束的性质。这种非完整约束具有如下特点: 载体姿态变化只与机械臂关节相对转动角度有关, 而与其角速度无关, 从而可以使用内力矩进行机械臂的机动控制。

Reyhanoglu 等^[1]证明了空间多体系统使用内力矩进行 Rest-to-Rest 机动解的存在性、强可达性和局部可控性。他们利用空间多体系统角动量守恒的不可积性, 提出了一种相互铰接的空间多刚体系统的重定向机动策略, 并得到了三刚体系统的解。Vadali 等^[2]在 Reyhanoglu 等人工作的基础上, 研究了使用机械臂进行航天器姿态机动的最优开环控制问题。他们利用多项式将机械臂的角度运动参数化, 使用序列二次规划方法求解一个带等式约束的优化问题, 从而得到姿态机动的开环最优解。戈新生等^[3-4]将空间机械臂动力学方程转化为非线性控制系统的状态方程, 并以机械臂关节耗能最小为目标, 进行机械臂运动规划。

空间机械臂关节轨迹规划作为一种最优控制问题, 一般可以采用两种数值解法^[5]: 间接法和直接法。间接法基于极大值原理, 引入伴随状态变量, 然后将优化问题转化为两点或多点边值问题; 直接法

* 收稿日期: 2010- 09- 26

基金项目: 国防科技大学预研基金资助项目(GJ07- 01- 01)

作者简介: 刘泽明(1961-), 男, 博士生。

则将状态变量和控制变量对时间离散化,将原始优化问题转化为非线性规划问题。从上个世纪90年代开始,基于伪谱法^[6-7]的数值解法得到迅猛发展,其思想是利用正交多项式作为基函数来表示状态与控制变量,然后引入导数矩阵将微分约束方程(动力学方程)转化为等式约束,从而将最优控制问题转化为非线性规划问题。从函数逼近的观点来看,基于正交多项式的函数逼近属于线性逼近技术。小波函数良好的时间频率局部特性,使得基于小波多尺度的非线性逼近算法较适合于逼近各种未知函数。若将小波函数应用于最优控制的数值算法之中,则能充分发挥小波非线性逼近的特点,提高计算效率。在现有小波函数之中,区间样条小波^[8-9]函数是一种非常合适的选择。这类小波满足给定端点条件(零阶/一阶导数),具有解析表达式,因而被广泛应用于解偏微分方程等相关数值分析领域。本文首次应用基于区间样条小波的非线性逼近技术,求解空间机械臂关节轨迹规划问题。

1 动力学模型

为了简单起见,考虑如图1所示平面型空间机械臂系统,由一个载体与两个机械臂组成。三个刚体分别记为 B_0 、 B_1 和 B_2 ,通过关节 O_1 和 O_2 铰接。机械臂 B_1 到载体质心的距离为 r ,两个机械臂长度分别为 l_1 和 l_2 。设载体的质量和惯量分别为 m_0 和 J_0 ,机械臂质量分别为 m_1 和 m_2 ,且质心位于各自几何中心,转动惯量分别为 J_1 和 J_2 。设 θ_0 为载体与水平线的夹角, θ_1 和 θ_2 分别为 B_1 相对载体和 B_2 相对 B_1 的夹角。

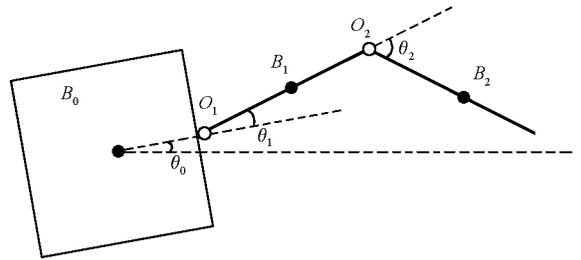


图1 平面型空间机械臂模型
Fig. 1 Model of planar space manipulators

若忽略引力梯度力矩,则系统处于失重状态,自由飘浮在空中。因此系统相对于总质心的动量矩守恒,若初始动量矩为零,则动量矩守恒产生一个非完整约束。

下面根据Lagrange方程及广义动量守恒推导系统的约束方程和动力学方程。设系统动能为

$$T = \frac{m_0}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J_0}{2}\dot{\theta}_0^2 + \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{J_1}{2}(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{J_2}{2}(\dot{\theta}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{q}}$$
(1)

其中 $\boldsymbol{q} = [x \ y \ \theta_0 \ \theta_1 \ \theta_2]^T$ 为广义坐标, $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}_0 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$ 为广义速率, $[x \ y]^T$ 为载体质心坐标。 \boldsymbol{M} 为对称广义质量矩阵。

若系统不受外力,则系统Lagrange方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}} = 0$$
(2)

由于动能中不显含载体质心位置坐标,Lagrange方程具有首次积分,并设系统动量为零,得

$$\boldsymbol{M}_{11} \dot{\boldsymbol{q}}_1 + \boldsymbol{M}_{12} \dot{\boldsymbol{q}}_2 = 0$$
(3)

其中 $\boldsymbol{q}_1 = [x \ y]^T$, $\boldsymbol{q}_2 = [\theta_0 \ \theta_1 \ \theta_2]^T$, \boldsymbol{M}_{11} 和 \boldsymbol{M}_{12} 为 \boldsymbol{M} 进行相应分块后的矩阵。

将(3)式代入动能表达式(1)式可得

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}_2^T \left(\boldsymbol{M}_{22} - \boldsymbol{M}_{12}^T \boldsymbol{M}_{11}^{-1} \boldsymbol{M}_{12} \right) \dot{\boldsymbol{q}}_2 = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}_2^T \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{q}}_2$$
(4)

得到新的动能表达式, \boldsymbol{M} 为新的广义质量矩阵。由于新的动能表达式中不显含载体姿态角 θ ,因此具有首次积分(动量矩守恒),并设系统动量矩为零,可得

$$a_{11} \dot{\theta}_0 + a_{12} \dot{\theta}_1 + a_{13} \dot{\theta}_2 = 0$$
(5)

上式为系统动量矩守恒方程,为一非完整约束,因此系统为非完整系统,具有不可积性,即载体姿态 θ 仅与关节相对角度有关,而与其相对角速度无关,基于此可对机械臂关节轨迹进行优化。

取机械臂相对转动角加速度作为控制量

$$\begin{cases} u_1 = \ddot{\theta}_1 \\ u_2 = \ddot{\theta}_2 \end{cases} \quad (6)$$

并设系统位形为

$$\mathbf{x} = [\theta \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T \quad (7)$$

则系统动力学方程为

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \ddot{\theta}_1 + \frac{a_{13}}{a_{11}} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 = u_1 \\ \ddot{\theta}_2 = u_2 \end{cases} \quad (8)$$

若以最小耗能为优化指标, 则优化函数可以表示为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt \quad (9)$$

2 区间样条小波

在有限区间 $I = [a, b]$ 上定义 Sobolev 空间 $H_0^2(I)$, 即

$$H_0^2(I) = \{f | f'' \in L^2(I), f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0\} \quad (10)$$

然后在空间 $H_0^2(I)$ 上构造多尺度分析^[10] (为便于描述, 区间记为 $I = [0, L]$, 且 L 为大于 4 的整数)。内部尺度函数 $\phi(x)$ 和边界尺度函数 $\phi_b(x)$ 分别为

$$\phi(x) = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} (-1)^j (x-j)_+^3 \quad (11)$$

$$\phi_b(x) = \frac{3}{2} x_+^2 - \frac{11}{12} x_+^3 + \frac{3}{2} (x-1)_+^3 - \frac{3}{4} (x-2)_+^3 \quad (12)$$

$$\text{其中 } x_+^n = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^n & x \geq 0 \end{cases}$$

对于任意 $j, k \in \mathbf{Z}$, 将上述两个尺度函数进行伸缩平移变换, 即

$$\phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k), \quad \phi_{b,j}(x) = \phi_b(2^j x) \quad (13)$$

定义空间 V_j 为 $\{\phi_{j,k} | 0 \leq k \leq (2^j L - 4); \phi_{b,j}(x), \phi_{b,j}(L-x)\}$ 线性张成的空间, 即

$$V_j = \text{span}\{\phi_{j,k} | 0 \leq k \leq (2^j L - 4); \phi_{b,j}(x), \phi_{b,j}(L-x)\} \quad (14)$$

容易证明 V_j 构成空间 $H_0^2(I)$ 上的多尺度分析。

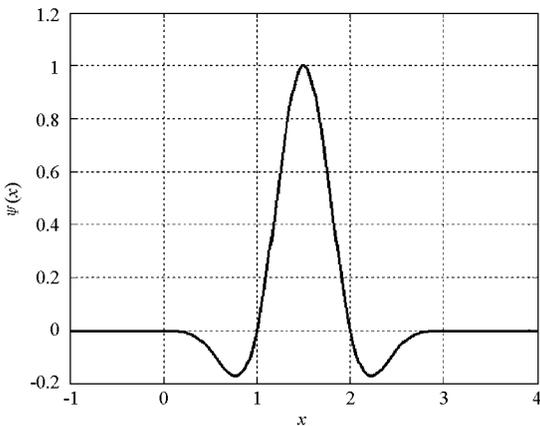


图 2 区间样条小波函数

Fig. 2 Interval spline wavelet

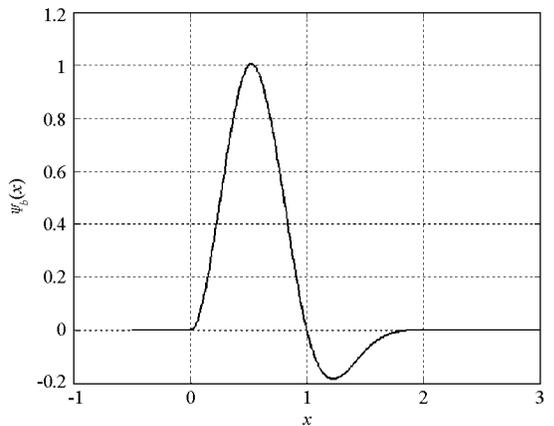


图 3 边界小波函数

Fig. 3 Bound spline wavelet

根据尺度函数 $\phi(x)$ 和边界尺度函数 $\phi_b(x)$, 构造内部小波函数 $\Psi(x)$ (见图 2) 和边界小波函数

$\Psi_b(x)$ (见图3), 即

$$\begin{cases} \Psi(x) = -\frac{3}{7}\phi(2x) + \frac{12}{7}\phi(2x-1) - \frac{3}{7}\phi(2x-2) \\ \Psi_b(x) = \frac{24}{13}\phi_b(2x) - \frac{6}{13}\phi(2x) \end{cases} \quad (15)$$

容易证明 $\Psi(x)$ 和 $\Psi_b(x)$ 属于空间 V_1 。与尺度函数类似, 定义小波函数的伸缩平移变换, 即

$$\Psi_{j,k}(x) = \Psi(2^j x - k) \quad j \geq 0, k = 0, \dots, n_j - 3 \quad n_j = 2^j L \quad (16)$$

$$\Psi_{j,-1}(x) = \Psi_b(2^j x) \quad (17)$$

$$\Psi_{j,n_j-2}(x) = \Psi_b[2^j(L-x)] \quad (18)$$

对于任意 $j \geq 0$, 定义

$$W_j = \text{span}\left\{ \Psi_{j,k}(x) \mid k = -1, \dots, n_j - 2 \right\} \quad (19)$$

显然, W_j 是 V_j 在空间 V_{j+1} 的正交补空间。

对于任意函数 $f(x) \in H^2(I)$, 为了处理非齐次边界条件, 引入如下样条插值函数

$$I_{b,j}f(x) = \alpha_1 \eta_1(2^j x) + \alpha_2 \eta_2(2^j x) + \alpha_3 \eta_3[2^j(L-x)] + \alpha_4 \eta_4[2^j(L-x)] \quad (20)$$

其中

$$\begin{cases} \eta_1(x) = (1-x)_+^3 \\ \eta_2(x) = 2x_+ - 3x_+^2 + \frac{7}{6}x_+^3 - \frac{4}{3}(x-1)_+^3 + \frac{1}{6}(x-2)_+^3 \end{cases} \quad (21)$$

在具体应用中, 可以利用端点条件来确定式(20)中的系数 α_i , 具体可参考文献[11]。

通过上述推导, 可将 $f(x) - I_{b,j}f(x) \in H_0^2(I)$ 在第 J 尺度上近似为

$$\begin{aligned} P_J f(x) &= f_J(x) = I_{b,J}f + f_0 + g_0 + g_1 + \dots + g_{J-1} \\ f_0 &\in V_0, g_i \in W_i, 0 \leq i \leq J-1 \end{aligned} \quad (22)$$

显然, 当 J 足够大时 $f_J(x)$ 就接近 $f(x)$ 。 $P_J f(x)$ 可以表示为

$$P_J f(x) = f_{-1,-1} \Phi_b(x) + \sum_{k=0}^{L-4} f_{-1,k} \Phi_k(x) + f_{-1,L-3} \Phi_b(L-x) + \sum_{j=0}^{J-1} \left[\sum_{k=-1}^{n_j-2} f_{j,k} \Psi_{j,k}(x) \right] \quad (23)$$

与多分辨分析对应, 在区间 $[0, L]$ 上引入如下小波配点, 即

$$\begin{cases} x_k^{(-1)} = k, & k = 1, \dots, L-1 \\ x_k^{(j)} = \frac{k+1.5}{2^j}, & -1 \leq k \leq n_j - 2, j > 0 \end{cases} \quad (24)$$

若记 $f = \{f^{(-1)}, f^{(0)}, \dots, f^{(J-1)}\}^T$ 为(23)式中的小波展开系数, $f = \{f^{(-1)}, f^{(0)}, \dots, f^{(J-1)}\}^T$ 为所有配点上的函数值。依据小波快速变换算法, 小波配点上函数值与小波系数是等价的, 二者可以相互转化。

采用区间样条小波近似状态变量时, 还需要计算状态变量的导数。本文采用 Cai 等^[11]的处理方法。首先计算二阶导数, 然后计算一阶导数, 最后给出导数算子矩阵 D_2 和 D_1 , 即

$$f' = \left[H_1 D_2 + H_2 \right] f = D_1 f \quad (25)$$

关于矩阵 H_1 和 H_2 的详细算法可参见文献, 这里不再赘述。

3 小波配点法

在通常伪谱法中, 直接将状态变量与控制变量的离散值作为优化参数; 本文则将小波系数作为优化参数。这样可以发挥区间样条小波的其非线性逼近特性, 有利于捕获函数的突变, 进而提高计算效率。为了便于描述, 将 $P_J f(x)$ 写成如下不严格的数学表达式, 即

$$P_J f(x) = \sum_{k=0}^{N_j} f_k \Phi_k(x) \quad (26)$$

其中 f_k 包括所有的小波尺度系数和小波系数, $\Phi_k(x)$ 包括相应边界尺度函数、尺度函数、小波函数与小

波尺度函数, N_J 为区间的配点个数。

本文采用小波法求解 Mayer 型的优化问题。Mayer 型最优控制问题可描述为: 寻找控制 $u(t)$ 与状态 $x(t)$ 、静态参数 p 及时间 t_0, t_f , 使得如下性能指标最小:

$$J = \Phi[x(t_0), x(t_f), p, t_0, t_f] \quad (27)$$

满足微分约束条件

$$\dot{x}(\tau) = f[x(t), u(t), p, t], \quad t \in [t_0, t_f] \quad (28)$$

路径约束条件

$$H_{\min} \leq H[x(t), u(t), p, t] \leq H_{\max} \quad (29)$$

控制与状态量的边界约束条件

$$B_{\min} \leq B[x(t_0), t_0, x(t_f), t_f; p] \leq B_{\max} \quad (30)$$

时间约束

$$\begin{cases} \underline{t_0} \leq t_0 \leq \bar{t_0} \\ \underline{t_f} \leq t_f \leq \bar{t_f} \\ t_f - t_0 \geq 0 \end{cases} \quad (31)$$

针对上述最优控制问题, 首先利用小波多分辨分析, 将时间区间 $[t_0, t_f]$ 离散分为 J 层, 相应地将所有配点记为 $G_i = [t_1, \dots, t_{N_J}]$ 。状态变量 $x(t)$ 可以表示为

$$x_i(t) \approx \sum_{k=1}^{N_J} \hat{x}_{k,i} \phi_k(t), \quad i = 1, \dots, n_x \quad (32)$$

在具体的优化计算中, 引入 $n_x \times N_J$ 矩阵存储状态变量小波系数 X^{N_J} 以及离散值 X^{N_J} 。

同理, 将控制量 $u(\tau)$, $\tau \in [0, L]$ 表示为如下形式:

$$u_i(\tau) \approx \sum_{k=1}^{N_J} \hat{u}_{k,i} \phi_k(\tau), \quad i = 1, \dots, n_u \quad (33)$$

同时引入矩阵 \hat{u}^{N_J} 和 u^{N_J} 。

利用上一节导数矩阵 D_1 , 则可得到

$$\dot{X}^{N_J} = D_1 X^{N_J} \quad (34)$$

于是可将动力学微分约束(28)式离散为以小波系数表示的等式约束矩阵

$$\zeta^N = D_1 X^{N_J} - f(X^{N_J}, U^{N_J}, p) = 0 \quad (35)$$

另外还需要将路径约束与边界约束转化为小波系数的表达式, 即

$$H_{\min} \leq H[X^{N_J}, U^{N_J}, p, t] \leq H_{\max} \quad (36)$$

同样, 将控制和状态量边界约束条件离散化为如下形式:

$$B_{\min} \leq B[X^{N_J}, U^{N_J}; p] \leq B_{\max} \quad (37)$$

通过上述小波变换, 原始最优控制问题转化为以 $X^{N_J}, U^{N_J}, p, t_0, t_f$ 为优化参数的非线性规划问题。

进一步, 将所有优化参数 $X^{N_J}, U^{N_J}, p, t_0, t_f$ 表示为决策矢量, 并记为 y 。

通过上述处理, 则将原最优控制问题转化为非线性规划问题, 其优化目标函数为

$$F = \Phi[y] = \Phi[X^{N_J}, U^{N_J}, p, t_0, t_f] \quad (38)$$

相应地, 可从原最优控制问题的约束条件(35~37)式推导出约束条件

$$\begin{cases} G_i \leq G(y) \leq G_u \\ y_l \leq y \leq y_u \end{cases} \quad (39)$$

最终, 可以利用非线性规划的优化算法求解上述参数优化问题。本文利用非线性规划软件 SNOPT^[12] 求解由(38)式和(39)式组成的大规模非线性优化问题。

4 数值仿真分析

考虑如图 1 所示平面型空间机械臂, 系统参数与仿真条件参考文献[3]。载体质量和惯量分别为 120kg 和 $12\text{kg}\cdot\text{m}^2$, $r = 0.5\text{m}$; 两个机械臂相同, 质量和惯量分别为 12kg 和 $1\text{kg}\cdot\text{m}^2$, 长度为 1m。

算例 1: 机械臂展开。

初始和终端位形参数为

$$\theta_0 = 0, \varphi_{10} = \pi, \varphi_{20} = -\pi; \theta_f = \pi/2, \varphi_{1f} = 0, \varphi_{2f} = 0$$

利用本文小波配点法, 对上述机械臂展开问题进行求解, 载体姿态角及关节角如图 4 所示, 控制量变化曲线如图 5 所示。

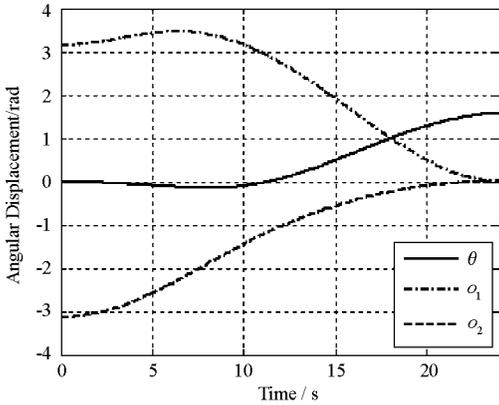


图 4 转角优化曲线

Fig. 4 Angular displacement curve

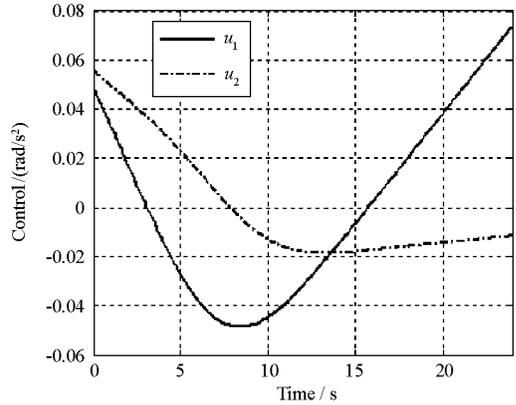


图 5 输入优化曲线

Fig. 5 Control curve

算例 2: 载体姿态机动。

初始和终端位形参数为

$$\theta_0 = 0, \varphi_{10} = 0, \varphi_{20} = 0; \theta_f = \pi/2, \varphi_{1f} = 0, \varphi_{2f} = 0$$

利用本文小波配点法, 对上述机械臂载体姿态机动问题进行求解, 载体姿态角及关节角如图 6 所示, 控制量变化曲线如图 7 所示。

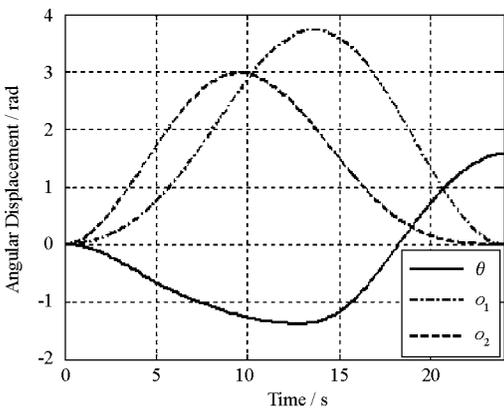


图 6 转角优化曲线

Fig. 6 Angular displacement curve

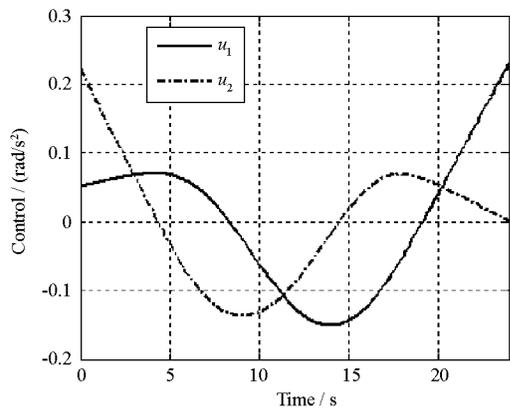


图 7 输入优化曲线

Fig. 7 Control curve

从以上两个算例的仿真结果可以看出, 利用基于区间样条小波配点法的直接数值解法, 边界条件约束得到了很好的满足, 且具有较高的精度。

5 结论

本文针对空间机械臂关节轨迹规划问题,建立了平面型空间机械臂运动模型,并提出了基于能量的关节轨迹规划问题。然后引入三阶区间样条小波,将原最优问题转化为以小波系数为优化参数的非线性规划问题。最后仿真分析了两类典型的空间机械臂关节轨迹规划问题:机械臂展开和载体姿态机动问题,仿真结果说明本文给出的算法是有效的。

参考文献:

- [1] Reyhanoglu M, McClamroch N H. Planar Reorientation Maneuvers of Space Multibody Systems Using Internal Control[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1992, 15(6): 1475- 1480.
- [2] Krishnan S, Vadali S R. Optimal Rotational Maneuvers of Spacecraft Using Manipulator Arms[R]. AIAA-94-3655-CP, 1994.
- [3] 戈新生,孙鹏伟.自由漂浮空间机械臂非完整运动规划的粒子群优化算法[J].*机械工程学报*,2007,43(4):34-38.
- [4] 戈新生,陈立群,刘延柱.一类多体系统的非完整运动规划最优控制[J].*工程力学*,2006,23(3):63-68.
- [5] Betts J T. Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, 21(2): 193- 207.
- [6] Fahroo F, Ross I M. Costate Estimation by a Legendre Pseudospectral Method[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, 24(2): 270- 277.
- [7] Berson D A, Huntington G T, Thorvaldsen T P, et al. Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation via an Orthogonal Collocation Method [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29(6): 1435- 1440.
- [8] Chui C K, Wang J Z. A Cardinal Spline Approach to Wavelets[J]. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1991, 113: 785- 793.
- [9] Chui C K, Quak E. Wavelets on a Bounded Interval[J]. *Numerical Methods of Approximation Theory*, 1992, 9: 53- 75.
- [10] 王昱. 偏微分方程的小波求解法及其在燃烧计算中的初步应用[D]. 长沙:国防科技大学,2008.
- [11] Cai W, Zhang W. An Adaptive Spline Wavelet ADI (SW-ADI) Method for Two-dimensional Reaction-diffusion Equations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, 139: 92- 126.
- [12] Gill P E, Murray W, Saunders M A. SNOPT: An SQP Algorithm for Large-scale Constrained Optimization[R]. San Diego: Department of Mathematics, University of California, 1997.