

文章编号: 1001- 2486(2010) 06- 0158- 05

饱和系统的线性最优容错不变集^{*}

范金华, 郑志强, 吕 鸣

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 针对饱和系统的容错控制问题, 提出了一种 D 稳定约束下系统吸引域的估计方法。分别以不变集和参考集的容量为优化目标, 给出了两个优化容错不变集的充分条件。为解决不变集优化中出现的双线性矩阵不等式(BMI) 问题, 通过构造包含线性矩阵不等式(LMI) 的目标函数, 将它转化为非线性规划的形式进行求解。通过一个仿真实例对该方法进行验证。

关键词: 饱和系统; D 稳定; 容错不变集; 双线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Linear Optimal Fault-tolerant Invariant Set for Saturating System

FAN Jin-hua, ZHENG Zhi-qiang, LV Ming

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: To solve the problem of fault-tolerant control for saturating system, a design method was presented to estimate the attraction domain of the saturating system with constraints of D-stability. Based on the volume of the invariant set and the reference set, two sufficient conditions were given to optimize the fault-tolerant invariant set. To solve the BMI resulting from the optimization problems, an algorithm was provided by constructing proper objective functions which incorporate the LMI, and turning the BMI to the nonlinear programming problems. The simulation results verified the effectiveness of the proposed approach.

Key words: saturating system; D-stability; fault-tolerant invariant set; bilinear matrix inequality(BMI)

经过 30 多年的发展, 关于容错控制的研究工作取得了重大进展^[1]。由于任何系统都存在发生故障的可能性, 所以容错控制是动态系统可靠性的重要保证。但是, 目前对于容错控制的研究基本上未考虑执行器饱和和约束的影响, 而实际的机电控制系统只能提供有限的力、力矩、电压、电流等。尽管可以通过让控制量远离饱和和极限值来避免执行器饱和, 以免造成系统性能下降甚至不稳定, 但这往往限制了系统性能需求, 并要付出较大的代价, 比如飞行器舵机尺寸增大会导致总重上升而增加油耗。在容错控制系统的设计中如何处理执行器的饱和约束, 是容错控制的一个挑战性问题^[2]。

工业界早在 20 世纪 40 年代就开始正视执行器的饱和问题。自从第一种抗饱和方法诞生以来, 对抗饱和技术的研究取得了很多成果^[3]。由于有界控制下闭环系统一般只是局部稳定的, 因此, 对饱和系统吸引域的估计是饱和问题的一个重要研究方向。设计饱和系统的控制器时, 不仅要满足一定的性能指标, 而且还要使闭环系统的吸引域尽可能大。闭环系统的吸引域一般用椭圆或多面体不变集去逼近^[4]。但是目前对饱和系统吸引域的研究很少考虑系统发生故障的情况。当系统发生故障时, 在原来预定的控制作用下吸引域很可能已经发生变化, 系统的性能得不到保证。因此, 研究系统发生故障情况下的吸引域估计问题有重要意义。

为保证系统在故障情况下的动态和稳态性能, 本文将结合区域极点配置方法^[5], 探索饱和系统的容错控制问题, 并提出一种设计状态反馈控制律的方法。在该状态反馈作用下, 闭环系统的线性容错不变集是最优的。对于所构造的优化问题, 状态反馈矩阵需要通过求解一个 BMI 问题而得到, 目前还没有通用求解的方法。本文采用 LMI 和非线性规划相结合的方式, 提出了一种求解方法, 并给出仿真实例

^{*} 收稿日期: 2010- 04- 11

基金项目: 国家部委资助项目

作者简介: 范金华(1983 -), 男, 博士生。

进行验证。

1 问题描述

考虑一个含有执行器故障模式的饱和线性系统:

$$\dot{x} = Ax + B\Phi_i \text{sat}(u) \quad (1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制向量, 饱和函数 $\text{sat}(u) = [\text{sat}(u_1), \text{sat}(u_2), \dots, \text{sat}(u_m)]^T$, $|u_i| \leq c_i, \text{sat}(u_i) = \text{sgn}(u_i) \cdot \min\{c_i, |u_i|\}$ 。 $\Phi = \{\Phi_i\}$ 是可能的故障模式集, Φ_i 是对角矩阵, 其对角线上的元素为 1 或 0, 分别表示执行器正常或故障。

定义 1 如果系统 (1) 的极点位于左半复平面的圆形区域 l_s 内, 则称系统是 D 稳定的。圆心位于点 $(-v + j0)$, 半径为 r 的 l_s 可以表示为

$$l_s \triangleq \{s = \sigma + j\omega \mid (\sigma + v)^2 + \omega^2 \leq r^2\} \quad (2)$$

定义 2 Ω 是个包含平衡点的状态空间, 如果从 Ω 出发的任意初始状态, 都能收敛于平衡点, 而不论在状态转移过程中发生 Φ 内的何种故障, 则称 Ω 是个容错吸引域。 Ω 可以表示为

$$\Omega = \left\{x(0) \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \forall \Phi_i(t) \in \Phi, t > 0\right\} \quad (3)$$

定义 3 在定义 2 的基础上, 如果 $x(t)$ 都位于 Ω 内, 则称 Ω 是容错不变集, 记为 Ω_0 。 Ω_0 可以表示为

$$\Omega_0 = \left\{x(0) \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \forall \Phi_i(t) \in \Phi, t > 0, x(t) \in \Omega_0\right\} \quad (4)$$

假设 $(A, B\Phi_i)$ 可控, 系统设计的目标是求解状态反馈控制律 $u = Fx$, 使得闭环系统在线性域 $L(F)$ 内具有最大的容错不变集 Ω_0 , 并且在 Ω_0 内闭环系统是 D 稳定的。 $L(F)$ 定义为

$$L(F) \triangleq \{x \mid |f_i^T x| \leq c_i, i = 1, 2, \dots, m\} \quad (5)$$

其中 f_i^T 为 F 的第 i 行。当状态位于 $L(F)$ 内时, 执行器不会饱和。另一方面, 在线性域内便于刻画不变集。

2 线性最优容错不变集

在系统与控制领域应用最多的不变集是椭圆不变集。本文主要应用椭圆不变集去逼近系统的容错吸引域。

定理 1 位于线性域内的椭圆 $\Omega(P) = \{x \mid x^T P x < 1, P > 0\}$ 是容错不变集, 当

$$\begin{bmatrix} A + B\Phi_i F \\ A + B\Phi_i F \end{bmatrix}^T P + P \begin{bmatrix} A + B\Phi_i F \\ A + B\Phi_i F \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

证明: 令 $V(x) = x^T P x$, 则 $\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$ 。在线性域内闭环系统方程为 $\dot{x} = (A + B\Phi_i F)x$, 代入上式, 得 $\dot{V}(x) = x^T [(A + B\Phi_i F)^T P + P(A + B\Phi_i F)]x$ 。则当 $(A + B\Phi_i F)^T P + P(A + B\Phi_i F) < 0$ 时, $\dot{V}(x) < 0$, 即 $V(x) = x^T P x$ 是递减的, 因此, 后续状态都满足 $x^T P x < 1$, 则椭圆 $\Omega(P)$ 是容错不变集。 $\square$

为保证在容错不变集 $\Omega(P)$ 内闭环系统是 D 稳定的, 可以借助以下引理。

引理 1^[6] 系统 $\dot{x} = Ax$ 是 D 稳定的, 当且仅当对于任意给定的正定矩阵 Q , 存在正定矩阵 P 满足下式:

$$vA^T P + vPA + A^T P A + (v^2 - r^2)P = -Q \quad (7)$$

定理 2 在容错不变集 $\Omega(P)$ 内闭环系统式 (1) 是 D 稳定的, 当且仅当存在正定矩阵 P_i 满足以下不等式:

$$v(A + B\Phi_i F)^T P_i + vP_i(A + B\Phi_i F) + (A + B\Phi_i F)^T P_i(A + B\Phi_i F) + (v^2 - r^2)P_i < 0 \quad (8)$$

证明: 在容错不变集 $\Omega(P)$ 内闭环系统方程为 $\dot{x} = (A + B\Phi_i F)x$, 则由引理 1, 要使闭环系统 D 稳定, 只需对于任意给定的正定矩阵 Q , 存在正定矩阵 P_i 满足下式:

$$v(A + B\Phi_i F)^T P_i + vP_i(A + B\Phi_i F) + (A + B\Phi_i F)^T P_i(A + B\Phi_i F) + (v^2 - r^2)P_i = -Q \quad (9)$$

由于式(9)意味着等式左边是负定的,因此,式(9)与式(8)等价。□

保证了容错不变集 $\Omega(P)$ 内系统的 D 稳定后,下一步的设计目标是使 $\Omega(P)$ 最大化。一种直观的方法是以 $\Omega(P)$ 的容量为优化目标^[7],另一种方法通过包含在 $\Omega(P)$ 内参考集的缩放来实现^[8]。但是无论采用哪种优化方法, $\Omega(P)$ 位于 $L(F)$ 内是必须满足的。要满足这个约束,当且仅当:

$$\max_{x \in \Omega(P)} |f_i^T x| \leq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

由于 $\max_{x \in \Omega(P)} |f_i^T x| = \sqrt{f_i^T P^{-1} f_i}$, 则上式等价于

$$f_i^T P^{-1} f_i \leq c_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

由舒尔补,进一步可得

$$\begin{bmatrix} c_i^2 & f_i^T \\ f_i & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

综上所述,当以容错不变集 $\Omega(P)$ 的容量为优化目标时,通过求解以下优化问题可以使 $\Omega(P)$ 最大化。当优化问题有解时,称 $\Omega(P)$ 是最优的。

定理 3 $\Omega(P)$ 是线性最优容错不变集,当存在正定矩阵 P_i 使得以下优化问题有解:

$$\min_{P > 0, F} g \quad (13)$$

$$\text{s. t.} \quad (6), (8), (12) \text{ 式}$$

其中 $g = -\det P^{-1}$ 。

注:式(6)和(12)保证 $\Omega(P)$ 是线性容错不变集,即位于线性域 $L(F)$ 内的容错不变集,而式(8)则保证了 $\Omega(P)$ 内闭环系统的 D 稳定性。

当通过参考集的缩放来实现 $\Omega(P)$ 的优化时,只需适当地选取参考集,然后最大化该参考集即可。参考集一般是个有界凸集,可以采用椭圆或多面体的形式。记椭圆参考集为 $\Omega(R) = \{x | x^T R x < 1, R > 0\}$, 则其缩放形式可以定义为 $\alpha\Omega(R) \triangleq \{x | x \in \Omega(R)\}$ 。

由于 $\alpha\Omega(R) = \left\{ \alpha x | \left(\frac{1}{\alpha} x \right)^T \left(\frac{1}{\alpha^2} R \right) \left(\frac{1}{\alpha} x \right) < 1 \right\}$, 则 $\alpha\Omega(R) \subset \Omega(P)$ 的充要条件是

$$P \leq \gamma R \quad (14)$$

其中 $\gamma \triangleq 1/\alpha^2$ 。则当通过 $\alpha\Omega(R)$ 的最大化来实现 $\Omega(P)$ 的优化时,只需求解以下优化问题。

定理 4 $\Omega(P)$ 是线性最优容错不变集,当存在正定矩阵 P_i 使得以下优化问题有解:

$$\min_{P > 0, F} \gamma \quad (15)$$

$$\text{s. t.} \quad (6), (8), (12), (14) \text{ 式}$$

关于式(13)和(15)的求解,由于约束(6)含有决策变量的乘积项,因此,它是个 BMI 问题。另一方面,由于约束(8)的存在,很难将此 BMI 问题转化为 LMI 问题进行求解,而 BMI 问题又没有通用的求解方法,因此,需要寻找其他可行的求解方法。

根据问题的特定性质,由于约束(8)的满足只需判断对于某个特定的状态反馈矩阵 F 是否存在正定矩阵 P_i ,而对于这个给定的矩阵 F ,剩下的问题是个 LMI 问题,因此,可以结合目前较为成熟的非线性规划进行求解,主要的难点在于目标函数的构造。

对于某个满足约束(8)的矩阵 F ,当存在 P 时,总可以得到式(13)和(15)中的目标值。因此,当采用非线性规划求解式(13)和(15)时,可以分别构造目标函数 $f_g(F)$ 和 $f_\gamma(F)$,它们的定义如下:

$$f_g(F) = \min_{P > 0, (6), (12)} g \quad (16)$$

$$f_\gamma(F) = \min_{P > 0, (6), (12), (14)} \gamma \quad (17)$$

正定矩阵 P_i 的存在性在计算目标函数值的过程中进行判断。在计算目标函数值的过程中有可能出现无解的情况,说明此 F 是不可行的。在矩阵空间搜索 F 以使目标函数极小时,只有当 P_i 和 P 都存在时,此 F 才是可行的。用无约束非线性规划求解该 BMI 问题的一般性算法如图 1 所示。

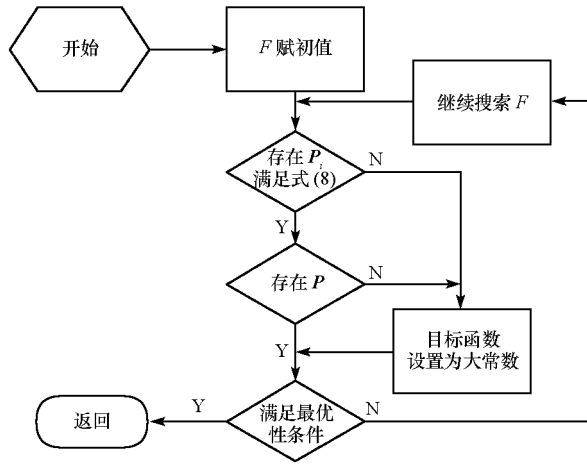


图 1 算法流程图

Fig. 1 Flow chart of the algorithm

3 仿真实例

以 F-18 超机动飞机侧向运动的线性近似动态为例^[9]。在马赫数为 0.6, 高度为 9144m, 配平攻角为 5.2° 下, 当假设飞行的推力矢量角保持在零位时, 飞机的运动方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.112 & 0.094 & -0.995 \\ -10.2 & -1.17 & 0.432 \\ 2.20 & -0.010 & -0.106 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.009 & -0.005 & 0.013 \\ 9.02 & 11.06 & 0.842 \\ 0.296 & -0.264 & -0.684 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{dr} \\ \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中状态变量 β 、 r 和 q 分别为侧滑角 $(^\circ)$ 、滚转角速率 $(^\circ)/s$ 和偏航角速率 $(^\circ)/s$, 控制量 δ_{dr} 、 δ_a 和 δ_r 分别为差分平尾偏转角 $(^\circ)$ 、副翼偏转角 $(^\circ)$ 和方向舵偏角 $(^\circ)$ 。各控制量的幅值约束如下:

$$\begin{bmatrix} -17.25^\circ \\ -35^\circ \\ -30^\circ \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \delta_{dr} \\ \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 17.25^\circ \\ 35^\circ \\ 30^\circ \end{bmatrix} \quad (19)$$

假设可能发生故障的执行器为差分平尾或副翼, 则可定义系统的故障模式集为 $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$, 其中 $\varphi_0 = \text{diag}(1, 1, 1)$, $\varphi_1 = \text{diag}(0, 1, 1)$, $\varphi_2 = \text{diag}(1, 0, 1)$ 。

由于状态反馈矩阵 F 的可行域未知, 因此, 为求得该系统的线性最优容错不变集, 可采用遗传算法等全局搜索方法进行求解。根据性能指标要求, 设圆形极点配置区域 l_s 的相关参数为 $v = r = 15$ 。以通过参考集的缩放来实现 $\Omega(P)$ 的优化为例, 借助 Matlab 中的遗传算法工具箱, 状态反馈矩阵 F 采用并矢结构 $F = -f \cdot k^T$, 其中给定 $f = [1 \ 2 \ 3]^T$, k 为反馈增益向量。则可得一组优化解: $F =$

$$\begin{bmatrix} -0.0862 & -0.0153 & -0.0196 \\ -0.1724 & -0.0305 & -0.0393 \\ -0.2585 & -0.0458 & -0.0589 \end{bmatrix}, \gamma = 0.0745。在此优化解下, 各种故障模式下闭环系统的极点为$$

$$\begin{aligned} \lambda(A + B\varphi_0 F) &= \{-14.1911, -0.5708 \pm 1.4941j\} \\ \lambda(A + B\varphi_1 F) &= \{-11.6004, -0.6344 \pm 1.4711j\} \\ \lambda(A + B\varphi_2 F) &= \{-1.2850, -1.3079 \pm 1.9978j\} \end{aligned} \quad (20)$$

可见, 在各种故障模式下闭环系统都是 D 稳定的。根据优化结果, 可以画出 $\Omega(P)$ 、 $\alpha\Omega(R)$ 和 $L(F)$ 的图形如图 2 所示。

为进一步体现本文的创新性工作, 下面将给出不考虑执行器故障时饱和系统的不变集。此时, 相当于故障模式集为 $\Phi = \{\varphi_0\}$, 可得一组优化解: $F_1 = \begin{bmatrix} -0.0163 & -0.0134 & -0.0361 \\ -0.0326 & -0.0268 & -0.0723 \\ -0.0489 & -0.0401 & -0.1084 \end{bmatrix}, \gamma_1 = 0.0165。F_1$

作用下系统的不变集如图 3 中的大椭圆所示。

取吸引域内的一个初始状态 $x_0 = [-7.707 \quad 46.04 \quad -3.636]'$, 并假设在 $t = 1\text{s}$ 时副翼卡死在零位, 则在状态反馈的作用下, 系统的状态响应如图 4 所示。图中 s_1 和 s_2 分别表示 F 和 F_1 作用下系统的状态响应。由图可见, 在 F_1 的作用下, 当副翼失效时, 系统的动态性能会变差。因此, 虽然考虑执行器故障时估计出的不变集有所减小, 但闭环系统在故障下的性能能够得到保证。

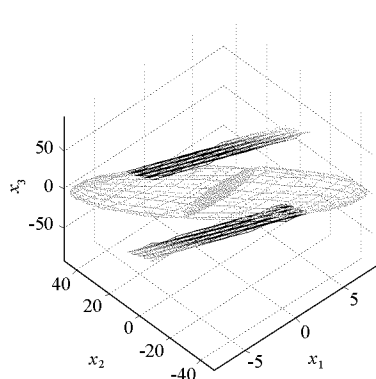


图 2 线性容错不变集

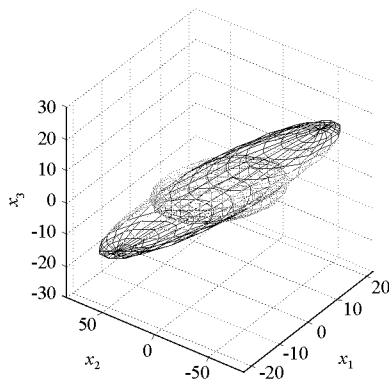


图 3 不变集对比

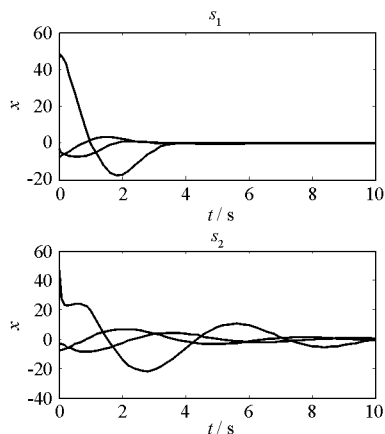


图 4 状态响应对比

Fig. 2 Linear fault-tolerant invariant set Fig. 3 Comparison of the invariant set Fig. 4 Comparison of the state response

4 结论

本文探讨了含执行器故障的饱和系统在 D 稳定约束下的吸引域估计问题。文中提出的容错不变集的两优化方法能有效估计系统吸引域。将 BMI 问题转化为非线性规划问题有效克服了 BMI 问题求解的困难性。但是, 应该指出, 文中虽然利用遗传算法求解该类非线性规划得到一组优化解, 但不能保证它就是目标函数的最小值。这也是值得进一步研究的方向。

参考文献:

- [1] Zhang Y, Jiang J. Bibliographical Review on Reconfigurable Fault-tolerant Control Systems[J]. Annual Reviews in Control, 2008, 32: 229–252.
- [2] Jiang J. Fault-tolerant Control Systems—an Introductory Overview[J]. ACTA Automatica SINICA, 2005, 31(1): 161–174.
- [3] Tarbouriech S, Tumer M. Anti-windup Design: An Overview of Some Recent Advances and Open Problems[J]. Control Theory & Applications, IET, 2009, 3(1): 1–19.
- [4] Blanchini F. Set Invariance in Control[J]. Automatica, 1999, 35(11): 1747–1767.
- [5] 刘满, 井元伟, 张嗣瀛. 区域极点配置问题的研究方法[J]. 控制与决策, 2005, 20(3): 241–245.
- [6] Furuta K, Kim S. Pole Assignment in a Specified Disk[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1987, 32(5): 423–427.
- [7] Boyd S, Chaoui L E, Feron E, et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory[M]. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [8] Hu T, Lin Z. On Enlarging the Basin of Attraction for Linear Systems Under Saturated Linear Feedback[C]//Proceedings of the American Control Conference. Chicago, Illinois, 2000: 1766–1770.
- [9] Adams R J, Buffington J M, Sparks A G, et al. Robust Multivariable Flight Control[M]. Advances in Industrial Control, London: Springer-verlag, 1994.