

文章编号: 1001-2486(2011)01-0087-04

OFDM 系统非数据辅助采样频率偏差估计的 Cramér-Rao 界*

胡登鹏, 石 峰, 张尔扬

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:研究了 OFDM 系统中非数据辅助采样频率偏差估计性能的衡量问题, 推导了其 Cramér-Rao 界 (CRB)。根据中心极限定理, 对接收信号中的子载波间干扰进行近似, 推导了在未知调制信息时接收信号的概率密度; 根据 CRB 的定义, 对非数据辅助采样频率偏差估计的 CRB 进行了推导; 通过蒙特卡罗积分的方法得到了在不同 OFDM 基带调制方式、不同采样频率偏差及不同系统子载波数时的非数据辅助采样频率偏差估计的 CRB。

关键词: 正交频分复用; 采样频率偏差; 非数据辅助; Cramér-Rao 界

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A

Cramér-Rao Bound of Non-data-aided Sampling Frequency Offset Estimation in OFDM Systems

HU Deng-peng, SHI Feng, ZHANG Er-yang

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: To solve the problem of Non-Data-Aided (NDA) sampling frequency synchronization for orthogonal frequency division multiplex (OFDM) systems, the CRB (Cramér-Rao Bound) of NDA sampling frequency synchronization algorithm was proposed. At first, the Probability Distribution Function (PDF) of received signal was deduced. Then, the CRB of NDA sampling frequency synchronization for OFDM systems was deduced according to its definition. At last, the CRB of NDA sampling frequency synchronization for OFDM systems in different modulation, sampling frequency offset and subcarrier number was presented.

Key words: orthogonal frequency division multiplexing; sampling frequency offset; non-data-aided; Cramér-Rao bound

以正交频分复用 (OFDM) 为代表的多载波技术已经成功应用于数字广播、数字用户线、无线接入网、卫星通信、电力线通信等领域, 是下一代无线通信系统的关键技术之一^[1]。然而, 由于收发两端的晶振不可能完全匹配, 因而在收发两端不可避免地存在采样频率偏差。这种偏差将影响 OFDM 系统子载波间的正交性, 从而产生邻道干扰 (ICI)^[2]。所以接收端必须对采样频率偏差进行估计。目前的采样频率估计算法主要分为: 数据辅助法 (DA)^[3-8] 和非数据辅助法 (NDA)^[9-11]。数据辅助法通过设计具有特殊结构的导频序列, 在接收端利用导频信号的特殊结构对采样时钟进行估计。一般情况下, 这类方法较为简单, 实现较为容易。由于大多数数据辅助法都是在频域对采样频率偏差进行估计, 故其需要先进行 OFDM 符号同步和载波同步。相对于数据辅助法来说, 非数据辅助法的研究较少。其通过从信号本身提取

信息, 对采样频率偏差进行估计, 所以这类方法大多比较复杂, 且估计精度一般情况下不如前者。

对于算法估计性能的衡量方法主要有两种: 一是与其它同类算法进行比较, 二是与这种估计方法的理论界进行比较。与其它同类算法比较是一种定性的性能衡量方法, 无法为系统的指标设计给出具体的参考, 而理论界是参数估计的最佳结果, 可为系统指标设计提供参考。CRB 是目前最常用的对参数估计性能进行定量衡量的参考下限^[3]。在对 OFDM 系统参数估计 CRB 的研究文献中, 对于采样频率偏差估计 CRB 研究得较少, 对于非数据辅助的采样频率偏差估计 CRB 的研究文献更是未见。在 OFDM 系统采样频率偏差估计 CRB 的研究中, 文献^[3]给出了 OFDM 系统联合采样频率偏差及信道估计的 CRB, 其通过求得 fisher 信息矩阵, 对其求逆从而得到 CRB, 不足之处就是其未考虑非数据辅助的情况。

* 收稿日期: 2010-03-01

作者简介: 胡登鹏 (1982—), 男, 博士生。

1 信号模型

在接收端,经过FFT变换后,OFDM系统的第 m 个符号的第 l 个子载波的信号可表示为^[3]

$$R_{m,l} = d_{m,l} H_l I_l^k + \sum_{k=0, k \neq l}^{N-1} d_{m,k} H_k I_l^k + \Omega_{m,l} \quad (1)$$

其中 N 为OFDM系统的子载波个数, $d_{m,k}$ 为第 k 个子载波上传输的数据, $\Omega_{m,l}$ 为零均值且方差为 σ^2 的复高斯白噪声,则信号的信噪比 $E_s/N_0 = 1/2\sigma^2$,设信道系数为 $\bar{\mathbf{h}} = (h_0, h_1, \dots, h_{J-1})^T$, $\bar{\mathbf{H}} = (H_0, H_1, \dots, H_{N-1}) = \mathbf{F}_J \bar{\mathbf{h}}$ 为信道的频域响应, \mathbf{F}_J 为傅里叶变换矩阵的前 J 列,定义为 $\mathbf{F}_J[l, k] = \exp[-j2\pi lk/N]$, $0 \leq l \leq J-1, 0 \leq k \leq N-1$ 。

I_l^k 的表示式为

$$\begin{aligned} I_l^k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left\{j\left[\frac{2\pi k(n+\eta)(1+\epsilon_s)}{N} - \frac{2\pi nl}{N}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left\{j\left[\frac{2\pi}{N}[n(k(1+\epsilon_s) - l) + k\eta(1+\epsilon_s)]\right]\right\} \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $0 \leq l, k \leq N-1, \epsilon_s = (f_s - f'_s)/f'_s$ 为归一化的采样频率偏差, f_s 和 f'_s 分别为发射端及接收端采样频率, η 为采样时钟相位偏差,且 $-0.5 \leq \eta < 0.5$ 。

当采样频率偏差 $\epsilon_s = 0$ 时,(1)式变为

$$R_{m,l} = \frac{1}{\sqrt{N}} H_l d_{m,l} \exp\left\{j\frac{2\pi l \eta}{N}\right\} + \Omega_{m,l} \quad (3)$$

采样时钟相位偏差 η 使子载波输出的相位发生了旋转,但未产生子载波间的ICI,且不会带来信噪比的损失,可以通过信道均衡将其消除,本文只考虑采样频率偏差估计的问题,故假设(2)式中采样时钟相位偏差 η 完全被消除,即

$$I_l^k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left\{j\left[\frac{2\pi}{N}[n(k(1+\epsilon_s) - l)]\right]\right\} \quad (4)$$

2 Cramér-Rao 界

在瑞利频率选择性衰落信道下,设信道系数 $\bar{\mathbf{h}} = (h_0, h_1, \dots, h_{J-1})^T$ 为均值为零、方差为 σ_i^2 ($0 \leq l \leq J-1$)的复高斯随机变量,且 $\sigma_h^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \dots + \sigma_{J-1}^2$ 。则可得

$$E[\bar{\mathbf{H}}] = E[\mathbf{F}_J \bar{\mathbf{h}}] = \mathbf{0}_N \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E[\bar{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{H}})^H] &= E[\mathbf{F}_J \bar{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{h}})^H \mathbf{F}_J^H] = \mathbf{F}_J \sigma_h^2 \mathbf{F}_J^H \\ &= \sum_{j=0}^{J-1} \sigma_{h_j}^2 \mathbf{I}_N = \sigma_h^2 \mathbf{I}_N \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{0}_N$ 表示长为 N 的零矢量, \mathbf{I}_N 表示 $(N \times N)$

维的单位矩阵, \mathbf{A}^H 表示求 \mathbf{A} 的共轭转置。

(1)式右边第一项为对应子载波的有效信号,第二项为由采样频率偏差引起的子载波间干扰,第三项为信道噪声。根据中心极限定理,可认为第二项服从零均值的高斯分布。设 $d_{m,0}, \dots, d_{m,N-1}$ 之间相互独立同分布,则可得

$$\begin{aligned} \sigma_{i,l}^2 &= E\left[\left(\sum_{k=0, k \neq l}^{N-1} d_{m,k} H_k I_l^k\right)\left(\sum_{k=0, k \neq l}^{N-1} d_{m,k} H_k I_l^k\right)^*\right] \\ &= E\left[|d_{m,k}|^2 |H_k|^2\right] \sum_{k=0, k \neq l}^{N-1} |I_l^k|^2 \\ &= \sigma_d^2 \sigma_h^2 \sum_{k=0, k \neq l}^{N-1} |I_l^k|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $|x|^2 = \mathcal{R}^2(x) + \mathcal{I}^2(x)$, $\mathcal{R}(x)$ 和 $\mathcal{I}(x)$ 分别为 x 的实部和虚部。

由(7)式可以看出,当 σ_d^2 一定时,(1)式右边第二项的方差 $\sigma_{i,l}^2$ 与OFDM系统信道系数和采样频率偏差有关。由于第二项和第三项对于有用信号第一项来说都为干扰,故可将(1)式改写为

$$R_{m,l} = d_{m,l} H_l I_l^k + Z_{m,l} \quad (8)$$

其中 $Z_{m,l}$ 的均值为零,方差为 $\sigma_z^2 = \sigma_{i,l}^2 + \sigma^2$ 。

$R_{m,l}$ 的均值和方差分别为

$$\mu_{m,l} = E(R_{m,l}) = d_{m,l} H_l I_l^k \quad (9)$$

$$\text{var}(R_{m,l}) = \sigma_z^2 = \sigma_{i,l}^2 + \sigma^2 \quad (10)$$

设 $p(d_i) = p(d_{m,0}) = \dots = p(d_{m,N-1})$,则 $R_{m,l}$ 在 $\bar{\mathbf{H}}$ 和 ϵ_s 下的条件概率密度函数为^[12]

$$\begin{aligned} p(R_{m,l} | \bar{\mathbf{H}}, \epsilon_s) &= \sum_{d_{m,l} \in C} p(R_{m,l} | d_{m,l}, \bar{\mathbf{H}}, \epsilon_s) p(d_{m,l}) \\ &= \frac{p(d_i)}{2\pi\sigma_z^2} \sum_{d_i \in C} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_z^2} |R_{m,l} - \mu_l|^2\right] \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\mu_l = d_i H_l I_l^k$ 。设观测 M 个OFDM符号 $\bar{\mathbf{R}}_M$,则估计 ϵ_s 的CRB为^[12]

$$\text{CRB}(\epsilon_s) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\bar{\mathbf{R}}_M | \epsilon_s)}{\partial \epsilon_s^2}\right]^{-1} \quad (12)$$

由于各观测信号值之间相互独立且同分布,则由(11)式, $\bar{\mathbf{R}}_M$ 在 ϵ_s 下的条件联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\bar{\mathbf{R}}_M | \epsilon_s) &= \prod_{\substack{0 \leq m \leq M-1 \\ 0 \leq l \leq N-1}} p(R_{m,l} | \epsilon_s) \\ &= \left(\frac{p(d_i)}{2\pi\sigma_z^2}\right)^{MN} \prod_{\substack{0 \leq m \leq M-1 \\ 0 \leq l \leq N-1}} \sum_{d_i \in C} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_z^2} |R_{m,l} - \mu_l|^2\right] \end{aligned} \quad (13)$$

其对数似然函数为

$$\ln p(\bar{\mathbf{R}}_M | \epsilon_s) = MN \ln \frac{p(d_i)}{2\pi\sigma_z^2} + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1}$$

$$\ln \left\{ \sum_{d_l \in C} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_z^2} |R_{m,l} - \mu_l|^2 \right] \right\} \quad (14)$$

其关于 ϵ_s 的一阶和二阶导数分别为

$$\frac{\partial \ln p(\bar{\mathbf{R}}_M | \epsilon_s)}{\partial \epsilon_s} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ \sum_{d_l \in C} \left(-\frac{1}{2\sigma_z^2} \frac{\partial |R_{m,l} - \mu_l|^2}{\partial \epsilon_s} \right) \exp \left[-\frac{|R_{m,l} - \mu_l|^2}{2\sigma_z^2} \right] \right\} \left\{ \sum_{d_l \in C} \exp \left[-\frac{|R_{m,l} - \mu_l|^2}{2\sigma_z^2} \right] \right\}^{-1} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln p(\bar{\mathbf{R}}_M | \epsilon_s)}{\partial \epsilon_s^2} &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left\{ -\left\{ \sum_{d_l \in C} \left(-\frac{1}{2\sigma_z^2} \frac{\partial |R_{m,l} - \mu_l|^2}{\partial \epsilon_s} \right) \exp \left[-\frac{|R_{m,l} - \mu_l|^2}{2\sigma_z^2} \right] \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \sum_{d_l \in C} \exp \left[-\frac{|R_{m,l} - \mu_l|^2}{2\sigma_z^2} \right] \right\}^{-2} + \left\{ \sum_{d_l \in C} \left[\left(\frac{1}{2\sigma_z^2} \frac{\partial |R_{m,l} - \mu_l|^2}{\partial \epsilon_s} \right)^2 - \frac{1}{2\sigma_z^2} \frac{\partial^2 |R_{m,l} - \mu_l|^2}{\partial \epsilon_s^2} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \exp \left[-\frac{|R_{m,l} - \mu_l|^2}{2\sigma_z^2} \right] \right\} \right\} \left\{ \sum_{d_l \in C} \exp \left[-\frac{|R_{m,l} - \mu_l|^2}{2\sigma_z^2} \right] \right\}^{-1} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \Lambda(R_{m,l}) \quad (16) \end{aligned}$$

其中 $\frac{\partial |R_{m,l} - \mu_l|^2}{\partial \epsilon_s} = -2\Re \left[(R_{m,l} - \mu_l) \left(\frac{\partial \mu_l}{\partial \epsilon_s} \right)^* \right]$, $\frac{\partial^2 |R_{m,l} - \mu_l|^2}{\partial \epsilon_s^2} = 2 \cdot$

$$\left\{ \left| \frac{\partial \mu_l}{\partial \epsilon_s} \right|^2 - \Re \left[(R_{m,l} - \mu_l) \left(\frac{\partial^2 \mu_l}{\partial \epsilon_s^2} \right)^* \right] \right\}, \frac{\partial \mu_l}{\partial \epsilon_s} = d_l H_l \frac{\partial I_l'}{\partial \epsilon_s}, \frac{\partial^2 \mu_l}{\partial \epsilon_s^2} = d_l H_l \frac{\partial^2 I_l'}{\partial \epsilon_s^2}, \frac{\partial I_l'}{\partial \epsilon_s} = \frac{j2\pi l}{N^{3/2}} \sum_{n=0}^{N-1} n \exp \left\{ \frac{j2\pi n l \epsilon_s}{N} \right\},$$

$$\frac{\partial^2 I_l'}{\partial \epsilon_s^2} = -\frac{4\pi^2 l^2}{N^{5/2}} \sum_{n=0}^{N-1} n^2 \exp \left\{ \frac{j2\pi n l \epsilon_s}{N} \right\}.$$

由于接收信号之间相互独立且同分布,则可得

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\bar{\mathbf{R}}_M | \epsilon_s)}{\partial \epsilon_s^2} \right] &= E \left[\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \Lambda(R_{m,l}) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \Lambda(R_{m,l}) \right] p(\bar{\mathbf{R}}_M) d|\bar{\mathbf{R}}_M| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \Lambda(R_{m,l}) \right] \cdot \\ &\quad p(R_{0,0}) \cdots p(R_{0,N-1}) p(R_{1,0}) \cdots p(R_{M-1,N-1}) \cdot \\ &\quad d|R_{0,0}| \cdots d|R_{0,N-1}| d|R_{1,0}| \cdots d|R_{M-1,N-1}| \quad (17) \end{aligned}$$

其中 $d|x| = d\Re(x) d\Im(x)$, 表示求 $|x|$ 的微分, 由于 $\Lambda(R_{0,0})$ 只与 $R_{0,0}$ 有关, 且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p(R_{0,1}) \cdots p(R_{0,N-1}) p(R_{1,0}) \cdots p(R_{M-1,N-1}) \cdot d|R_{0,1}| \cdots d|R_{0,N-1}| d|R_{1,0}| \cdots d|R_{M-1,N-1}| = 1 \quad (18)$$

则(17)式为

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\bar{\mathbf{R}}_M | \epsilon_s)}{\partial \epsilon_s^2} \right] &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} E[\Lambda(R_{m,l})] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(R_{m,l}) p(R_{m,l}) d|R_{m,l}| \quad (19) \end{aligned}$$

由(2)式可知, I_l^k 不仅与 $k-l$ 的大小有关, 而且还与子载波序号 k 和 l 分别有关, 即采样频率偏差对一个符号内的不同子载波的影响不同, 而对于不同符号的相同子载波影响相同, 则(19)式可写为

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\bar{\mathbf{R}}_M | \epsilon_s)}{\partial \epsilon_s^2} \right] = M \sum_{l=0}^{N-1} E[\Lambda(R_l)] \quad (20)$$

其中 R_l 为与 $R_{m,l}$ 同分布的随机变量。

可得已知信道系数时估计采样频率偏差 ϵ_s 的 CRB 为

$$\text{CRB}(\epsilon_s) = - \left[M \sum_{l=0}^{N-1} E[\Lambda(R_l)] \right]^{-1} \quad (21)$$

由此可知, 求 CRB 的关键在于求 $E[\Lambda(R_l)]$, 由于直接通过求积分得到 $E[\Lambda(R_l)]$ 基本不可能, 因此同文献[12-15]一样, 本文也采用蒙特卡罗积分来计算 $E[\Lambda(R_l)]$, 从而得到 CRB。

3 计算结果

如未特别说明, 计算时采用的 OFDM 符号个数 $M=1$, 基带调制方式为 QPSK, 子载波数为 64, OFDM 基带调制信号的方差 σ_d^2 及信道系数的频率响应的方差 σ_h^2 均为 1, 采用信道为瑞利频率选择性衰落(RFSF)信道, 采样频率偏差 $\epsilon_s = 10^{-4}$ 。

图 1 为不同 OFDM 基带调制方式时非数据辅助采样频率偏差(NDA SFO)估计的 CRB, 图 2 为

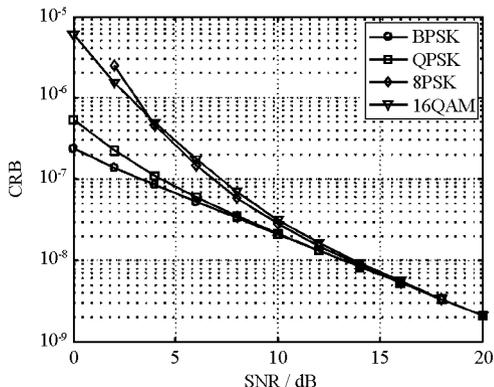


图 1 不同基带调制方式时 NDA SFO 估计的 CRB
Fig.1 The CRB of NDA sampling frequency synchronization of OFDM system in different modulation

不同采样率偏差时 NDA SFO 估计的 CRB。可以看出,对于不同调制方式来说,当信噪比较低时,估计 8PSK 和 16QAM 调制时的 OFDM 信号的采样频率偏差的 CRB 较 BPSK 和 QPSK 调制时大,即调制样式在低信噪比时对采样频率偏差的影响较大。对于不同的采样频率偏差来说,在信噪比较大时,CRB 随采样频率偏差变大而变大,但总体来说,采样频率偏差的大小对 CRB 的影响不大。

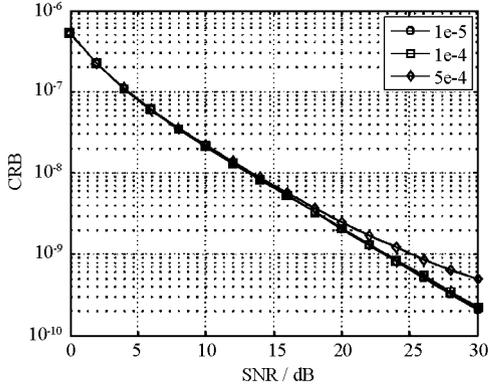


图2 不同采样频率偏差时 NDA SFO 估计的 CRB
Fig.2 The CRB of NDA sampling frequency synchronization of OFDM system in different SFO

图3为不同 OFDM 子载波数时 NDA SFO 估计的 CRB,可以看出,当子载波数越大,估计的 CRB 越小,即 CRB 随系统子载波变大而变小。

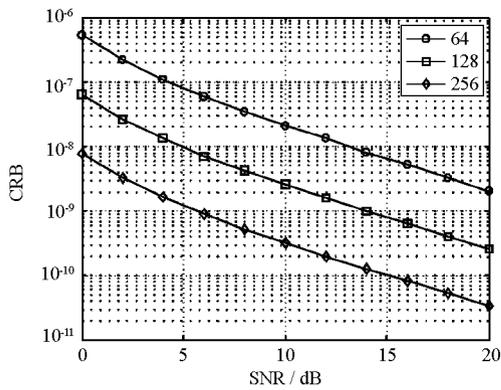


图3 不同子载波数时 NDA SFO 估计的 CRB
Fig.2 The CRB of NDA sampling frequency synchronization of OFDM system in different subcarrier number

4 结论

通过对接收信号中的子载波间干扰进行近似,得到了非数据辅助下存在采样频率偏差时接收信号的概率密度函数,进而得到了最大似然估计下的似然函数。根据 CRB 的定义,通过求似然函数关于采样频率偏差的二阶导数,得到了 OFDM 系统中非数据辅助采样频率偏差估计算法

的 CRB。其不仅解决了当前 OFDM 系统非数据辅助采样频率估计算法性能的衡量问题,也为 OFDM 系统的工程设计提供了参考。

参考文献:

- [1] 尹和川,罗涛,乐光新.多载波无线宽带技术[M].北京:北京邮电大学出版社.2004.
- [2] Pollet T, Peeters M. Synchronization with DMT Modulation[J]. IEEE Communications Magazine, 1999, 37(4): 80 - 86.
- [3] Gault S, Hachem W, et al. Joint Sampling Clock Offset and Channel Estimation for OFDM Signals: Cramér-Rao Bound and Algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(5): 1875 - 1885.
- [4] Ma Z Q, Cui W, Gong X, et al. An Improved Sampling Frequency Synchronous Algorithm for OFDM System[C]//ICSP2008, 2008, 1796 - 1799.
- [5] Lei W, Cheng W, Sun L, et al. Improved Joint Carrier and Sampling Frequency Offset Estimation Scheme for OFDM Systems[C]//GLOBECOM, 2003: 2315 - 2319.
- [6] Fechtel S A. OFDM Carrier and Sampling Frequency Synchronization and its Performance on Stationary and Mobile Channels [J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2000, 46(3):438 - 4341.
- [7] Kim D K, Do S H, et al. A New Joint Algorithm of Symbol Timing Recovery and Sampling Clock Adjustment for OFDM Systems [J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 1998, 44(3): 1142 - 1149.
- [8] Hung N L, Tho L N, et al. RLS-based Joint Estimation and Tracking of Channel Response, Sampling, and Carrier Frequency Offsets for OFDM[J]. IEEE Transactions on Broadcasting, 2009, 55(1):84 - 94.
- [9] Oswald E. NDA Based Feedforward Sampling Frequency Synchronization for OFDM Systems [C]//Proc. of IEEE Conference on Vehicular Technology, Los Angeles, USA: IEEE Press, 2004:1068 - 1072.
- [10] Prabhakar A, Hari K. A Novel Fractional Sampling Offset Estimation in an OFDM System [C]//Proc. of Indicon 2005, Chennai, India: IEEE Press, 2005:336 - 341.
- [11] Laourine A, Stephenne A, Affes S. Blind Sampling Clock Offset Estimation in OFDM Systems Based on Second Order Statistics [C]//Proc. of 2006 Fortieth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computer, Pacific Grove, USA: IEEE Press, 2006: 1782 - 1785.
- [12] Rice F, Cowley B, et al. Cramér-Rao Lower Bounds for QAM Phase and Frequency Estimation [J]. IEEE Transactions on Communications, 2001, 49(9):1582 - 1591.
- [13] Drake J. Cramer-rao Bounds for MPSK Packets with Random Phase [C]//Fifth International Symposium on Signal Processing and its Applications (ISSPA'99), August 1999:725 - 728.
- [14] Shi Z N, Zhu H D, et al. Markov Chain Monte Carlo Techniques in Iterative Detectors: A Novel Approach Based on Monte Carlo Integration[C]//Globecom 2004, 2004:325 - 329.
- [15] Robert C P, Casella G. Monte Carlo Statistical Methods[M]. Springer Verlag, New York, 1999.