文章编号:1001 - 2486(2011)02 - 0063 - 05

基于一般二元关系的不确定性度量方法研究※

陶午沙[1],滕书华[2],孙即祥[2],李智勇[2]
(1. 总装备部武器装备论证中心,北京 100101; 2. 国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南 长沙 410073)

摘 要:针对一般二元关系,从知识的区分能力角度提出一种带有可调节参数的新的不确定性度量—α熵,给出了其在一般二元关系下的重要性质,指出一般二元关系下的 α 熵是现有多种不确定性度量的扩展,统一了完备和不完备信息系统中知识的不确定性度量。结合知识的 α 熵,给出了一般二元关系下粗糙集的 α 精度和 α 粗糙度的定义,证明了 α 精度、α 粗糙度和知识粒度之间的单调关系。实例表明 α 精度和 α 粗糙度比经典粗糙度度量更精确,且符合人们的认识规律。这些结论发展了粗糙集的不确定测度理论,为信息系统中以一般二元关系为基础的知识获取提供了理论依据。

关键词:粗糙集;熵;不确定性;一般二元关系

中图分类号:TP181　　**文献标识码:**A

Study on Uncertainty Measure Based on General Binary Relation

TAO Wu-sha[1], *TENG Shu-hua*[2], *SUN Ji-xiang*[2], *LI Zhi-yong*[2]
(1. The Research Center, Equipment Demonstration of General Equipment Headquarter, Beijing 100101, China;
2. College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: From the point of that knowledge can be seen as the ability to perform classifications, a new kind of measurement of rough set, based on general binary relations, was presented. It is found that the α entropy and α accuracy increase monotonously while α roughness decreases monotonously as the information granularities become smaller. By means of the α entropy knowledge, definitions of α accuracy and α roughness were derived, and the α accuracy and α roughness are more reasonable and accurate than those obtained in the classical methods. These results develop the theory of uncertainty and provide theoretical basis for knowledge acquisition in information systems based on general binary relation.

Key words: rough set; entropy; uncertainty; general binary relation

不确定性是人工智能的研究热点,也是人工智能的重大前沿课题[1]。作为新的处理不精确、不相容和不完全数据的数学工具,粗糙集理论(Rough Set Theory,RST)是处理不确定性问题的有效方法,不确定性问题及度量是其研究的重要内容。RST 的代数观点通过引入上、下近似运算来描述知识的不确定性,使不确定性的本质含义不易被理解[2]。为此,一些学者从信息论及粒度的观点对其进行了广泛研究[3-5],提出了多种不确定性度量,为完备信息系统的知识获取奠定了理论基础。

在现实生活中,由于数据测量误差、对数据理解或获取条件限制等原因,使得在知识获取时往往面临不完备信息系统,而基于传统等价关系(自反性、对称性、传递性)的 RST 不能直接处理不完备信息系统,极大限制了 RST 向实用化方向发展。于是人们提出了多种能够直接对不完备信息系统进行处理的 RST 扩充模型和方法,如将等价关系放宽为容差关系(自反性、对称性)[6]、非对称相似关系(自反性、传递性)[7]、限制容差关系(自反性、对称性)[8],甚至为一般二元关系[9](一般要求满足自反性),以此为基础重新定义概念的上、下近似运算,极大丰富了 RST 的内涵。在不完备信息系统中,由于等价关系不再成立,而由容差关系、相似关系或限制相容关系确定的相似类是对论域的覆盖而不是划分,导致传统基于等价关系的不确定性度量不再适用。因此,文献[5]研究了相容关系下知识信息量的度量问题,并得到与划分情形相类似的结论。RST 在不完备信息系统中的应用,是将其进一步推向实用的关键之一,而不

※ **收稿日期:**2010 - 09 - 25
基金项目:国家自然科学基金资助项目(40901216)
作者简介:陶午沙(1975—),男,助理研究员,博士。

确定性度量是不完备信息系统知识获取和不确定性信息处理的基础。目前对不完备信息系统的直接处理仍缺乏完备的理论支持,特别是一般二元关系下的不确定性研究还比较匮乏[10]。本文借鉴熵的思想,在一般二元关系下根据知识的区分能力提出了一种新的知识不确定性度量——α 熵,以及粗糙集的不确定性度量——α 精度和 α 粗糙度,证明了 α 熵是等价关系和容差关系下多种不确定性度量的推广, 随知识分辨能力的增强,α 熵和 α 精度单调增加,α 粗糙度单调减小。本文提出的不确定性度量统一和发展了现有多种不确定性度量理论,从信息角度给出了一般二元关系下 RST 本质的合理解释,可用于 RST 的多种扩展模型,为在一般二元关系下知识的获取提供理论依据。

1　现有信息系统中典型的不确定性度量

为讨论方便,下面直接给出现有的完备和不完备信息系统中两种典型的不确定性度量。

完备信息系统 $S=(U,A)$中, $Q,P\subseteq A,U/P=\{P_1,P_2,\cdots,P_m\},U/Q=\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_n\}$,则有以下定义。

定义 1[4]　知识 P 对应的 H 信息熵为

$$H(P)=-\sum_{i=1}^{m}\frac{|P_i|}{|U|}\log_2\frac{|P_i|}{|U|}\tag{1}$$

定义 2[5]　知识 P 对应的 E 信息熵为

$$E(P)=\sum_{i=1}^{m}\frac{|P_i|}{|U|}\left(1-\frac{|P_i|}{|U|}\right)\tag{2}$$

不完备信息系统 $S=(U,A)$中,$P\subseteq A$,令 $U/\mathrm{SIM}(P)=\{S_P(u_1),S_P(u_2),\cdots,S_P(u_{|U|})\}$,则有以下定义:

定义 3[5] **(粒度度量)**　知识 P 的粒度度量为

$$G(P)=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\log_2\frac{|S_P(u_i)|}{|U|}\tag{3}$$

若 $S=(U,A)$是完备的,在等价关系下粒度度量 $G(P)$退化为 H 信息熵。

定义 4[5] **(E' 信息熵)**　知识 P 的 E' 信息熵为

$$E'(P)=\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\left(1-\frac{|S_P(u_i)|}{|U|}\right)\tag{4}$$

若 $S=(U,A)$是完备的,在等价关系下 E' 信息熵退化为 E 信息熵。

2　基于一般二元关系的 α 熵及其性质

RST 认为知识即分类能力,分类能力越强,知识愈丰富。经典 RST 以等价关系为基础,知识表现为等价关系对论域的划分。在不完备信息系统中,等价关系不再成立,由容差关系、相似关系或限制容差关系分成若干个具有某种相似关系的相似类,不再构成对论域的划分而变成覆盖,即各相似类之间可能存在交叠。在一般二元关系下也存在着同样的问题。按照“知识即分类能力”的思想,在一般二元关系下可利用属性区分对象个数多少作为属性区分能力的度量,即论域中任一对象由一般二元关系所构成的分类若包含对象越多,则认为与该对象相似的对象越多,所构成的知识粒度就越大,分辨能力就越弱。基于这种考虑,在一般二元关系下定义知识的不确定度量如下:

定义 5(α 熵)　信息系统 $S=(U,A)$中,$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_{|U|}\}$,$P\subseteq A$,GBR(General Binary Relation)为一般二元关系(具有自反性),$U/\mathrm{GBR}(P)=\{B_P(u_1),B_P(u_2),\cdots,B_P(u_{|U|})\}$表示分类,其中 $B_P(u_i)=\{u_j\in U\,|\,(u_i,u_j)\in \mathrm{GBR}(P)\}$为一般二元关系下与 u_i 不可区分对象的最大集合,不确定性度量 α 熵定义为

$$H^{\alpha}(P)=(1-2^{\alpha-1})^{-1}\left[\frac{1}{|U|^{\alpha}}\sum_{i=1}^{|U|}|B_P(u_i)|^{\alpha-1}-1\right]\tag{5}$$

式中 α 为实数, 且 $\alpha\neq 1$。显然对于不同的 α 值可得到不同的熵度量。

定理 1　信息系统 $S=(U,A)$中,$P\subseteq A$,若一般二元关系变为等价关系,令 $U/P=\{P_1,P_2,\cdots,P_m\}$,则 α 熵退化为

$$H_E^{\alpha}(P)=(1-2^{\alpha-1})^{-1}\left[\sum_{i=1}^{m}|P_i|^{\alpha}/|U|^{\alpha}-1\right]\tag{6}$$

注:下标 E 表示在等价关系下的表达式,下同。

证明　在等价关系下, 对 $\forall u_k\in X_i$, 有 $|P_i|=|B_P(u_k)|$,其中 $1\leqslant i\leqslant m$。由式(5)得

$$\begin{aligned}H^{\alpha}(P)&=(1-2^{\alpha-1})^{-1}\left[\frac{1}{|U|^{\alpha}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{u_k\in P_i}|B_P(u_k)|^{\alpha-1}-1\right]\\&=(1-2^{\alpha-1})^{-1}\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{|P_i|^{\alpha}}{|U|^{\alpha}}-1\right]\\&=H_E{}^{\alpha}(P)\end{aligned}$$

□

定理 1 说明一般二元关系下的 α 熵也可用于完备信息系统的不确定性度量,即基于等价关系的不确定性度量 $H_E^{\alpha}(P)$是一般二元关系下 $H^{\alpha}(P)$的特殊形式。

定理 2(单调性)　信息系统 $S=(U,A)$中,$P,Q\subseteq A,P\leq Q$,则 $H^{\alpha}(Q)\leqslant H^{\alpha}(P)$,当且仅当

$P\approx Q$ 时等号成立(注:若没有条件 $P\preceq Q$,则 $H^{\alpha}(Q)=H^{\alpha}(P)\Rightarrow P\approx Q$ 不成立)。

证明　只需证明对于任意不等于 1 的实数 α,α 熵都随知识粒度的变细而单调递增即可。

(1)当 $\alpha\leqslant 0$ 时,由式(5)知 α 熵的表达式变为

$$H^{\alpha}(P)=(1-\frac{1}{2^{1-\alpha}})^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{|U|}\frac{|U|^{-\alpha}}{|B_P(u_i)|^{1-\alpha}}-1\Big] \tag{7}$$

此时 $(1-\frac{1}{2^{1-\alpha}})^{-1}>0$。若 $P\prec Q$,则对 $\forall u_i\in U$,有 $B_P(u_i)\subseteq B_Q(u_i)$ 且 $\exists u_j\in U$ 满足 $B_P(u_j)\subset B_Q(u_j)$,即对 $\forall u_i\in U$,有 $|B_P(u_i)|\leqslant|B_Q(u_i)|$ 且 $\exists u_j\in U$ 满足 $|B_P(u_j)|<|B_Q(u_j)|$,可得 $H^{\alpha}(Q)<H^{\alpha}(P)$,即 $H^{\alpha}(P)$ 满足随知识粒度的变细而单调递增。

(2)当 $0<\alpha<1$ 时,α 熵的表达式为 $H^{\alpha}(P)=(1-\frac{1}{2^{1-\alpha}})^{-1}\Big[\frac{1}{|U|^{\alpha}}\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|B_P(u_i)|^{1-\alpha}}-1\Big]$,此时 $(1-\frac{1}{2^{1-\alpha}})^{-1}>0$。由(1)的分析方法可得当 $P\prec Q$ 时,有 $H^{\alpha}(Q)<H^{\alpha}(P)$。

(3)当 $\alpha>1$ 时,α 熵的表达式为

$$H^{\alpha}(P)=(1-2^{\alpha-1})^{-1}\Big[\frac{1}{|U|^{\alpha}}\sum_{i=1}^{|U|}|B_P(u_i)|^{\alpha-1}-1\Big]$$

由(1)的分析方法知当 $P\prec Q$ 时,由于 $\alpha>1$ 时 $(1-2^{\alpha-1})^{-1}<0$,所以 $H^{\alpha}(Q)<H^{\alpha}(P)$ 成立。

由以上分析可知,对任意实数 $\alpha(\alpha\neq1)$,当 $P\prec Q$ 时都有 $H^{\alpha}(Q)<H^{\alpha}(P)$。显然若 $P\approx Q$,即 $\forall u_i\in U$,$B_P(u_i)=B_Q(u_i)$,则 $H^{\alpha}(P)=H^{\alpha}(Q)$。因此在 $P\preceq Q$ 条件下当且仅当 $P\approx Q$ 时有 $H^{\alpha}(Q)=H^{\alpha}(P)$。　□

定理 2 说明 α 熵随着知识粒度的变小单调增加。因此 α 熵从粒度角度刻画了知识的粗糙程度。由 α 熵定义可知,不同的 α 值可得到不同的熵度量。下面将证明现有的两种典型的不确定性度量是 α 熵的特殊形式。

定理 3　信息系统 $S=(U,A)$ 中,$P\subseteq A$,当 $\alpha\to1$ 时,有以下结论:

(1)若一般二元关系变为容差关系,则 $\lim\limits_{\alpha\to1}H^{\alpha}(P)=G(P)$;

(2)若一般二元关系变为等价关系,则 $\lim\limits_{\alpha\to1}H^{\alpha}(P)=H(P)$。

证明　(1)若一般二元关系变为容差关系,即 $\forall u_i\in U,B_P(u_i)=S_P(u_i)$,由式(5)得

$$\begin{aligned}&\lim_{\alpha\to1}H^{\alpha}(P)\\&=\lim_{\alpha\to1}(1-2^{\alpha-1})^{-1}\Big[\frac{1}{|U|^{\alpha}}\sum_{i=1}^{|U|}|S_P(u_i)|^{\alpha-1}-1\Big]\\&=\lim_{\alpha\to1}\Big[\sum_{i=1}^{|U|}(\frac{|S_P(u_i)|}{|U|})^{\alpha}\times\frac{1}{|S_P(u_i)|}-1\Big]/(1-2^{\alpha-1})\end{aligned}$$

上式中对 α 应用洛必塔法则得

$$\begin{aligned}&\lim_{\alpha\to1}H^{\alpha}(P)\\&=\lim_{\alpha\to1}\frac{\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|S_P(u_i)|}\times(\frac{|S_P(u_i)|}{|U|})^{\alpha}\times\ln\frac{|S_P(u_i)|}{|U|}}{-2^{\alpha-1}\times\ln2}\\&=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\log_2\frac{|S_P(u_i)|}{|U|}=G(P)\end{aligned}$$

(2)由定理 1 可知在等价关系下,α 熵退化为式(6),对式(6)应用洛必塔法则同理可得 $\lim\limits_{\alpha\to1}H^{\alpha}(P)=H(P)$。　□

定理 4　信息系统 $S=(U,A)$ 中,$P\subseteq A$,当 $\alpha=2$ 时,有以下结论:

(1)若一般二元关系变为容差关系,则 $H^{\alpha}(P)=E'(P)$;

(2)若一般二元关系变为等价关系,令 $U/P=\{P_1,P_2,\cdots,P_m\}$,则 $H^{\alpha}(P)=E(P)$。

证明　(1)若一般二元关系变为容差关系,即 $\forall u_i\in U,B_P(u_i)=S_P(u_i)$,将 $\alpha=2$ 代入式(5)

$$\begin{aligned}&H^{\alpha}(P)=H^{2}(P)\\&=(1-2)^{-1}\Big[\frac{1}{|U|^{2}}\sum_{i=1}^{|U|}|S_P(u_i)|-1\Big]\\&=\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}(1-\frac{|S_P(u_i)|}{|U|})=E'(P)\end{aligned}$$

(2)由定理 1 可知在等价关系下 α 熵退化为式(6),将 $\alpha=2$ 代入式(6)得

$$\begin{aligned}H^{\alpha}(P)&=H_E^{2}(P)\\&=-\Big[\sum_{i=1}^{m}|P_i|^{2}/|U|^{2}-1\Big]\\&=\sum_{i=1}^{m}\frac{|P_i|}{|U|}(1-\frac{|P_i|}{|U|})=E(P)\end{aligned}$$　□

由定理 3 和定理 4 可知,容差关系和等价关系下两种不确定性度量是一般二元关系下 α 熵的特殊情形。因此一般二元关系下的 α 熵既可对完备信息系统中等价关系下知识的不确定性进行度量,也可以对不完备信息系统中基于容差、相似或限制容差关系下知识的不确定性进行度量。因此 α 熵是现有不确定性度量的扩展。

3　一般二元关系下粗糙集的不确定性度量

定义 6[11]　信息系统 $S=(U,A)$ 中,$P\subseteq A$,X

$\subseteq U$ 在知识 P 下的精度和粗糙度分别为

$$d_P(X)=\frac{|\underline{apr}_P X|}{|\overline{apr}_P X|},\quad P_P(X)=1-\frac{|\underline{apr}_P X|}{|\overline{apr}_P X|}$$

其中 $\underline{apr}_P X=\bigcup\{u_i\in U\mid B_P(u_i)\subseteq X\}$ 和 $\overline{apr}_P X=\bigcup\{u_i\in U\mid B_P(u_i)\cap X\neq\varnothing\}$ 分别表示 X 在一般二元关系下关于知识 P 的下、上近似集。显然 $0\leqslant d_P(X)$，$P_P(X)\leqslant 1$，粗糙集中不确定性越大，$P_P(X)$ 越大，而 $d_P(X)$ 越小。因而精度和粗糙度可用来度量粗糙集的不确定性。

由 RST 的观点，粗糙集不确定性由两方面原因造成：知识的粗糙性（知识粒度的大小）和粗糙集的边界。从定义 6 可知，由近似空间的下近似与上近似来确定的粗糙集不确定性度量仅考虑了由边界域引起的不确定性，对论域中知识的不确定性则无法测得。因此文献[12]在相容关系下对精度和粗糙度重新定义如下：

定义 7[12]　信息系统 $S=(U,A)$ 中，$P\subseteq A$，$X\subseteq U$ 在知识 P 下的精度和粗糙度分别为

$$Accuracy_P(X)=1-P_P(X)\times GK(P)$$
$$Roughness_P(X)=P_P(X)\times GK(P)$$

其中 $GK(P)=\sum_{i=1}^{|U|}|S_P(u_i)|/|U|^2$ 用来度量信息系统中知识的不确定性，$P_P(X)$ 用来度量粗糙集边界域不确定性。对 *Accuracy* 和 *Roughness* 的有效性则通过在相容关系下的实例说明。

例 1[12]　信息系统 $S=(U,A)$ 中，$P\subseteq A$，$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$X=\{1,2,4,6\}$，$U/\mathrm{SIM}(A)=\{\{1\},\{2,6\},\{3\},\{4,5\},\{4,5,6\},\{2,5,6\}\}$，$U/\mathrm{SIM}(P)=\{\{1,2,6\},\{1,2,6\},\{3\},\{4,5,6\},\{4,5,6\},\{1,2,4,5,6\}\}$，则 $\underline{apr}_A X=\underline{apr}_P X=\{1,2\}$，$\overline{apr}_A X=\overline{apr}_P X=\{1,2,4,5,6\}$，$d_A(X)=d_P(X)=0.4$，$P_A(X)=P_P(X)=0.6$，$Accuracy_A(X)=0.8$，$Accuracy_P(X)=0.7$，$Roughness_A(X)=0.20$，$Roughness_P(X)=0.30$。

例 1 中显然知识 P 比知识 A 不确定性更大，但二者却有相同的精度和粗糙度，而对于新定义的精度和粗糙度则有 $Accuracy_P(X)<Accuracy_A(X)$，$Roughness_A(X)<Roughness_P(X)$，因此 *Accuracy* 和 *Roughness* 克服了定义 6 中精度和粗糙度的不足，更精确地度量了粗糙集的粗糙性。但我们发现：

(1)若令例 1 中的 $X=\{1,2,4,5,6\}$，则 $\underline{apr}_A X=\underline{apr}_P X=\overline{apr}_A X=\overline{apr}_P X=\{1,2,4,5,6\}$，从而 $d_A(X)=d_P(X)=1$，$P_A(X)=P_P(X)=0$，$Accuracy_A(X)=Accuracy_P(X)=1$，$Roughness_A(X)=Roughness_P(X)=0$。显然当 X 的上、下近似相等时，即边界粗糙度为 0 时，定义 6 和定义 7 中的测度均不能对信息系统中知识的不确定性进行度量。

(2)例 1 中，$Roughness_A(X)<P_A(X)$，$Roughness_P(X)<P_P(X)$，$d_A(X)<Accuracy_A(X)$，$d_P(X)<Accuracy_P(X)$，即当考虑两种不确定性时，反而比考虑一种不确定性时粗糙度更小，精度更大，显然与实际情况不符。

(3)文献[13]指出，当 X 的下近似为空集时（称此时的 X 为边界粗糙集），若 X 在不同知识下的上近似不同，即在不同知识下 X 的边界域不同，边界越大，知识就越粗糙。而定义 6 和定义 7 中的测度对边界粗糙集的这种不确定性则不能很好度量，举例如下：

例 2　令例 1 中的 $X=\{2,5\}$，则 $\underline{apr}_A X=\underline{apr}_P X=\phi$，$\overline{apr}_A X=\{2,4,5,6\}$，$\overline{apr}_P X=\{1,2,4,5,6\}$，$d_A(X)=0$，$d_P(X)=0$，$P_A(X)=P_P(X)=1$，$Roughness_A(X)=GK(A)=0.33$，$Roughness_P(X)=GK(P)=0.50$，$Accuracy_A(X)=0.67$，$Accuracy_P(X)=0.50$。

由例 2 可以看出：相比于知识 A，边界粗糙集 X 在知识 P 下的知识粒度和边界域都更大，定义 6 中的精度和粗糙度既不能度量边界域的这种不确定性，也不能度量知识的不确定性；而定义 7 中的测度仅度量了信息系统中知识的不确定性，并没有准确度量边界域的不确定性（即没有体现出上近似的不同）。我们将文献[13]中等价关系下的全局精度 σ 扩展到一般二元关系下，即令 $\sigma'_P(X)=|U-BN'_P(X)|/|U|$，其中 $BN'_P(X)=\overline{apr}_P X-\underline{apr}_P X$。显然对于例 2 中，$|BN'_A(X)|<|BN'_P(X)|$，因此 X 在知识 P 下边界域不确定性大于在知识 A 下的边界域不确定性，由例 2 可算得全局精度 $\sigma'_P(X)=0.17<\sigma'_A(X)=0.33$，因此全局精度更好地度量了边界粗糙集的不确定性，但它不能度量信息系统中知识的不确定性。为此有必要寻求一种更准确的粗糙集不确定性度量。下面在一般二元关系下通过 α 熵以及扩展的全局精度给出一种新的不确定性度量。

定义 8　信息系统 $S=(U,A)$ 中，$P\subseteq A$，$X\subseteq U$，X 在知识 P 下的 α 精度定义如下：

$$d^{\alpha}_P(X)=\sigma'_P(X)\times\frac{H^{\alpha}(P)}{(1-2^{\alpha-1})^{-1}\times(|U|^{1-\alpha}-1)}$$

其中 $\sigma'_P(X)$ 用来度量粗糙集的精度，显然 $0\leqslant\sigma'_P(X)\leqslant 1$；$H^{\alpha}(P)$ 用来度量信息系统中知识的

精度;$(1-2^{\alpha-1})^{-1}\times(|U|^{1-\alpha}-1)$用来对 $H^{\alpha}(P)$ 进行归一化,因此 $0\leqslant d_P^{\alpha}(X)\leqslant 1$。同样可定义 α 粗糙度为 $P_P^{\alpha}(X)=1-d_P^{\alpha}(X)$。

显然,α 精度不仅与粗糙集边界域的不确定性有关,还与论域中知识的不确定性有关。

定理 5(单调性)　信息系统 $S=(U,A)$中,$P,Q\subseteq A$,$P\preceq Q$,$X\subseteq U$,则 $d_Q^{\alpha}(X)\leqslant d_P^{\alpha}(X)$,$P_P^{\alpha}(X)\leqslant P_Q^{\alpha}(X)$,当且仅当 $P\approx Q$ 时等号成立。

证明　因 $P\preceq Q$,由定理 4 得 $H^{\alpha}(Q)\leqslant H^{\alpha}(P)$,当且仅当 $P\approx Q$ 等号成立。由定义 8 可知要证 $d_Q^{\alpha}(X)\leqslant d_P^{\alpha}(X)$,只需证明 $\sigma'_Q(X)\leqslant\sigma'_P(X)$即可。

由 $P\preceq Q$ 得 $\forall x\in U$,$B_P(x)\subseteq B_Q(x)$。又因 $\forall x\in \underline{apr}_Q X$,$B_Q(x)\subseteq X$,得 $B_P(x)\subseteq X$,即 $x\in \underline{apr}_P X$。因此 $\underline{apr}_Q X\subseteq \underline{apr}_P X$。同样,对 $\forall x\in \overline{apr}_P X$,则 $B_P(x)\cap X\neq\varnothing$,由 $B_P(x)\subseteq B_Q(x)$得 $B_Q(x)\cap X\neq\varnothing$,即 $x\in\overline{apr}_Q X$,因此 $\overline{apr}_P X\subseteq\overline{apr}_Q X$,故 $BN'_P(X)\leqslant BN'_Q(X)$,即 $\sigma'_Q(X)\leqslant\sigma'_P(X)$,所以 $d_Q^{\alpha}(X)\leqslant d_P^{\alpha}(X)$成立,当且仅当 $P\approx Q$ 时等号成立。同理可证 $P_P^{\alpha}(X)\leqslant P_Q^{\alpha}(X)$,当且仅当 $P\approx Q$ 时等号成立。

定理 5 表明在一般二元关系下 α 精度和 α 粗糙度随知识粒度的变小分别单调递增和递减。

例 3　当 $\alpha=2$ 时(α 取其他值也可),在相容关系下各种不确定性度量对例 1 和例 2 的计算结果如表 1 所示。

表 1　粗糙集合的不确定性度量结果

Tab.1　The result of uncertainty measure

X	d_A	d_P	P_A	P_P	$GK(A)$	$GK(P)$	$Accuracy_A$	$Accuracy_P$	$Roughness_A$	$Roughness_P$	σ'_A	σ'_P	d_A^a	d_P^a	P_A^a	$P_P^a(X)$
X_1	0.4	0.4	0.6	0.6	0.33	0.5	0.8	0.7	0.2	0.3	0.5	0.5	0.4	0.3	0.6	0.7
X_2	1	1	0	0	0.33	0.5	1	1	0	0	1	1	0.8	0.6	0.2	0.3
X_3	0	0	1	1	0.33	0.5	0.67	0.5	0.33	0.5	0.33	0.17	0.27	0.1	0.73	0.9

注:$X_1=\{1,2,4,6\}$,$X_2=\{1,2,4,5,6\}$,$X_3=\{2,5\}$

由表 1 可得:

(1)当 $X=X_1$ 时,$\underline{apr}_A X_1=\underline{apr}_P X_1\neq\overline{apr}_A X_1=\overline{apr}_P X_1$,即知识 A 和 P 对粗糙集 X 的边界域粗糙度相等,α 精度和 α 粗糙度也能够正确度量粗糙集 X 的两种不确定性;

(2)当 $X=X_2$ 时,$\underline{apr}_A X_2=\underline{apr}_P X_2=\overline{apr}_A X_2=\overline{apr}_P X_2$,即知识 A 和 P 对粗糙集 X 的边界域粗糙度为 0,此时 α 精度和 α 粗糙度正确地反映了粗糙集 X 的知识的不确定性;

(3)当 $X=X_3$ 时,X_3 为边界粗糙集,α 精度和 α 粗糙度既考虑了信息系统中知识的不确定性(α 熵),也考虑了粗糙集不同上近似带来的不确定性;

(4)从(1)~(3)可知,对 $\forall X\subseteq U$ 都有$d_A^{\alpha}(X)<\sigma'_A(X)$,$d_P^{\alpha}(X)<\sigma'_P(X)$,即当考虑两种不确定性时,相比考虑一种不确定性时精度变小,与人的认知直觉相符。

例 3 表明 α 精度和 α 粗糙度更准确地度量了集合不确定性,弥补了现有粗糙集不确定性度量的缺陷。

4　结 论

本文将不完备信息系统中的各种扩展 RST 模型以及传统的等价关系模型统一在一般二元关系粗糙集模型中,提出了一种知识不确定性度量方法——α 熵,它包含了许多现有的不确定性度量函数,是现有不确定性度量方法的进一步推广。考虑导致粗糙集粗糙性的原因,本文将 α 熵和全局精度结合起来,在一般二元关系下提出了一种更精确的粗糙集不确定性度量,实例说明了这一新的度量方法的合理性,弥补了现有粗糙集不确定性度量的不足。本文提出的不确定性度量方法是通过度量知识的区分能力来实现的,因此是建立在导致知识粗糙性原因认知的基础之上,从而使得 RST 中的不确定性测量的本质易于理解。这些结果进一步发展和充实了完备与不完备信息系统中的不确定性度量理论,为信息系统中不确定性度量提供了新的研究角度。可以预见一般二元关系下带有可调节参数的 α 熵更具一般性和灵活性,普适性更高,在实际中将得到更广泛的应用。

(下转第 162 页)

阵 QR 分解的物理意义进行深入研究的基础上，提出用分块下三角分解的方法实现子空间的求取,并通过子空间投影的方法,完成抗干扰计算。该方法的主要优势在于具有简单的并行结构,若采用 CORDIC 方法流水实现 Givens 旋转,则整个算法过程都只用到加法与移位运算,并且该算法几乎没有需要存储的中间变量,对存储器件的需求非常小,便于硬件实现,特别适合 FPGA 实现。

参 考 文 献:

[1] Widrow B, Mantey P E, Griffiths L J. Adaptive Antenna Systems [C]//Proc. IEEE Dec. 1967, 55(12): 2143 – 2159.

[2] Frost O L. An Algorithm for Linear Constrained Adaptive Array Processing[C]//Proc. IEEE 1972, 60(8):926 – 935.

[3] 王永良,彭应宁. 空时自适应信号处理[M]. 北京:清华大学出版社, 2000: 175 – 188.

[4] Horowitz L L. Controlling Adaptive Arrays with the Sample Matrix Inversion Algorithm[J]. IEEE Trans. AES, 1979, 15(6): 1309 – 1324.

[5] Alexander S T, Ghirnikar A L. A Method for Recursive Least Squares Filtering Based Upon an Inverse QR Decomposition[J]. IEEE Trans. SP, Jan. 1993, 40(1): 20 – 30.

[6] Goldsten J S, Reed I S, Scharf L L. A Multistagerepresentation of the Wiener Filter Based on Orthogonal Projections [J]. IEEE Trans. Information theory,1998, 44(11): 2943 – 2959.

[7] Proakis J G. Algorithms for Statistical Signal Processing[M]. Prentice-Hall, 2002.

[8] Gomes J, Barroso V. Array-based QR-RLS Multichannel Lattice Filtering [J]. IEEE Trans. Signal Process, 2008, 56(4): 1452 – 1465.

[9] Gomes J, Barroso V. A CORDIC-based QR-RLS Multichannel Lattice Filters[C]//Proc. 15th Europ. Signal Process. Conf.(EUSIPCO'07), Poznań, Poland, 2007: 1043 – 1047.

[10] 郭艺, 张尔扬, 沈荣俊. GPS 空时抗干扰子空间投影方法[J]. 通信学报,2007,28(5):62 – 66.

[11] Golub G H, Vanloan C F. 矩阵计算[M]. 北京:科学出版社, 2004.

[12] ICD-GPS-200. NAVSTAR GPS Space Segment/Navigation User Interfaces (Public Release Version) [S]. ARINC Research Corporation, 1991.

(上接第 67 页)

参 考 文 献:

[1] 李德毅, 刘常昱, 杜鹢, 等. 不确定性人工智能[J]. 软件学报, 2004,15(11): 1583 – 1594.

[2] 苗夺谦, 王珏. 粗糙集理论中概念与运算的信息表示[J]. 软件学报, 1999,10(2): 113 – 116.

[3] Düntsch I, Gediga G. Uncertainty Measures of Rough Set Prediction[J]. Artificial Intelligence, 1998,106(1): 109 – 137.

[4] 王国胤, 于洪, 杨大春. 基于条件信息熵的决策表约简[J]. 计算机学报, 2002,25(7): 759 – 766.

[5] Liang J Y, Qian Y H. Information Granules and Entropy Theory in Information Systems[J]. Science in China (Series F), 2008,51 (10): 1427 – 1444.

[6] 滕书华, 周石琳, 孙即祥, 等. 基于条件熵的不完备信息系统属性约简算法[J]. 国防科技大学学报, 2010,32 (1):90 – 94.

[7] Slowinski R, Vanderpooten D. A Generalized Definition of Rough Approximations Based on Similarity[J]. IEEE Trans Knowl Data Eng, 2000,12(2): 331 – 336.

[8] 王国胤. Rough 集理论在不完备信息系统中的扩充[J]. 计算机研究与发展, 2002,39(10): 1238 – 1243.

[9] Yao Y Y. Relational Interpretations of Neighborhood Operators and Rough Set Approximation Operators [J]. Information Sciences, 1998,111(1 – 4): 239 – 259.

[10] 黄兵, 周献中, 史迎春. 基于一般二元关系的知识粗糙熵与粗集粗糙熵[J]. 系统工程理论与实践, 2004,24(1): 93 – 96.

[11] 张文修, 吴伟志, 梁吉业. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[12] Wang J H, Liang J Y, Qian Y H, et al. Uncertainty Measure of Rough Sets Based on a Knowledge Granulation of Incomplete Information Systems [J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 2008, 16(2): 233 – 244.

[13] Yang Y J, John R. Global Roughness of Approximation and Boundary Rough Sets[C]//Fuzzy Systems, FUZZ-IEEE 2008 (IEEE World Congress on Computational Intelligence) IEEE International Conference on, 2008:1106 – 1111.