

## 基于空间时频分布的欠定混合信号源个数估计\*

陆风波, 黄知涛, 姜文利

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**针对欠定混合信号的源个数估计问题,提出了一种基于空间时频分布与奇异值分解的估计算法,把所有自源时频点对应的空间时频分布矩阵组成三阶张量,把欠定混合问题转化为超定问题,通过对三阶张量对应的矩阵进行奇异值分解估计出源信号的数目,该方法不需要假设源信号是稀疏的或独立的,理论分析和仿真结果验证了算法的有效性。

**关键词:**空间时频分布;欠定混合信号;源个数估计

**中图分类号:**TN911 **文献标识码:**A

## Estimation of the Sources Number in the Underdetermined Mixture Signals Based on Spatial Time-frequency Distribution

LU Feng-bo, HUANG Zhi-tao, JIANG Wen-li

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Aiming at the problem of estimation of the sources number in the underdetermined mixture signals, this paper propose a algorithm based on spatial time-frequency distribution (STFD) and singular value decomposition (SVD) without the assumption of sparsity and independence. First, the time-frequency distribution matrices corresponded to the auto-source TF points was stacked in three-order tensor, then the entries of the tensor stacked in matrix and SVD on this matrix was performed to finish the estimation of the sources number. The efficiency of the algorithm was proved in theory. Computer simulations show that the proposed recognition algorithm is high in performance.

**Key words:** spatial time frequency distribution; underdetermined mixing signals; estimation of the sources number

盲信号分离(Blind Source Separation, BSS)就是在未知混合过程的条件下,仅从观测到的混合信号中恢复出源信号<sup>[1]</sup>。由于只需假设源信号是相互独立的,而不需要知道源信号以及混合过程等其他先验知识,盲信号分离在数字通信、图像处理、遥感等领域有着广泛的应用。在实际信号环境中,由于接收阵元数目有限而源信号数目未知,往往导致混合信号中源信号数目  $N$  大于阵元数目  $M$ ,对这种混合信号的盲分离被称为欠定盲分离。目前大多数欠定盲源分离算法都不能估计源信号数目,在源信号数目已知的条件下才能完成信号的盲分离,因此,混合信号源个数估计对解决欠定盲分离问题具有重要意义,也是目前必须亟待解决的难点。

对于适定或超定混合信号的源个数估计, Wax 在假设噪声为高斯白噪声的条件下提出了基于信息论中 AIC (Akaike Information Criterion) 和

MDL (Minimum Description Length) 准则的源个数估计算法<sup>[2]</sup>,当噪声统计特性未知时 Wu 提出了 GDE (Gerschgorin Disk Estimator) 准则的源个数估计算法<sup>[3]</sup>,在此基础上后来又出现了改进的算法<sup>[4-5]</sup>,但是这些方法都不能适应欠定混合的情况。目前对于欠定混合信号的源个数估计问题的研究还比较少, Bofill 等通过假设源信号是稀疏的首先提出基于势函数聚类的源信号个数估计算法<sup>[6]</sup>,之后出现了许多类似的方法如模糊聚类等<sup>[7-9]</sup>; Lathauwer 假设源信号是相互独立的,提出了基于高阶累积量的欠定混合信号源个数估计方法<sup>[10]</sup>,该方法要求源信号都服从亚高斯分布或超高斯分布。

本文提出了一种基于空间时频分布与奇异值分解的欠定混合信号源个数估计算法,该方法不需要假设源信号是稀疏的或者相互独立的,把所有自源时频点对应的空间时频分布矩阵组成三阶

\* 收稿日期: 2010 - 10 - 12

基金项目: 新世纪优秀人才支持计划资助项目

作者简介: 陆风波(1982—),男,博士生。

张量,然后把三阶张量表示成矩阵的形式,最后通过奇异值分解来完成源信号数目的估计。

### 1 信号模型

假设  $N$  个窄带远场通信信号  $s(t)$  入射到  $M$  个阵元组成的天线阵上,由于各个信号的入射方向不同而引起的幅度衰减和时间延迟的不同,可得第  $i$  个阵元的接收信号

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^N b_{ik}s_k(t)e^{-j2\pi f_k \tau_{ik}} \quad (i = 1, \dots, M) \tag{1}$$

其中  $b_{ik}$ 、 $\tau_{ik}$  分别为信号  $s_k(t)$  到达第  $i$  个阵元的幅度衰减和时间延迟,  $f_k$  为信号  $s_k(t)$  的频率,式(1)表示成矩阵形式

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{a}_k s_k(t) \tag{2}$$

其中  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_N(t)]^T$ ,  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_M(t)]^T$ ,  $N$  为源信号数目,  $M$  为阵元数目,  $N > M$ 。  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N] \in C^{M \times N}$  为复数矩阵,  $\mathbf{a}_k = [a_{1k}, \dots, a_{Mk}]^T$ , 其中  $a_{ik} = b_{ik}e^{-j2\pi f_k \tau_{ik}}$ 。

源个数估计就是在未知幅度衰减  $b_{ik}$ 、时延  $\tau_{ik}$  及源信号  $s(t)$  的情况下,仅从接收信号  $\mathbf{x}(t)$  中估计出源信号数目。

### 2 空间时频分布(STFD)及自源点选择

信号  $x_i(t)$  的 Cohen 类离散时频分布可以表示为

$$D_{x_i x_i}(t, f) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k, l) x_i(t+k+l) x_i^*(t+k-l) e^{-j4\pi f l} \tag{3}$$

信号  $x_i(t)$  与  $x_j(t)$  的互时频分布可以表示为

$$D_{x_i x_j}(t, f) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(k, l) x_i(t+k+l) x_j^*(t+k-l) e^{-j4\pi f l} \tag{4}$$

其中  $\phi(k, l)$  为核函数,则信号  $x(t)$  的空间时频分布(STFD)可以表示为

$$\mathbf{D}_{xx}(t, f) = \mathbf{A}\mathbf{D}_{ss}(t, f)\mathbf{A}^H \tag{5}$$

其中  $\mathbf{D}_{xx}(t, f) \in C^{M \times M}$ ,  $[\mathbf{D}_{xx}(t, f)]_{ij} = D_{x_i x_j}(t, f)$ ,  $\mathbf{D}_{ss}(t, f) \in C^{N \times N}$ ,  $[\mathbf{D}_{ss}(t, f)]_{ij} = D_{s_i s_j}(t, f)$ 。

令  $\Omega_i$  为信号  $x_i(t)$  的时频支撑域,即

$$\begin{cases} D_{s_i s_i}(t, f) \neq 0 & (t, f) \in \Omega_i \\ D_{s_i s_i}(t, f) = 0 & (t, f) \notin \Omega_i \end{cases} \tag{6}$$

令  $\Omega$  为  $M$  个观测信号  $x_i(t)$  ( $1 < i < M$ ) 的时频支撑域,则  $\Omega = \bigcup_{i=1}^M \Omega_i$ , 考虑到噪声的影响,首先通过式(7)选择信号能量足够大的时频点  $(t, f) \in \Omega$ 。如果

$$\frac{\|\mathbf{D}_{xx}(t, f)\|}{\max_f \|\mathbf{D}_{xx}(t, f)\|} > \epsilon_1, (t, f) \in \Omega \tag{7}$$

其中  $\|\cdot\|$  为  $F$  范数,  $\epsilon_1$  为门限值(一般取 0.05) 由于信号  $\mathbf{x}(t)$  是  $N$  个源信号的线性组合,则时频分布中不仅有每个源信号本身的时频分布,还有不同源信号相互交叉产生的虚假信号,把只含有源信号本身的时频点称为“自源点”,由不同源信号的交叉项所产生的时频点称为“互源点”。令接收信号  $x(t)$  的所有自源时频点的集合为  $\Omega_s$ , 下面可以通过文献[11]提出的方法选择信号空间时频分布的自源时频点。如果

$$\frac{\text{trace}(\bar{\mathbf{D}}_{xx}(t, f))}{\|\mathbf{D}_{xx}(t, f)\|} > \epsilon_2, (t, f) \in \Omega_s \tag{8}$$

其中,  $\bar{\mathbf{D}}_{xx} = \mathbf{W}\mathbf{D}_{xx}(t, f)\mathbf{W}^H$ ,  $\text{trace}(\cdot)$  为矩阵的迹,  $\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1/2}\mathbf{U}^H$  为白化矩阵,  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{U}$  分别为协方差矩阵  $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H]$  的特征值矩阵和特征向量矩阵,  $\epsilon_2$  为门限值(一般取 0.85)。

通过式(7)和(8)就可以得到信号  $x(t)$  的空间时频分布矩阵的所有自源时频点的集合  $\Omega_s$ , 则对任意时频点  $(t_i, f_j) \in \Omega_s$ , 可得

$$\mathbf{D}_{xx}(t, f) = \mathbf{A}\mathbf{D}_{ss}(t, f)\mathbf{A}^H = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{D}}_{ss}(t, f)\mathbf{A}^H \tag{9a}$$

其中,  $\bar{\mathbf{D}}_{ss}(t, f)$  为对角矩阵, 且  $[\bar{\mathbf{D}}_{ss}(t, f)]_{ii} = [\mathbf{D}_{ss}(t, f)]_{ii} = D_{s_i s_i}(t, f)$ 。

图 1 为 3 个阵元接收到的 4 个线性调频信号的时频分布图, (a) 为自源时频点选择前混合信号的时频分布图, 从图中可以看出既有“自源时频点”也有“互源时频点”, (b) 为进行自源点选择后得到的混合信号的时频分布图, 从图中可以看出已经消除了“互源点”的影响。

### 3 源信号个数估计

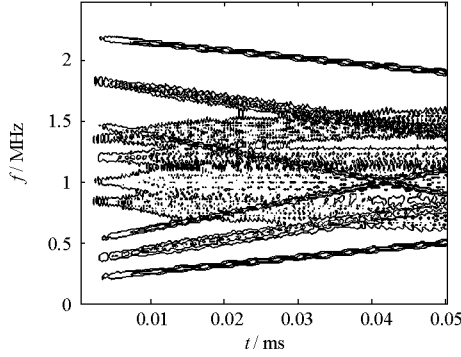
对于任意自源时频点  $(t, f) \in \Omega_s$ , 接收信号  $x(t)$  的空间时频分布矩阵可以表示为

$$\mathbf{D}_{xx}(t, f) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{D}}_{ss}(t, f)\mathbf{A}^H \tag{9b}$$

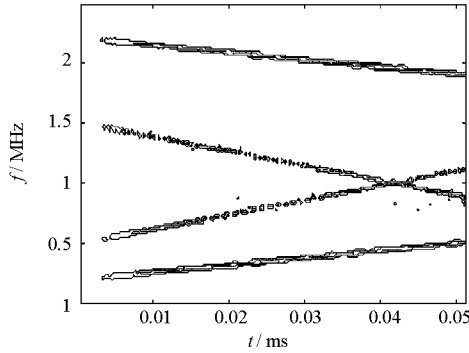
其中,  $\bar{\mathbf{D}}_{ss}(t, f) = \text{diag}[D_{s_1 s_1}(t, f), \dots, D_{s_N s_N}(t, f)]$ 。

令时频支撑域  $\Omega_s$  包含  $L$  个自源时频点, 即  $\Omega_s = \{(t, f)_k \mid 1 \leq k \leq L\}$ , 则可以得到  $L$  个空间时频分布矩阵  $\{D_{xx}(t, f)_k \mid 1 \leq k \leq L\}$ , 即

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{xx}(t, f)_1 = \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{ss}(t, f)_1 \mathbf{A}^H \\ \vdots \\ \mathbf{D}_{xx}(t, f)_L = \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{ss}(t, f)_L \mathbf{A}^H \end{cases} \quad (10)$$



(a) 混合信号的时频分布图



(b) 自源点选择后的时频分布图

图1 自源时频点选择前后信号的时频分布图

Fig.1 TF distribution of mixtures and the selected auto-source TF points

这  $L$  个时频分布矩阵可以组成一个三阶张量  $\mathcal{D} \in \mathbf{C}^{M \times M \times L}$ , 其中第  $(i, j, k)$  个元素  $\mathcal{D}_{ijk}$  为

$$\mathcal{D}_{ijk} = [\mathbf{D}_{xx}(t, f)_k]_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq M, 1 \leq k \leq L) \quad (11)$$

定义矩阵  $\mathbf{D} \in \mathbf{C}^{L \times N}$ , 其中第  $(k, n)$  个元素  $\mathbf{D}_{kn} = [\bar{\mathbf{D}}_{ss}(t, f)_k]_{nn}$ , 则张量  $\mathcal{D}$  可以表示为向量外积, 即

$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^N \mathbf{a}_n \circ \mathbf{a}_n^* \circ \mathbf{d}_n \quad (12)$$

其中,  $\mathcal{D}_{ijk} = \sum_{n=1}^N \mathbf{A}_{in} \mathbf{A}_{jn}^* \mathbf{D}_{kn}$ ,  $\mathbf{a}_n$ 、 $\mathbf{a}_n^*$ 、 $\mathbf{d}_n$  分别为矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{A}^*$  和  $\mathbf{D}$  的第  $n$  个列矢量,  $\mathbf{A}_{in}$ 、 $\mathbf{A}_{jn}^*$ 、 $\mathbf{D}_{kn}$  分别为矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{A}^*$  的第  $(i, n)$ 、 $(j, n)$  个元素, 符号“ $\circ$ ”表示向量的外积。

把三阶张量  $\mathcal{D} \in \mathbf{C}^{M \times M \times L}$  表示成矩阵  $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^{M^2 \times L}$  的形式,  $\mathbf{C}_{ij}$  表示矩阵  $\mathbf{C}$  的第  $(i, j)$  个元素, 则

$$\mathbf{C}_{(i-1)M+j, k} = \mathcal{D}_{ijk} \quad (13)$$

由文献[12]知, 式(12)可以表示成矩阵乘积的形式

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{D}^T \quad (14)$$

其中,  $\odot$  表示 Khatri-Rao 乘积,  $(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*) \in \mathbf{C}^{M^2 \times N}$ 。

当混合矩阵  $\mathbf{A}$  为复数矩阵, 源信号数目  $N \leq M^2$  时, 矩阵  $\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*$  是列满秩的<sup>[12]</sup>, 即

$$\text{rank}(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*) = N \quad (15)$$

又因为  $\mathbf{D}^T$  是行满秩的, 即  $\text{rank}(\mathbf{D}^T) = N$ , 则

$$\text{rank}(\mathbf{C}) = N \quad (16)$$

因此, 矩阵  $\mathbf{C}$  的秩等于源信号的数目  $N$ 。

可以通过对矩阵  $\mathbf{C}$  进行特征分解, 得到  $M^2$  个奇异值  $\{\lambda_k | 1 \leq k \leq M^2\}$ , 由于矩阵  $\mathbf{C}$  的秩等于源信号的数目  $R$ , 则  $\lambda_{R+1} = \dots = \lambda_{M^2} = 0$ , 定义  $H_k$  为

$$H_k = \frac{(\lambda_k - \lambda_{k+1})}{\lambda_{k+1}} \quad (1 \leq k \leq M^2 - 1) \quad (17)$$

则

$$H_k = \begin{cases} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) / \lambda_{k+1} & 1 \leq k < N \\ \infty & k = N \\ 0 & N < k < M^2 - 1 \end{cases} \quad (18)$$

使检测统计量  $H_k$  最大时对应的  $k$  值就等于源信号的数目  $N$ , 即

$$N = \arg \max_{1 \leq k < M^2} [H_k] \quad (19)$$

## 4 算法步骤

(1) 通过式(3)、(4)计算信号  $\mathbf{x}(t)$  的 Cohen 类空间时频分布, 得到空间时频表示矩阵  $\mathbf{D}_{xx}(t, f)$ ;

(2) 通过式(7)、(8)找出接收信号  $\mathbf{x}(t)$  能量不为零的自源时频点的集合  $\Omega_s$ ;

(3) 把时频支撑域  $\Omega_s$  中  $L$  个自源时频点对应的空间时频分布矩阵表示成三阶张量  $\mathcal{D} \in \mathbf{C}^{M \times M \times L}$ , 如式(11);

(4) 通过式(13)把三阶张量  $\mathcal{D} \in \mathbf{C}^{M \times M \times L}$  表示成二维矩阵  $\mathbf{C} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{D}^T$  的形式;

(5) 对矩阵  $\mathbf{C}$  进行奇异值分解得到  $M^2$  个奇异值  $\{\lambda_k | 1 \leq k \leq M^2\}$ , 通过式(19)估计出混合信号  $\mathbf{x}(t)$  中源信号数目  $N$ 。

## 5 性能仿真与分析

(1) 基于空间时频分布与基于四阶累积量的源个数估计算法性能

接收天线为阵元数目  $M$  为 3 的均匀圆阵, 均匀圆阵的半径与波长之比为 0.55, 源信号为  $N = 4$  的线性调频信号, 入射方位角分别为  $\theta_1 = \pi/5$ ,  $\theta_2 = 3\pi/10$ ,  $\theta_3 = 2\pi/5$ ,  $\theta_4 = 0$ , 俯仰角分别为  $\phi_1 = 7\pi/10$ ,  $\phi_2 = 9\pi/10$ ,  $\phi_3 = 3\pi/5$ ,  $\phi_4 = 4\pi/5$ , 信号采样点

数为 512, 采样频率为 5Msps, 信噪比变化范围为 -10 ~ 10dB, 不同信噪比条件下分别进行 500 次 Monte-Carlo 仿真。

图 2 为基于空间时频分布(STFD-based)的算法与基于四阶累积量(FOS-based)<sup>[10]</sup>的算法在不同信噪比条件下的估计性能, 从图中可以看出, 由于本文算法通过式(7)降低了噪声的影响, 在低信噪比条件下, 本文算法的源个数估计性能明显优于基于四阶累积量的方法。

(2)不同源信号数目条件下的本文算法性能  
源信号为  $N$  分别取 4、5、6 的线性调频信号, 第 5、6 个信号的入射方位角为  $\theta_5 = \pi/10, \theta_6 = 3\pi/5$ , 俯仰角为  $\phi_5 = 3\pi/5, \phi_6 = \pi/5$ , 其他仿真条件与仿真(1)相同。

图 3 为在源信号数目  $N$  分别为 4、5、6 时本文算法的估计性能, 从图中可以看出当信噪比大于 5dB 时能够正确识别源信号数目的比例接近 100%, 但是随着源数目的增加, 混合矩阵  $A$  的列矢量相关性增强, 识别正确率随之下降。

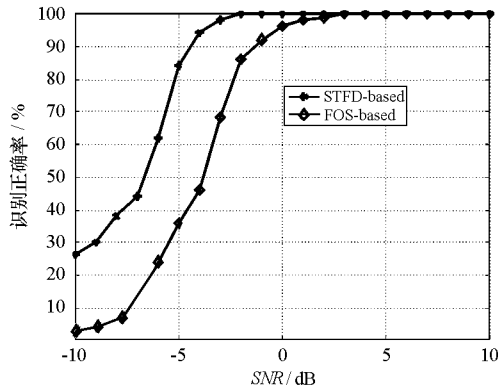


图 2 基于空间时频分布和四阶累积量算法的估计性能  
Fig.2 Estimation performance of STFD-based and FOS-based algorithms

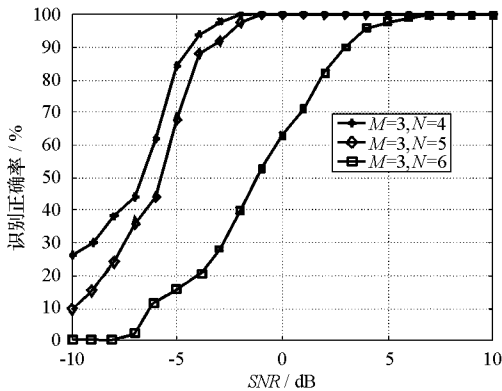


图 3 不同源个数条件下本文算法估计性能  
Fig.3 Estimation performance of proposed algorithm in the case of different sources

## 6 结束语

本文提出了一种基于空间时频分布的欠定混合信号源个数估计算法, 把所有自源时频点对应地空间时频分布矩阵组成三阶张量, 然后把三阶张量表示成矩阵的形式, 最后通过奇异值分解来完成源信号数目的估计。仿真结果表明, 在低信噪比条件下本文算法的源个数估计性能明显优于基于四阶累积量的方法, 此外, 当源信号数目远大于阵元数时, 本文算法也能很好地估计出源个数, 但随着源个数的增加, 估计性能会随之降低。

## 参考文献:

- [1] Bell A J, Sejnowski T J. An Information-maximization Approach to Blind Separation and Blind Deconvolution [J]. Neural Computation, 1995, 7(6): 1129 - 1159.
- [2] Wax M, Kailath T. Detection of Signals by Information Theoretic Criteria [J]. IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, 1985, 33(2): 387 - 392.
- [3] Wu H T, Yang J F, Chen F K. Source Number Estimators Using Transformed Gerschgorin Radii [J]. IEEE Trans. SP, 1995, 43(6): 1325 - 1333.
- [4] Wu H T, Chen C L. A New Gerschgorin Radii Based Method for Source Number Detection [C]//IEEE Statistical Signal and Array Processing Proceedings, 2000, 104 - 107.
- [5] Radoi E, Quinquis A. A New Method for Estimating the Number of Harmonic Components in Noise with Application in High Resolution Radar [J]. EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 2004, 8: 1177 - 1188.
- [6] Bofill P, Zibulevsky M. Underdetermined Blind Source Separation Using Sparse Representations [J]. Signal Process, 2001, 81(11): 2353 - 2362.
- [7] Luo Y H, Wang W, Chambers J A. Exploitation of Source Nonstationarity in Underdetermined Blind Source Separation with Advanced Clustering Techniques [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2006, 54(6): 2198 - 2212.
- [8] 谭北海, 杨祖元, 周郭许, 等. 欠定盲分离中源的个数估计和分离算法[J]. 中国科学 F 辑: 信息科学, 2009, 39(3): 349 - 356.
- [9] Arberet S, Gribonval R, Bimbot F. A Robust Method to Count and Locate Audio Sources in a Multichannel Underdetermined Mixture[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2010, 58(1): 121 - 133.
- [10] Lathauwer L D, Castaing J, Cardoso J F. Fourth-order Cumulant-based Blind Identification of Underdetermined Mixtures [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2007, 55(6): 2965 - 2973.
- [11] Nguyen L T, Adel B, Karim A M. Separating More Sources than Sensors Using Time-frequency Distributions [J]. EURASIP Journal on Applied Signals Processing, 2005, 17: 2828 - 2847.
- [12] Lathauwer L D. A Link Between the Canonical Decomposition in Multilinear Algebra and Simultaneous Matrix Diagonalization [J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl, 2006, 28(3): 642 - 666.