

文章编号: 1001 - 2486(2011)02 - 0077 - 04

信息几何在脉冲多普勒雷达目标检测中的应用*

刘俊凯, 王雪松, 王 涛, 屈龙海

(国防科技大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:信息几何是以微分几何为基础发展起来的一个新兴学科方向,研究流形和度量空间上的统计问题,它提供了解决雷达信号处理和数据处理问题的一种新思路。雷达回波通常表示为复多元高斯分布,基于复多元高斯分布流形上的黎曼几何结构,提出了一种 CFAR 检测器结构,并分析了高斯杂波环境下的虚警概率和检测概率。仿真实验表明,在短脉冲序列条件下,信息几何方法的检测性能优于常规相参积累方法。研究成果有助于改善机械扫描雷达体制在低的脉冲重复频率工作模式时的检测性能。

关键词:信息几何;统计流形;复多元高斯分布;黎曼均值;黎曼距离;检测

中图分类号: TN957.51; O129 **文献标识码:** A

Application of Information Geometry to Target Detection for Pulsed-doppler Radar

LIU Jun-kai, WANG Xue-song, WANG Tao, QU Long-hai

(College of Electronic Science and Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Information Geometry, a new subject originated from differential geometry, studies the statistics problem in manifold and metric space, and serves as a new solution method for the problem involved in radar signal processing and data processing. In the current study, radar echoes were modeled as the complex multivariate Gaussian distribution, and a kind of CFAR detector was proposed based on the Riemannian geometric structure of the manifold, and the false alarm probability and detection probability was analyzed. Simulations show that the detection performance of the information geometry method was better than the traditional coherent accumulation method for the small pulse number case. The findings of the research will be helpful to improve the detection performance of mechanical scan radar system at low PRF work mode.

Key words: information geometry; statistical manifold; complex multivariate gauss distribution; riemannian mean; riemannian distance; detection

在概率理论、信息理论和统计学中,人们通常把一些统计结构看作微分几何结构进行研究。信息几何是微分几何和黎曼几何的分支,它利用 Fisher 信息矩阵作为黎曼度量。从信息几何的角度思考问题,能为许多问题提供更加符合实际的模型框架,并得出新的解决途径^[1]。1945年, Rao 首先提出利用 Fisher 信息矩阵来定义概率密度函数空间的一个黎曼度量^[2-3]。Amari 提出了新的微分几何结构——对偶平坦流形来研究信息处理,并定义了 α -仿射联络,它能够较好地描述概率分布的内在特性^[4]。Moakher 得到了多元高斯分布的元素间测地线的闭式表达式^[5],测地线是连接流形上两点的最短距离的曲线,可用于计算概率分布间的距离。在工程应用中,通常测量含

有噪声或杂波,需要利用统计学方法减少测量的不确定性, Pennec 在 n 维黎曼流形上构造统计工具,定义了 Karcher 均值等几何概念^[6]。统计流形上的曲率、联络、测地线和 Karcher 均值等概念大大扩展了统计流形的应用范围,促进了信息几何学的产生与发展。经过二十几年的发展,信息几何学已经开始应用到统计推断^[4]、控制理论、神经网络^[4,7]、医学成像^[8]、信号处理^[9]、统计物理、高水平计算视觉^[10]等领域。在雷达信号和数据处理领域, Barbaresco 利用信息几何方法研究了飞机尾流的检测和成像问题,其在巴黎机场的 X 波段雷达实验表明,信息几何方法能改善多普勒成像和多普勒检测的性能^[9],此外, Barbaresco 也把信息几何应用在 STAP、极化数据处理^[11-12]等领域。

* 收稿日期: 2010 - 10 - 18

基金项目: 国家部委基金资助项目

作者简介: 刘俊凯(1979—),男,博士生。

本文在前人研究基础上详细介绍了复多元高斯模型的几何结构,然后提出了一种基于信息几何方法的 CFAR 检测器结构,并仿真比较了传统方法与信息几何方法的检测性能。

1 雷达目标回波的频域检测与信息几何检测方法的比较

雷达探测运动目标时,受到噪声或杂波的影响,需要进行频域处理。复采样序列表示为 $\mathbf{Z}_n = [z_1 z_2 \cdots z_n]^T$,本文中,矩阵或向量右上角的 T 表示转置, * 表示共轭, H 表示共轭转置。假设这些复数据是平稳的时间序列,其协方差矩阵 $\mathbf{R}_n = E[\mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_n^H]$ 是 Toeplitz Hermitian 正定矩阵:

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} r_0 & r_1^* & \cdots & r_{n-1}^* \\ r_1 & r_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & r_1^* \\ r_{n-1} & \cdots & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中 $r_k = E[z_n z_{n-k}^*]$, 且 $\begin{cases} \forall \mathbf{Z} \in C^n, \mathbf{Z}^H \mathbf{R}_n \mathbf{Z} > 0 \\ \mathbf{R}_n^H = \mathbf{R}_n \end{cases}$

常规检测方法在谱估计的基础上进行经典的单元平均(CA)-CFAR 检测。Fourier 变换是进行多普勒功率谱密度估计的经典工具:

$$S_Z = \sum_{k=-n}^n r_k \cdot e^{-j2\pi f k} \quad (2)$$

对于短时间序列,典型为 8 个脉冲,经典谱估计需要主观假定观测数据以外的信号形式,存在诸多缺点,最为严重的是对数据序列的加窗处理,它将引起分辨率受限、能量泄露和杂波谱污染整个多普勒滤波器组等现象,从而影响雷达检测性能。

信息几何在统计流形上建立目标多普勒信号模型。它的优点是,不需要多普勒频率分解,克服了短脉冲序列情况下经典谱估计分辨率下降问题,而且,概率分布的差别利用流形上的几何距离来表示,具有清晰直观的物理意义。复采样序列建立为复多元高斯分布模型,表示为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Z}_n | \mathbf{R}_n) &= \frac{1}{\pi^n \det(\mathbf{R}_n)} \exp\left[-(\mathbf{Z}_n - \boldsymbol{\mu}_n)^H \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{Z}_n - \boldsymbol{\mu}_n)\right] \\ &= \frac{1}{\pi^n \det(\mathbf{R}_n)} \exp\left\{-\text{Tr}[\hat{\mathbf{R}}_n \cdot \mathbf{R}_n^{-1}]\right\} \end{aligned} \quad (3)$$

其中样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{Z}_n \mathbf{Z}_n^H$, $E[\hat{\mathbf{R}}_n] = \mathbf{R}_n$ 。利用统计流形的定义可知,零均值多元高斯分布空间可以建立为 Toeplitz Hermitian 正定矩阵空间模型,后面简称复对称正定矩阵空间,表示为 $Sym(n, C)$ 。本文首先利用梯度下降算法计算 N

个协方差矩阵的黎曼均值 $\bar{\mathbf{R}}$,用于估计杂波环境。然后利用协方差矩阵间的黎曼距离,用于估计检测单元 \mathbf{R}_D 和参考单元的黎曼均值 $\bar{\mathbf{R}}$ 的可区分性。基于信息几何的单元平均 CFAR 检测器框图如图 1 所示。检测器的自适应判决准则为

$$D^2(\mathbf{R}_D, \bar{\mathbf{R}}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T \quad (4)$$

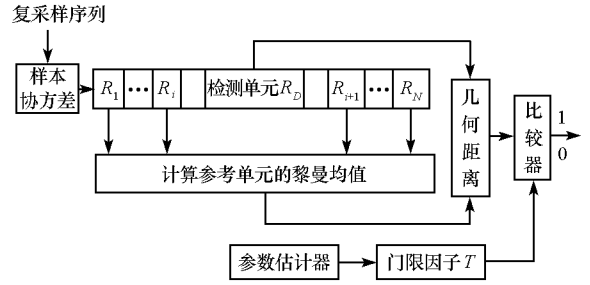


图 1 基于信息几何的单元平均 CFAR 检测器框图
Fig.1 CA-CFAR detector based on information geometry

2 复多元高斯分布模型的黎曼几何

通常概率分布空间可由其参数的集合 Θ 来描述,在一定的拓扑结构下参数的集合形成 C^m 上的一个流形 \mathcal{M} ,称为统计流形,概率分布的参数 θ 称为统计流形的自然坐标。概率分布空间表示为

$$\mathcal{F}_{\mathcal{M}} = \{p(\mathbf{x} | \theta) : \theta \in \mathcal{M}\} \quad (5)$$

Rao 利用 Fisher 信息矩阵定义了统计流形 \mathcal{M} 上的一个黎曼度量^[3],对于零均值复多元高斯分布,令协方差矩阵为 \mathbf{R}_n , Fisher 信息度量可以定量描述两个元素 \mathbf{R}_n 和 $\mathbf{R}_n + d\mathbf{R}_n$ 间的距离,信息度量可写为^[9]

$$ds^2 = \text{Tr}[(\mathbf{R}_n d\mathbf{R}_n^{-1})^2] \quad (6)$$

在所有连接流形上两点 θ_A, θ_B 的曲线中,距离最短的一条称为 θ_A, θ_B 的黎曼测地线;该最短的距离为 θ_A 和 θ_B 之间的黎曼距离,可描述两个分布的相似性。在 $Sym(n, C)$ 中任意两个元素 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的黎曼距离解析表达式^[8-9]为

$$\begin{aligned} D^2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \|\log(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})\|^2 \\ &= \|\log(\mathbf{A}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1/2})\|^2 \\ &= \text{Tr}[\log^2(\mathbf{A}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1/2})] \\ &= \sum_{k=1}^n \ln^2(\lambda_k) \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\|\cdot\|$ 为 Frobenius 范数, $\log(\cdot)$ 为矩阵对数, $\lambda_k (k = 1, \dots, n)$ 是矩阵 $\mathbf{A}^{-1/2} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1/2}$ 的 n 个特征值。与 Kullback-Leiber 差异量相比,它具有较好的性质^[8],如非负性、对称性、三角不等式、相合变换下的不变性和逆的不变性等。信杂比从 0dB 到

10dB 时,目标回波协方差矩阵与杂波协方差矩阵的黎曼距离如图 2 所示,其中,协方差矩阵由 8 个脉冲估计得到,黎曼距离为 1000 次仿真结果的平均值。可知,随着信杂比增大,目标与杂波协方差矩阵之间的黎曼距离增大,所以,设定一个门限,就可以从杂波中检测出目标信号。

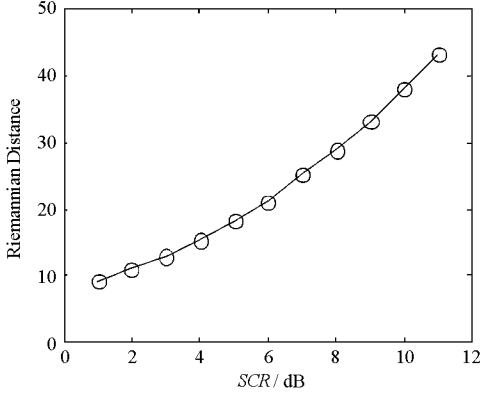


图 2 目标回波与杂波协方差矩阵的黎曼距离
Fig.2 Riemannian distance of covariance matrices between target return and clutter

通过分析,人们发现零均值多元高斯分布流形的局部曲率不是一个常数,更重要的是,它是非正的。Karcher 证明,对于非正局部曲率的流形,黎曼均值,也称作 Karcher 均值,存在且唯一^[6]。在信息几何框架下,黎曼均值的数值计算是一个重要的问题,其中,梯度下降算法是一种公认的计算方法^[8-9]。对于 N 个分布 $p(\cdot | \mathbf{R}_k)$,我们利用其协方差矩阵来表示该分布, $\mathbf{R}_k \in \text{Sym}(n, \mathcal{E})$, $k = 1, 2, \dots, N$, N 个协方差矩阵的黎曼均值定义为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} &= \arg \min_{\mathbf{R} \in \text{Sym}(n, \mathcal{E})} f(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N) \\ &= \arg \min_{\mathbf{R} \in \text{Sym}(n, \mathcal{E})} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D^2(\mathbf{R}_k, \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (8)$$

即如果 $\bar{\mathbf{R}}$ 使得经验方差表示的目标函数 $f(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N)$ 获得局部最小值, $p(\cdot | \bar{\mathbf{R}})$ 就定义为 N 个分布 $p(\cdot | \mathbf{R}_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$ 的黎曼均值。目标函数的梯度为^[8]

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \nabla D^2(\mathbf{R}_k, \bar{\mathbf{R}}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \nabla \|\log_m(\mathbf{R}_k^{-1} \bar{\mathbf{R}})\|^2 \\ &= \frac{\bar{\mathbf{R}}}{N} \sum_{k=1}^N \log_m(\mathbf{R}_k^{-1} \bar{\mathbf{R}}) \end{aligned} \quad (9)$$

为了计算黎曼均值,文献[8]直接利用测地线方程,取切向量的方向为目标函数的负梯度方向,较直观地得到了实对称正定矩阵情况下黎曼均值的梯度下降算法,文献[9]基于 Jacobi 场和指数映射,得到了梯度下降算法,两者的结果是一致的。

依据第一种方法,我们可以给出复对称正定矩阵情况下的梯度下降算法。

对任何 $\mathbf{R}(t) \in \text{Sym}(n, \mathcal{E})$, $t \in [0, \infty]$, 令 dt 为迭代的时间步长,切向量 $\mathbf{v} \in \text{TSym}(n, \mathcal{E})$ 由目标函数 f 的负梯度方向确定,即 $\mathbf{v} = -\nabla f$, 从 $\mathbf{R}(t)$ 出发指向切向量 \mathbf{v} 的测地线方程可以写为

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}(t + dt) \\ &= \mathbf{R}(t)^{1/2} \expm[dt \cdot \mathbf{R}(t)^{-1/2} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(t)^{-1/2}] \mathbf{R}(t)^{1/2} \\ &= \mathbf{R}(t)^{1/2} \expm[-dt \cdot \mathbf{R}(t)^{-1/2} \cdot \nabla f \cdot \mathbf{R}(t)^{-1/2}] \mathbf{R}(t)^{1/2}, \quad \forall dt \in [0, 1] \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\expm(\cdot)$ 为矩阵指数。利用 N 个协方差矩阵当前时刻的黎曼均值估计值 $\bar{\mathbf{R}}_t$ 表示 $\mathbf{R}(t)$, 则沿着流形的测地线方向,利用梯度下降算法迭代计算黎曼均值,式(10)变为

$$\bar{\mathbf{R}}_{t+1} = \bar{\mathbf{R}}_t^{1/2} \expm[-dt \cdot \bar{\mathbf{R}}_t^{-1/2} \cdot \nabla f \cdot \bar{\mathbf{R}}_t^{-1/2}] \bar{\mathbf{R}}_t^{1/2} \quad (11)$$

把式(9)代入式(11),得到

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbf{R}}_{t+1} \\ &= \bar{\mathbf{R}}_t^{1/2} \expm\left[-dt \cdot \frac{\bar{\mathbf{R}}_t^{1/2}}{N} \sum_{k=1}^N \log_m(\mathbf{R}_k^{-1} \bar{\mathbf{R}}_t) \bar{\mathbf{R}}_t^{-1/2}\right] \bar{\mathbf{R}}_t^{1/2} \end{aligned} \quad (12)$$

根据式(12),能够利用梯度下降算法迭代估计 N 个复对称正定矩阵 \mathbf{R}_k ($k = 1, 2, \dots, N$) 的黎曼均值 $\bar{\mathbf{R}}$ 。利用梯度下降算法计算矩阵均值,协方差矩阵黎曼均值的估计性能如图 3 所示,其中,“三角”符号表示算术均值的经验方差。由图 3 可知,直接平均方法的估计方差约为 7.1,经过 15 次左右的迭代,估计方差减小到了 6.1。梯度下降算法能保证均值估计的经验方差不断减少,利用经验方差作为估计精度的判断准则,我们可以选择满足精度要求的黎曼均值估计值。

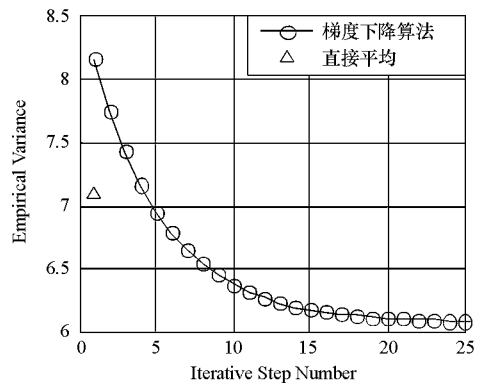


图 3 经验方差表示的矩阵黎曼均值迭代估计性能
Fig.3 Iterative estimation performance of matrix Riemannian mean by empirical variance

3 检测性能

由于虚警概率解析表达式难以得到,利用 Monte-Carlo 方法仿真得到门限因子,并存储为表格。计算步骤如下:

(1) 仿真产生杂波协方差矩阵 $N+1$ 个 ($N=16$),第 9 个作为检测单元的协方差矩阵 \mathbf{R}_D ,利用梯度下降算法计算其余 N 个协方差矩阵的均值 $\bar{\mathbf{R}}$ 。

(2) 计算两个协方差矩阵的距离 $D^2(\mathbf{R}_D, \bar{\mathbf{R}})$ 。

(3) 假设虚警概率 $P_{fa} (= 10^{-4})$,重复步骤 (1)、(2) $L (= 5 \cdot 10^5)$ 次,降序排序找出 $L \cdot P_{fa}$ 个最大值 $M_k, k = 1, \dots, L \cdot P_{fa}$ 。门限记为 $T = \min \{M_k, k = 1, \dots, L \cdot P_{fa}\}$ 。

在短时间序列情况下,典型为 8 个脉冲,假设杂波方差等于 1,在虚警概率 $P_{fa} = 10^{-4}$ 情况下,比较信息几何方法与常规检测方法对斯威林 0 型和 I 型起伏目标的检测性能。经过 10 次仿真,取平均值可得门限因子 T 为 36.8。信息几何方法与常规检测方法的检测曲线如图 4 所示,其中,常规方法为在 FFT 后进行单元平均 CFAR 处理。由图 4 可知,在 80% 的检测概率处,对非起伏目标,信息几何方法需要单脉冲信杂比 9.2dB,常规检测方法需 12dB,信杂比改善 2.8dB。对斯威林 I 型目标,信息几何方法需要单脉冲信杂比 15.6dB,常规检测方法需 17.4dB,信杂比改善 1.8dB。可知,在雷达信号检测应用中,通过使用度量空间代替赋范平直空间(平坦空间,曲率张量为零的空间)来处理对称正定协方差矩阵,在一定条件下能改善信号处理算法的性能。

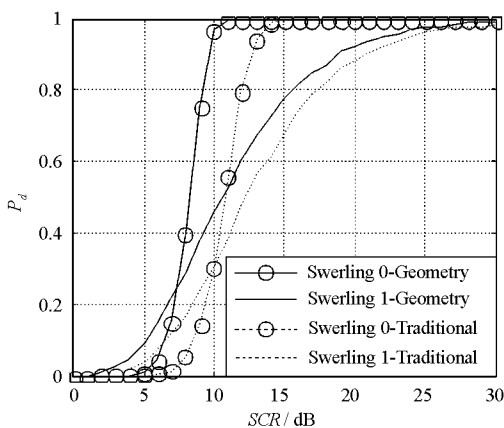


图 4 信息几何方法与常规单元平均方法的检测性能
Fig.4 Detection Performance Comparison of Information Geometry and Conventional Method

4 小结

本文研究了信息几何方法在高斯杂波背景下的目标检测问题,研究表明,当目标回波为短脉冲序列时,该方法优于常规检测方法,这一结论对于扩展信息几何方法在雷达探测技术领域的应用具有重要指导意义。从数学原理上看,目标回波的协方差矩阵为 Toeplitz Hermitian 正定矩阵,它构成负曲率空间,适合利用信息几何方法研究它的几何结构,因此与常规赋范平直空间上的处理相比,信息几何方法具有较好的检测性能。该方法适用于采用机械扫描体制的防空预警雷达、海面监视雷达等应用场合。信息几何在多普勒雷达信号处理等方面具有广阔的应用前景,也有较多问题亟须解决,比如,在非高斯杂波概率分布流形上几何结构的研究、利用更多的几何特性用于信息处理等问题。

参考文献:

- [1] 仲锋惟,孙华飞,张真宁. Fisher Z 分布流形的几何结构[J]. 科技导报, 2007, 25(9):33-36.
- [2] Change C A, Time and Information Geometry[C]//Proc. Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering, 2000, 568:72-82.
- [3] Rao C. Information and Accuracy Attainable in the Estimation of Statistical Parameters[J]. Bull. Calcutta Math. Soc., 1945, 37: 81-91.
- [4] Amari S, Nagaoka H. Methods of Information Geometry[M]. England: Oxford University Press, 2000.
- [5] Moakher M. A Differential Geometric Approach to the Geometric Mean of Symmetric Positive-Definite Matrices[J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2002, 24(1): 735-747.
- [6] Penec X. Intrinsic Statistics on Riemannian Manifolds: Basic Tools for Geometric Measurements[J]. J. Math Imaging Vis, 2006, 25: 127-154.
- [7] 刘蕴辉. 基于信息几何的神经网络学习问题研究[D]. 北京:北京交通大学,2005.
- [8] Lenglet C, Rousson M, et al. Statistics on the Manifold of Multivariate Normal Distributions: Theory and Application to Diffusion Tensor MRI Processing[J]. J. Math Imaging Vis, 2006: 423-444.
- [9] Barbaresco F. Interactions Between Symmetric Cone and Information Geometries: Bruhat-tits and Siegel Spaces Models for High Resolution Autoregressive Doppler Imagery[C]//ETVC'08 Conf., Ecole Polytechnique, Nov. 2008, Published by Springer, in Lecture Notes in Computer Science, 2009, 5416:124-163.
- [10] Fletcher P T, Lu C, Joshi S. Statistics of Shape via Principal Geodesic Analysis on Lie Group [C]//Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, 2003: 91-101.
- [11] Barbaresco F, Rivereau N. Diffusive CFAR & its Extension for Doppler and Polarimetric Data [C]//2007 IET International Conference on Radar Systems, 2007:1-5.
- [12] 刘勇,李永祯,王雪松,等. 雷达目标全极化一维距离像的瞬时测量方法[J]. 国防科技大学学报, 2008, 30(5):43-48.