

文章编号: 1001-2486(2011)02-0150-07

基于迎风型有限体积法的非结构化网格流场 格心数据高质量体绘制方法

马千里¹, 李思昆¹, 白晓征², 曾亮¹, 徐华勋¹

(1. 国防科技大学 计算机学院, 湖南 长沙 410073; 2. 国防科技大学 航天材料与工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:在计算流体力学领域,对复杂流场进行数值模拟时常用非结构化网格划分空间,并广泛采用迎风型有限体积法求解流场。该方法将数值解存储在非结构化网格单元(控制体)中心,产生格心数据,并假设物理量在相邻单元邻接面上形成“间断”。然而,在可视化此类数据时,目前的重构方法破坏了间断约束,导致“流间断”信息丢失,严重制约了绘制质量。为此,在多遍光线投射算法框架下,设计了基于双控制体的采样点间断态重构方法,确保了邻接面上产生间断的流场值,使重构结果如实反映数值计算结果;并针对该重构过程,设计了基于间断片段的图像合成方案,将数值解中的“流间断”信息传递给绘制数据。实验表明,方法能显著提高绘制质量,清晰准确地显示流场内部特征。

关键词:流场可视化;迎风型有限体积法;非结构化网格;格心数据;体绘制

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A

High-quality Volume Rendering of Unstructured-grid Cell-centered Data of Flow Fields Based on Upwind FVM

MA Qian-li¹, LI Si-kun¹, BAI Xiao-zheng², ZENG Liang¹, XU Hua-xun¹

(1. College of Computer, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In the field of computational fluid dynamics, the upwind finite volume method (FVM) is widely applied to solve the complicated flows with unstructured grids as the volumetric representation. It produces unstructured-grid cell-centered data at the center of each cell(control volume)with the flow discontinuity constraint on the inner-face between face-adjacencies. For visualization, existing reconstruction approaches violate the discontinuity constraint. As a result, the image has low quality due to the lost information of the discontinuity. This research presented a method to reconstruct the discontinuous states at a sample based on the dual control volumes on the framework of multi-pass raycasting. It guarantees that the field on the inner-face is discontinuous between face-adjacencies, which is in accord with the solution of the numerical computation. We also designed a synthesizer for the discontinuous segments based on the reconstruction above, so that the discontinuity information can be transferred to rendering data. The experiments demonstrate that our approach can obviously improve the image quality and clearly visualize the features in the flows.

Key words: flow visualization; upwind FVM; unstructured grids; cell-centered data; volume rendering

目前,在计算流体力学(CFD)领域,对复杂流场进行数值模拟时,常用非结构化网格(尤其是四面体网格)划分空间,并以此为基础,采用迎风型有限体积法(FVM)求解流场^[1-2,5]。该方法假设物理量在单元邻接面上形成“间断”,产生包含“流间断”信息的非结构化网格格心数据。迎风型有限体积法将FVM计算方法和迎风格式相结合,近年来发展十分迅速并得到广泛应用。FVM往往将数值解存储在非结构化网格单元(控制体)中

心,产生格心数据(如图1(a))。真实流场常包含激波等重要的流动间断现象,早期的数值计算假设物理量连续变化,因此无法准确模拟流场特征。直到1959年,Godunov假设物理量处处间断,提出了著名的Godunov格式^[3],使数值计算精度大为提高。此后,基于间断性假设的多种计算格式相继提出并逐步完善,统称为迎风格式(upwind scheme)^[1-2,5]。

事实上,目前的可视化方法(包括体绘制、等

* 收稿日期:2010-09-20

基金项目:国家973项目(2009CB723803);国家自然科学基金资助项目(60873120)

作者简介:马千里(1983—),女,博士生。

值面提取、流线跟踪等)与迎风型 FVM 的间断思想存在不容忽视的矛盾。由于这些方法只能直接基于格点数据(如图 1(b)),通过插值方法完成数据重构,因此在绘制格心数据时,必须采用外推技术将格心数据转换为格点数据后再进行数据重构^[4,11-12],该过程破坏了迎风型 FVM 的间断约束。以非结构化网格体绘制算法为例(如图 2),为重构采样点(位于单元面上)处的流场值,目前的可视化方法或者通过面上各顶点数据,采用全线性插值方法实现重构^[6,10];或者通过某一顶点数据和单元梯度实现重构^[7-8],两者的重构结果导致物理量在相邻单元间“连续”变化。然而,迎风型 FVM 认为:邻接面上的物理量因受相邻控制体的影响而产生“间断”。因此,目前的重构方法与迎风型 FVM 的基本思想相矛盾,导致“流间断”信息丢失,严重制约了绘制质量。

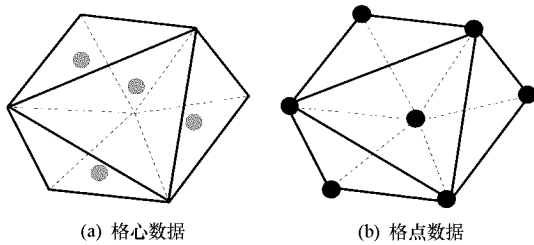


图 1 非结构化网格流场数据格式
Fig.1 Data formats of unstructured-grid fields

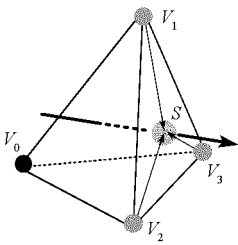


图 2 全线性插值
Fig.2 Full-linear interpolation

为提高绘制质量,本文以光线投射算法为框架,设计了基于双控制体的采样点间断态重构方法和基于间断片段的图像合成方案:在数据重构阶段,考虑相邻控制体对邻接面上物理量的影响,分别用两侧单元格心数据(胞心值)及单元梯度直接重构(避免外推)邻接面上采样点处的流场,获得该点处流场的间断态(称为左态和右态,两者相近但不等),从而揭示原始数值解中蕴含的“流间断”信息,使重构结果如实反映数值计算结果。在图像合成阶段,针对上述重构方法,设计了基于间断片段的采样点合成方案,将数值解中的“流间断”信息传递给绘制数据。另外,本文的数据重构思想不局限于体绘制,对于其他可视化方法(如等

值面提取、流线跟踪)也同样适用。实验结果表明,本文方法能显著提高绘制质量,清晰准确地显示流场内部特征。文章结构如下:第 2 节以体绘制算法为例,论述目前流场数据重构方法与迎风型 FVM 间断思想的矛盾性;第 3 节阐述本文算法流程;第 4 节详述采样点数据重构原理及相关计算方法;第 5、6、7 节分别是采样点合成方案、实验结果和结论。

1 目前数据重构方法与迎风型 FVM 的矛盾性

1.1 流场数据重构方法

在经外推计算将格心数据转换为格点数据后,为重构单元面上采样点的流场值,目前主要有两种重构计算方法:基于面顶点的全线性插值^[6,10]和基于单元顶点的线性梯度重构^[7-8]。后者是为降低前者的计算开销,本质上,两者的重构结果相同^[7]。

如图 2,假设某单元顶点为 V_0, V_1, V_2, V_3 , 采样点 S 位于 V_1, V_2 和 V_3 构成的单元面上。假设外推计算后顶点 $V_k (k \in \{0, 1, 2, 3\})$ 的流场值为 Q_{V_k} 。基于面顶点的全线性插值方法用顶点 V_1, V_2 和 V_3 的位置和流场值及采样点位置做全线性插值计算,求得采样点 S 的流场值 Q_S 。为降低全线性插值计算量,基于单元顶点的线性梯度重构方法先通过各顶点数据计算单元梯度(记作 ∇Q),再选取某一顶点为参考点,采用基于参考顶点的线性梯度重构方法求得采样点处的流场(如图 3)。在梯度计算时,采用距离加权法,建立顶点位置和流场值间的代数方程组(r_{V_k} 为顶点位置, $\nabla Q = (Q_x, Q_y, Q_z)$):

$$Q_{V_k} = Q_{V_0} + \nabla Q \cdot (r_{V_k} - r_{V_0}) \quad (1)$$

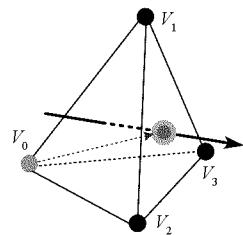


图 3 基于单元顶点的线性梯度重构
Fig.3 Cell-vertexed data based linear gradient reconstruction

此后,任选单元某顶点为参考点(假设是 V_0),采用基于参考顶点的线性梯度重构方法(假设物理量在单元内呈线性变化)计算采样点流场值(r_S 为采样点位置):

$$Q_S = Q_{V_0} + \nabla Q \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_{V_0}) \quad (2)$$

1.2 矛盾性分析

如图4,假设单元 L 和单元 R 具有面相邻关系, S 是邻接面上任意采样点。首先采用式(1)计算单元 L 的梯度 ∇Q_L ;再以顶点 L_0 为参考点,用其位置 \mathbf{r}_{L_0} 和流场值 Q_{L_0} 以及梯度 ∇Q_L ,采用式(2)计算 S 处的流场值(记作 Q_S^L):

$$Q_S^L = Q_{L_0} + \nabla Q_L \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_{L_0}) \quad (3)$$

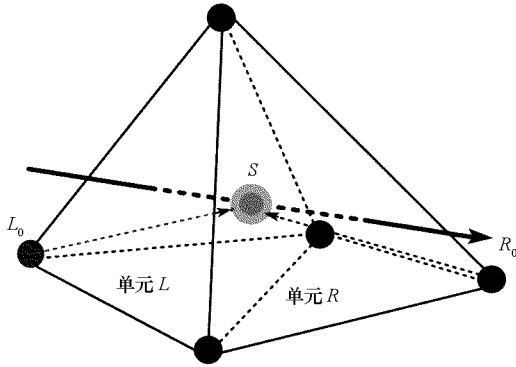


图4 目前方法的矛盾性分析示意图
Fig.4 Schematic diagram of the conflict analysis for existing methods

同理,若用单元 R 的参考顶点(假设是 R_0)和单元梯度 ∇Q_R 来重构 S 处的流场值(记作 Q_S^R),计算结果表明 $Q_S^L \neq Q_S^R$ (见表2),故上述重构方法导致物理量在相邻单元间“连续”变化。但迎风型 FVM 假设物理量在单元邻接面上形成“间断”,并将这种“流间断”信息蕴含在数值解中,即理论上 $Q_S^L \neq Q_S^R$ 。因此,目前重构方法丢失了“流间断”信息,与迎风型 FVM 基本思想相矛盾,存在明显的不合理性。

2 算法设计

多遍光线投射算法是实现非结构化网格数据体绘制的重要途径^[7,9]。本文以此为框架,针对非

结构化网格格心数据,设计实现了基于双控制体的采样点间断态重构方法和基于间断片段的图像合成方法。对于视点方向上的每条光线,算法在每次循环中对一个单元进行采样(采样点为单元出口),重构采样点处流场的间断态(左态和右态),并将重构结果转换成光学属性(颜色和不透明度),累加到相应像素。图5为算法的单遍(一次循环)绘制流程,具体步骤为:

Step 1 基于双控制体的采样点间断态重构(第4节)。

Step 1.1 计算采样点位置:判断单元出口面、计算单元出口位置并确定出口单元。

Step 1.2 构造面通量并计算单元梯度:用相邻单元胞心值的算术平均值构造面通量(面心处流场值);基于面通量构造结果,采用格林公式计算单元梯度(第4.2节)。

Step 1.3 重构采样点间断态:根据重构原理(4.1节),分别用相邻单元胞心值和梯度重构采样点处流场的流场值,得到左态和右态。其中左态用于本次循环合成,右态用于下次循环合成。

Step 2 基于间断片段的图像合成(第5节)。

Step 2.1 组装采样片段:恢复算法前次循环中单元出口(即当前单元入口)位置;通过当前单元入口和出口位置计算光线在单元内的相交线段长度;将当前单元入口右态(在上次循环中计算)和出口左态以及相交线段长度组成“间断片段”。

Step 2.2 图像合成:采用预积分颜色合成框架^[7,13],用“间断片段”索引预先创建的3D预积分颜色查找表,完成采样数据的颜色转换与合成。

此外,实体模型(如机翼)表面往往构成流场内边界,形成非凸网格。本文利用深度剥离(depth-peeling)技术^[8]计算光线多次进入非凸网格的体入口。同时,本算法支持提前中止光线,能在像素不透明度接近1时,提前结束光线,避免不必要的重构与合成运算。

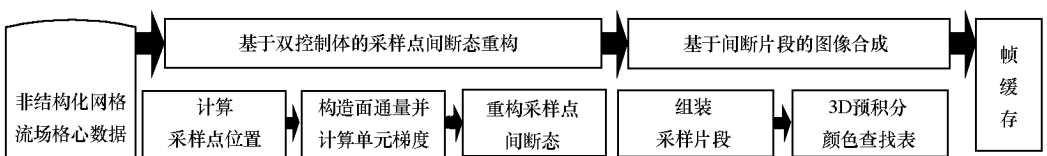


图5 算法流程(一次循环)
Fig.5 Algorithm overview (one pass)

3 基于双控制体的流场间断态重构

算法通过光线与单元的求交计算,可确定出口位置,即采样点位置。此后,按照采样点间断态

重构原理计算采样点流场的左态和右态(4.1节)。其中,单元梯度采用基于面通量的格林公式计算(4.2节)。表2给出了本文方法的重构结果,不难发现,左态和右态相近但不等,即该方法

能够揭示数值解中蕴含的“流间断”信息,使重构结果如实反映数值计算结果。

3.1 间断态重构原理

迎风型 FVM 认为:邻接面上的物理量因受相邻控制体的影响而产生“间断”。以间断思想为基础,通过相邻控制体胞心值,精确构造其邻接面上的面通量,是迎风型 FVM 求解流场的关键^[1-2,5],也是本文实现非结构化网格流场格心数据高质量体绘制的思想来源。由于非结构化网格光线投射算法往往在光线与单元面交点处采样,因此,为使重构结果满足间断性,保存“流间断”信息,本文分别用相邻单元(记作“左单元”和“右单元”)胞心值重构邻接面上采样点的流场值。

如图 6,光线在行进过程中与单元 C_l (左单元)和 C_r (右单元)相交,其格心分别为 C_l 和 C_r , S 是邻接面上的采样点。若用 Q 表示物理量,重构过程是:由左单元胞心值 Q_{C_l} 和单元梯度 ∇Q_{C_l} 重构采样点 S 处的流场,产生左态(记作 Q_s^L);由右单元胞心值 Q_{C_r} 和单元梯度 ∇Q_{C_r} 重构采样点 S 处的流场,产生右态(记作 Q_s^R)。假设物理量在单元内呈线性变化,采样点 S 处流场的左态和右态可近似为:

$$Q_s^L = Q_{C_l} + \nabla Q_{C_l} \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_{C_l}) \quad (4)$$

$$Q_s^R = Q_{C_r} + \nabla Q_{C_r} \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_{C_r})$$

其中, \mathbf{r}_{C_l} 、 \mathbf{r}_{C_r} 和 \mathbf{r}_s 分别是左右单元格心位置和采样点位置。重构结果表明: $Q_s^L \approx Q_s^R$, 但 $Q_s^L \neq Q_s^R$ (见表 2)。这种由双控制体重构邻接面上流场值的方法数值计算过程紧密结合,充分反映了迎风型 FVM 的间断思想,能够获得与数值计算相一致的采样点重构结果。故从理论上讲,在此基础上进行采样点合成后,本文的绘制结果能够清晰准确的显示流场内部特征,帮助用户准确的洞察和分析数值计算结果。

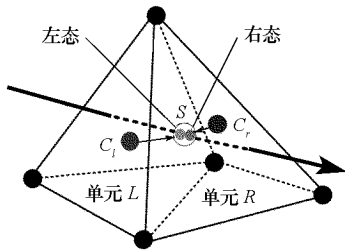


图 6 采样点间断态重构原理图

Fig. 6 Principle of the discontinuous states reconstruction

3.2 面通量构造与梯度计算

FVM 将连续域上的流体控制方程在每个控制体(单元)内积分,建立离散化代数方程组,从而

求解流场,其物理含义是物理量在有限大小控制体内的守恒原理。对于式(4)中的单元梯度 ∇Q_{C_l} (∇Q_{C_r}),本文采用基于面通量的格林公式计算。该方法不仅符合 FVM 的守恒性原理,而且具有良好的灵活性和适应性,即便对扁平单元也能获得高精度的梯度计算结果^[2,5],进一步提高重构精度。

如图 7,假设单元 C_0 与单元 C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 面相邻, V 和 S 分别是单元 C_0 的体积和表面积。 S_k 和 \mathbf{n}_k 分别是其各面的面积和法向 ($k = 1, 2, 3, 4$), Q_k 是单元 C_0 与 C_k 邻接面上的面通量。根据格林公式,单元 C_0 内流场梯度 ∇Q 满足下式:

$$\int_V \nabla Q dV = \oint_S (Q_k \cdot \mathbf{n}_k) dS \quad (5)$$

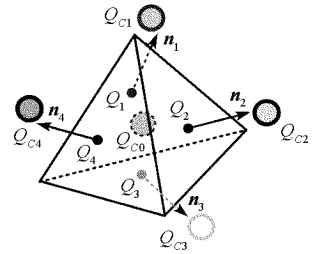


图 7 单元梯度计算原理图

Fig. 7 Principle of cell-gradient computation

式(5)可离散化为如下方程:

$$V \cdot \nabla Q = \left(\sum_{k=1}^4 Q_k \cdot \mathbf{n}_k \cdot S_k \right) \quad (6)$$

对上式中的面通量 Q_k ,本文基于面 k 处的相邻单元 C_0 和 C_k 的胞心值,采用算术平均法来构造,即 $Q_k = (Q_{C_0} + Q_{C_k})/2$ 。

4 基于间断片段的图像合成

采用上述方法重构出采样点处流场的间断态后,需设计相应的颜色转换与合成方案,将采样数据映射成颜色并累加到相应像素,从而将数值解中的“流间断”信息传递给绘制数据,合成最终的体绘制图像。为此,本文采用预积分颜色合成框架^[7,13],针对上述重构过程,设计了基于间断片段的采样点合成方案:将当前单元入口流场右态、出口流场左态及光线的相交线段长度组装成“间断片段”,以此作为索引,查找预先创建的 3D 预积分颜色查找表(3D LUT),同时完成颜色转换与合成。此处,预积分颜色查找表是以单元入口右态和出口左态以及相交线段长度为自变量的 3D 传递函数。

如图 8,假设当前单元 C_c 与其入口单元 C_l 、出口单元 C_n 是沿光线方向上的面相邻单元(格

心分别为 C_c 、 C_l 和 C_n)。如前所述,通过式(4),算法在本次循环的重构阶段,分别用当前单元(C_c)和出口单元(C_n)的胞心值及梯度重构当前单元出口(S_{on})处的流场值,产生左态 $Q_{S_{on}}^L$ 和右态 $Q_{S_{on}}^R$ 。在本次循环的合成阶段,首先需要恢复当前单元入口的右态。当前单元入口(S_k)处流场的右态是算法前次循环时用出口单元 C_c (相对于单元 C_l)的胞心值和梯度重构的单元 C_l 出口(S_k)处流场的右态 $Q_{S_k}^R$ 。然后,将当前单元 C_c 入口处流场的右态 $Q_{S_k}^R$ 、出口处流场的左态 $Q_{S_{on}}^L$ 和当前“相交线段”长度组成“间断片段”,以此作为本次 3D LUT 的索引,获得当前单元对像素颜色的贡献。

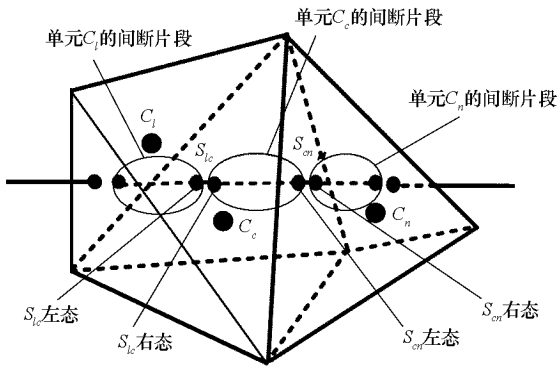


图 8 基于间断片段的图像合成原理图
Fig. 8 Principle of synthesizing based on discontinuous segment

综上所述,对于同一采样点,基于间断片段的采样点合成方案在相邻单元内使用不同的流场值(间断态)作为 3D LUT 的索引,从而沿光线方向上形成一系列“流场值间断”而“位置连续”的“间断片段”(如图 8),合成最终的体绘制图像。

5 测试数据与实验结果

如前所述,基于双控制体的采样点间断态重构方法与迎风型 FVM 求解思想紧密结合,能揭示数值解中的“流间断”信息,并通过颜色转换与合成,将其传递给绘制数据,从而提高体绘制质量。为验证算法正确性,本文用某实际工程中的流场数值模拟结果作为测试数据,对比目前方法和本文方法在采样点重构结果和绘制效果上的差异。

5.1 测试数据

图 9 显示了某单机翼周围流场的网格模型(包含 7 342 个网格顶点,35 812 个四面体单元),数值计算采用迎风型 FVM 求解器,模拟的物理量有密度(标量)、速度(矢量)和压强(标量)。表 1 给出了目前方法和本文方法的部分单元梯度计算结果,其中的两组面相邻单元分别是单元 4 和单

元 6、单元 9 和单元 16。在此基础上,表 2 给出了两种方法的采样点重构结果。不难发现,在同一采样点处,本文方法能够获得该点处流场的间断态,即左态和右态相近但不等,从而揭示数值解中的“流间断”信息。然而,目前方法(采用精度较高的反转距离外推和基于单元顶点数据的线性梯度重构)获得的物理量值在相邻单元间“连续”变化,没有将数值解中的“流间断”信息传达给绘制数据,导致信息损失。由于图像合成过程将累加每次循环后的重构结果,因此,多步信息损失将对最终的体绘制结果产生重要影响。

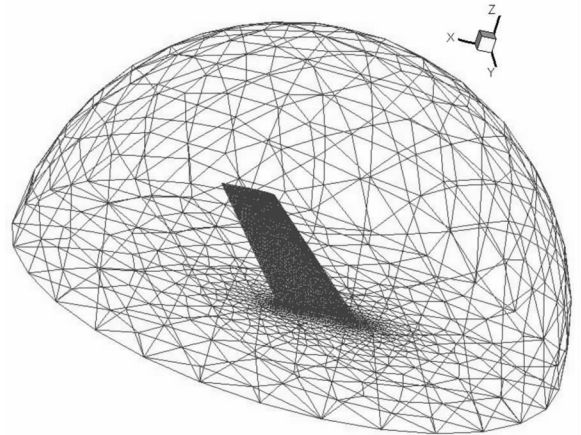


图 9 测试数据网格模型
Fig. 9 Grid model of the test data

5.2 实验结果

本文在配置为 Intel Pentium Dual 1.60GHz 处理器、2G 内存和 NVIDIA GeForce9800 GTX 显卡的 PC 机器上,基于 Visual C++ .net 2005 开发环境,实现了上述算法。算法采用了 GPU 加速,对较大规模的非结构化网格流场格心数据,体绘制性能可满足实时交互(本文方法对上述测试数据进行绘制的速度为 75.8 帧/s)。

对上述测试数据,分别采用目前方法和本文方法进行绘制,图 10 为绘制效果对比图。由左至右分别是密度场、压力场和速度场(x 方向分量)。在相同的 3D 传递函数下,图 10(a)~(c)是基于外推产生的格点数据完成重构计算后的绘制效果;图 10(d)~(f)是采用本文的重构计算与合成方法,基于原始格心数据的绘制效果。对比两者,不难发现,本文方法能更加清晰而准确地显示流场的内部结构和重要特征,帮助用户更加有效地洞察和分析数值计算结果。例如,与图 10(b)相比,图 10(e)更为清晰地显示了机翼周围的激波特征,其激波边界更为明显(图中椭圆标注部分)。

表 1 两种方法单元梯度计算结果

Tab.1 Cell-gradient results of the two methods

单元点	格林公式		距离加权法		单元点	格林公式		距离加权法	
	格心数据	梯度($e-3$)	顶点数据	梯度($e-3$)		格心数据	梯度($e-3$)	顶点数据	梯度($e-3$)
2768			1.014357		2780			1.007574	
2769	(0.640540,		1.012987	(0.754504,	2781	(0.239694,		1.005093	(0.247747,
4	1.015037	0.851340,		0.898326,	9	1.006362	-0.373142,		-0.377098,
2770		-1.002823)	1.018783	-1.13454)	2783		-0.558269)	1.005470	-0.607823)
2762			1.011795		2782			1.007970	
2762			1.011795		2781			1.005093	
2762			1.011795		2781			1.005093	
2768	(0.054958,		1.014357	(0.010912,	2788	(0.213790,		1.003925	(0.257945,
6	1.011404	0.186013,		0.099066,	16	1.005880	-0.450802,		-0.506056,
2769		-0.528579)	1.012987	-0.409096)	2780		-0.519418)	1.007574	-0.626341)
2767			1.009827		2783			1.005470	

表 2 两种方法重构结果

Tab.2 Reconstruction results of the two methods

单元 L	单元 R	采样点位置($e-2$)	目前方法	本文方法	
				左态	右态
单元 4	单元 6	(2.259117, -1.483397, 2.602748)	1.013059	1.013078	1.011052
单元 9	单元 16	(-0.340136, 0.234371, 2.127173)	1.006051	1.005849	1.007018

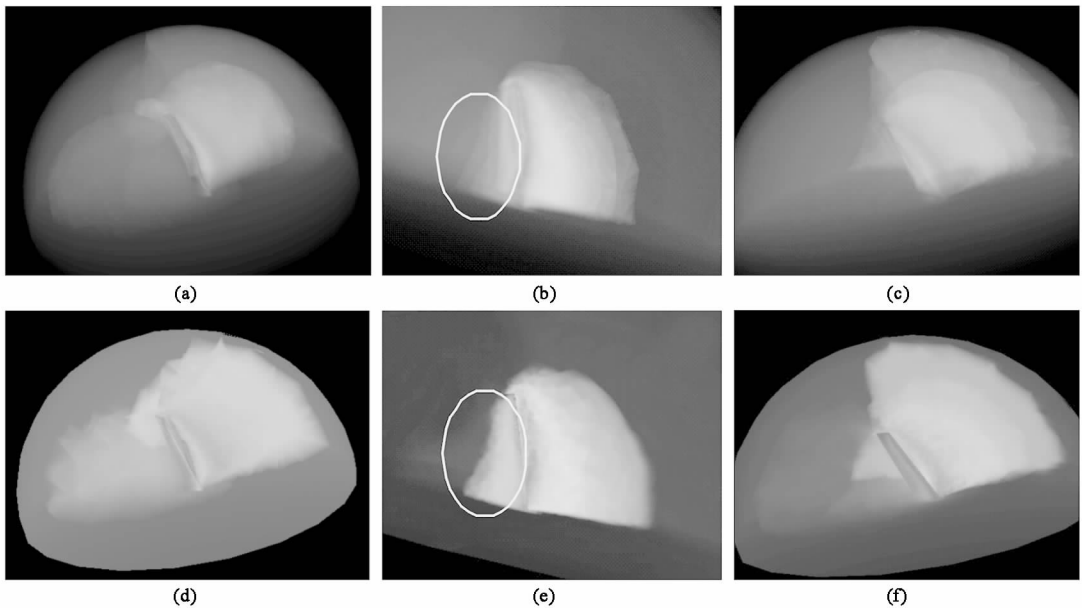


图 10 目前方法与本文方法的体绘制效果对比图

Fig.10 Contrasts of the results between existing methods and ours on the framework of volume rendering

6 结论

流场可视化的目的是为数值计算结果提供准

确、可靠的图形显示。因此,在设计可视化算法时,必须对相应的数值计算方法给予重视,并对不同类型和特点的数值解加以区分。针对目前流场

数值模拟产生的大量非结构化网格格心数据,区别于目前主流的基于外推的可视化方法,本文通过研究此类数据的求解过程(迎风型 FVM),提出了基于双控制体的采样点重构方法和基于间断片段的图像合成方法。同时,使用实际工程数据测试了本文重构方法的正确性与合理性,并通过实验验证了本文的体绘制质量明显优于目前方法,能帮助用户准确分析数值计算结果,有效洞察流场特征。

参 考 文 献:

- [1] 阎超. 计算流体力学方法及应用[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006: 172 - 179.
- [2] 刘儒勋, 舒其望. 计算流体力学的若干新方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 99 - 121.
- [3] Godunov S K. A Difference Scheme for Numerical Computation Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations[J]. *Matematicheskii Sbornik*, 1959, 47(3): 271 - 306.
- [4] Correa C D, Hero R, Ma K L. A Comparison of Gradient Estimation for Volume Rendering on Unstructured Meshes[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2009, 15(6): 1 - 15.
- [5] Frink N T, Parikh P, Pirzadeh S. A Fast Upwind Solver for the Euler Equations on Three-dimensional Unstructured Meshes[R]. Technical Report, 1991, AIAA - 91 - 0102.
- [6] Garrity M P. Raytracing Irregular Volume Data[C]//Proceedings of the 1990 Workshop on Volume Visualization, San Diego, California, IEEE Computer Society, 1990, 24(5): 35 - 40.
- [7] Weiler M, Kraus M, Merz M, et al. Hardware-based Ray Casting for Tetrahedral Meshes[C]//The 14th IEEE Visualization 2003 Conference, Seattle, Washington, IEEE Computer Society, 2003: 333 - 340.
- [8] Bernardon F F, Pagot C A, Comba J L D, et al. GPU-based Tiled Raycasting Using Depth Peeling[J]. *Journal of Graphics Tools*, 2006, 11(4): 1 - 16.
- [9] Silva C T, Comba J L D, Callahan S P, et al. A Survey of GPU-based Volume Rendering of Unstructured Grids[J]. *Brazilian Journal of Theoretic and Applied Computing*. 2005, 12(2): 9 - 29.
- [10] Bunyk P, Kaufman A, Silva C T. Simple, Fast, and Robust Ray Casting of Irregular Grids[C]//Proceedings of IEEE Visualization 1997, Phoenix, Arizona, IEEE Computer Society, 1997: 30 - 36.
- [11] Muigg P, Hadwiger M, Doleisch H, et al. Scalable Hybrid Unstructured and Structured Grid Raycasting[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* 2007, 13(6): 1592 - 1599.
- [12] Max N, Correa C, Muelder C, et al. Flow Visualization in Science and Mathematics[J]. *Journal of Physics*, 2009, 180(1): 012087 - 012096.
- [13] Rottger S, Kraus M, Ertl T. Hardware-accelerated Volume and Isosurface Rendering Based on Cell-projection[C]//Proceedings of IEEE Visualization 2000, Salt Lake City, Utah, IEEE Computer Society and ACM, 2000: 109 - 116.