

文章编号: 1001 - 2486(2011)04 - 0048 - 03

低轨预警自由段弹道估计的多项式逼近算法*

李 冬¹, 易东云¹, 程洪玮², 周 伟³

(1. 国防科技大学理学院, 湖南长沙 410073; 2. 北京跟踪与通信技术研究所, 北京 100094;
3. 91708 部队司令部自动化办, 广东广州 510320)

摘要: 低轨单星对自由段弹道的估计是天基预警系统需解决的关键技术之一。建立了低轨预警卫星对自由段弹道的观测模型, 针对极大似然估计批处理算法的大运算量问题, 给出了一种多项式逼近算法, 由观测数据的逼近多项式在一些特定采样点的值形成伪观测数据, 以伪观测数据代替原观测数据进行弹道估计。仿真表明, 精度与极大似然估计相当, 运算量显著降低。

关键词: 低轨预警卫星; 弹道估计; 多项式逼近
中图分类号: TP274 **文献标识码:** A

A Polynomial Approximation Algorithm for Free-Fight Trajectory Estimation under the Early Warning of LEO Satellite

LI Dong¹, YI Dong-yun¹, CHEN Hong-wei², ZHOU Wei³

(1. College of Science, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. Beijing Institute of Tracking and Telecommunication Technology, Beijing 100094, China;
3. Automatization Office of No.91708 Military Command, Guangzhou 510320, China)

Abstract: The free-flight trajectory estimation by a single LEO satellite plays a key role in the space-based early warning system. An actual measurement function was established, and a polynomial approximation algorithm was proposed to reduce the computational amount of the batch algorithm of maximum-likelihood estimation (MLE). The approximate polynomial of the measurement function was evaluated at some deterministic instants to form pseudo measurement data. The raw measurement data were replaced by the pseudo ones to estimate the trajectory. The simulation results show that this new algorithm greatly reduces the computational amount, and can achieve the same accuracy performance as MLE.

Key words: LEO early warning satellite; trajectory estimation; polynomial approximation

导弹威胁成为当今世界的主要威胁之一, 天基红外低轨预警星座因具有较长时间对弹道导弹飞行中段进行连续跟踪的能力而越来越得到重视^[1]。低轨预警卫星通过红外相机获得目标的视线(LOS)测量信息, 实现对自由飞行段弹道的估计。在预警星座部署阶段或目标数量较多时, 单星观测情形经常发生, 低轨单星对自由段弹道估计问题是天基预警系统需解决的关键技术之一。

弹道估计的常用算法是 EKF、UKF 等非线性实时滤波算法^[2], 由于预警卫星无法获得目标的距离测量, 在单星观测条件下, 可观性较弱, 滤波算法收敛所需的观测弧段较长, 估计精度不高。基于极大似然估计(MLE)的批处理算法利用全部观测量对弹道初始时刻状态进行估计^[3], 估计精度虽高, 但需要迭代求解, 测量数据较多时计算量很大, 在天基预警弹道估计中的应用受到限制。针对基于单星观测的弹道估计算法中存在的问

题, 本文引入一种 MLE 的多项式逼近(PAML)算法^[4]。

1 自由段弹道模型和预警卫星观测模型

大气阻力和地球引力的高阶摄动项对自由段导弹的飞行影响微小, 我们只需考虑 J_2 项摄动的作用。设导弹在 J2000ECI 下的位置、速度为 $\mathbf{X} = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$, 应满足的运动方程为

$$\begin{cases} dx/dt = \dot{x}, dy/dt = \dot{y}, dz/dt = \dot{z} \\ \dot{\dot{x}}/dt = -\mu x \{1 + 3J_2(r_e/r)^2(1 - 5(z/r)^2)/2\}/r^3 \\ \dot{\dot{y}}/dt = -\mu y \{1 + 3J_2(r_e/r)^2(1 - 5(z/r)^2)/2\}/r^3 \\ \dot{\dot{z}}/dt = -\mu z \{1 + 3J_2(r_e/r)^2(3 - 5(z/r)^2)/2\}/r^3 \end{cases} \quad (1)$$

* 收稿日期: 2011 - 01 - 17
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60974124)
作者简介: 李冬(1983—), 男, 博士生。

其中 μ 为地心引力常数, r_e 为地球平均赤道半径, J_2 为摄动系数, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 给定初始值 $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T$, 方程(1)的解记为 $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0)$, 可采用四阶 Runge-Kutta 法得到。

红外跟踪传感器能够得到空间目标在像平面的位置, 进而得到目标相对于卫星的视线(LOS)测量信息, 包括预警卫星星体坐标系下的方位角和俯仰角两个观测量^[5-6]。设 t 时刻 J2000 ECI 到预警卫星星体坐标系的变换矩阵为 S , 预警卫星和目标在 J2000 ECI 下的位置坐标分别为 $\mathbf{r}_s(t)$ 和 $\mathbf{r}_m(t)$, 由方程(1), $\mathbf{r}_m(t)$ 是 X_0 和 t 的函数, 在预警卫星星体坐标系下, 目标的位置坐标记为 $\mathbf{r}_{MS}(t) = (x_{ms}(t), y_{ms}(t), z_{ms}(t))^T$, 则有

$$\mathbf{r}_{MS}(t) = S(\mathbf{r}_m(t) - \mathbf{r}_s(t)) \quad (2)$$

目标的方位角 $y_1(t)$ 和俯仰角 $y_2(t)$ 分别为

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \arctan(y_{ms}(t)/x_{ms}(t)) + \varepsilon_1(t) \\ &= h_1(t, \mathbf{X}_0) + \varepsilon_1(t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \arctan(z_{ms}(t)/\sqrt{x_{ms}(t)^2 + y_{ms}(t)^2}) + \varepsilon_2(t) \\ &= h_2(t, \mathbf{X}_0) + \varepsilon_2(t) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $h_1(t, \mathbf{X}_0)$ 和 $h_2(t, \mathbf{X}_0)$ 为测量真值, $\varepsilon_1(t)$ 和 $\varepsilon_2(t)$ 为测量噪声, 实际中可假设为相互独立的高斯白噪声过程, 其协方差阵设为

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2(t) & \\ & \sigma_2^2(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

2 MLE 的多项式逼近算法

2.1 理论分析

自由段弹道估计的批处理算法是利用观测数据集 $\mathbf{YS} = \{y_i(t_j) | i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, N\}$ 计算初始状态 X_0 的极大似然估计 $\hat{\mathbf{X}}_0$, 从而由方程(1)确定整个弹道。 $\hat{\mathbf{X}}_0$ 应满足

$$\hat{\mathbf{X}}_0 = \arg \min_{\mathbf{X}_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{(y_i(t_j) - h_i(t_j, \mathbf{X}_0))^2}{\sigma_i^2(t_j)} \right\} \quad (6)$$

我们通常采用 GN^[7]、LM^[3] 等算法求解 $\hat{\mathbf{X}}_0$, 但当观测量较多时, 这些算法的计算速度很慢。

PAML 算法先计算 $y_i(t)$ ($i = 1, 2$) 的 n_i 阶最小二乘逼近多项式 $p_i(t)$, 再确定 $n_i + 1$ 个重采样点 $S_i = \{t_j^i | j = 1, 2, \dots, n_i + 1\}$ 和伪观测数据集 $\mathbf{PS} = \{p_i(t_j^i) | t_j^i \in S_i; i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n_i + 1\}$ ($p_1(t)$ 和 $p_2(t)$ 为在相应重采样点处的取值构成的集合), 满足条件:

(1) 伪观测数据集 \mathbf{PS} 相对原观测数据集 \mathbf{YS} 的信息损失微小;

(2) 伪观测数据之间相互独立, 且是测量真值的无偏估计。

设 $\hat{\mathbf{X}}_0^*$ 为 \mathbf{X}_0 基于伪观测数据的 MLE, 当条件(1)满足时, $\hat{\mathbf{X}}_0$ 可由 $\hat{\mathbf{X}}_0^*$ 近似, 即 $\hat{\mathbf{X}}_0 \approx \hat{\mathbf{X}}_0^*$, 如果条件(2)同时满足, 则有

$$\hat{\mathbf{X}}_0^* = \arg \min_{\mathbf{X}_0} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i+1} \left\{ \frac{(p_i(t_j^i) - h_i(t_j^i, \mathbf{X}_0))^2}{\sigma_{p_i}^2(t_j^i)} \right\} \quad (7)$$

其中的 $\sigma_{p_i}^2(t_j^i)$ 是伪观测数据 $p_i(t_j^i)$ 的方差。根据(7)式, $\hat{\mathbf{X}}_0^*$ 同样可由 GN 算法或 LM 算法求解。比较(6)式与(7)式, 由于 $n_1 + n_2 + 2 \ll 2N$, 求解 $\hat{\mathbf{X}}_0^*$ 的计算量远小于求解 $\hat{\mathbf{X}}_0$ 的计算量。

定义权函数 $w_i(t) = 1/\sigma_i^2(t)$ ($i = 1, 2$), 设 $\{\varphi_k^i(t) | k = 0, 1, \dots\}$ 是关于权函数 $w_i(t)$ 的标准正交多项式基, $p_i(t)$ 是 $y_i(t)$ 关于权函数 $w_i(t)$ 的 n_i 阶最小二乘逼近多项式, 有下述两个定理^[4]:

定理 1 对 $i = 1, 2$, 重采样点取为 $n_i + 1$ 阶标准正交多项式 $\varphi_{n_i+1}^i(t)$ 的 $n_i + 1$ 个实根 $S_i = \{t_j^i | j = 1, 2, \dots, n_i + 1\}$ 时, 伪观测数据集 $\mathbf{PS} = \{p_i(t_j^i) | t_j^i \in S_i; i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n_i + 1\}$ 相互独立, 对任意的 $t_j^i \in S_i$, $p_i(t_j^i)$ 是 $h_i(t_j^i, \mathbf{X}_0)$ 的无偏估计, 且 $p_i(t_j^i)$ 的方差为

$$\sigma_{p_i}^2(t_j^i) = \frac{2}{N} (A_j^i)^{-1} \quad (8)$$

其中

$$A_j^i = \left(\sum_{k=0}^{n_i} (\varphi_k^i(t_j^i))^2 \right)^{-1} \quad (9)$$

定理 2 对 $i = 1, 2$, 如果测量函数 $h_i(t, \mathbf{X}_0)$ 及其一阶导数可近似为 n_i 阶多项式, 重采样点和伪观测数据的取法同定理 1, 则 \mathbf{X}_0 基于原观测数据集 \mathbf{YS} 的 MLE 与 \mathbf{X}_0 基于伪观测数据集 \mathbf{PS} 的 MLE 近似相等。

在测量函数 $h_i(t, \mathbf{X}_0)$ ($i = 1, 2$) 及其一阶导数可近似为 n_i 阶多项式的条件下, 定理 1 和定理 2 给出了确定重采样点的方法, 即求 $n_i + 1$ 阶标准正交多项式 $\varphi_{n_i+1}^i(t)$ 的 $n_i + 1$ 个实根, 它们实际上是关于权函数 $w_i(t)$ 的高斯型求积公式的高斯点。定理 1 同时给出了计算伪观测数据方差的方法, 由(9)式, $\{A_j^i | j = 1, 2, \dots, n_i + 1\}$ 是关于权函数 $w_i(t)$ 的高斯型求积公式的求积系数^[8]。文献[8]提供了计算高斯型求积公式的高斯点和求积系数的高效算法。

2.2 算法步骤

对 $i = 1, 2$, 设 $h_i(t, \mathbf{X}_0)$ 及其一阶导数可由 n_i 阶多项式近似, PAML 算法步骤:(1)利用观测数据集 \mathbf{YS} 计算 $y_i(t)$ ($i = 1, 2$) 关于权函数 $w_i(t)$ 的 n_i 阶最小二乘逼近多项式 $p_i(t)$;(2)计算关于权函数 $w_i(t)$ ($i = 1, 2$) 的高斯型求积公式的高斯点

$S_i = \{t_j^i | j = 1, 2, \dots, n_i + 1\}$ 和求积系数 $\{A_k^i | k = 1, 2, \dots, n_i + 1\}$, 将高斯点代入 $p_i(t)$ 得伪观测数据集 $PS = \{p_i(t_j^i) | t_j^i \in S_i; i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, n_i + 1\}$, 将求积系数代入(8)式可得伪观测数据的方差; (3) 采用 GN 算法或 LM 算法由(7)式计算 \hat{X}_0^* , \hat{X}_0^* 就是 X_0 的 MLE 近似解。

3 仿真实验

仿真实验中, 目标为某射程 4600km 的弹道导弹, 低轨预警卫星的轨道高度取为 2500km, 对目标自由段的观测时长为 800s。两个角度观测量噪声的标准差都取为 $100\mu\text{rad}$, 采样率为 1Hz。采用 50 次 Monte Carlo 仿真计算 MLE、EKF、UKF 和 PAML 算法对观测初始时刻目标状态估计结果, 其中 MLE 和 PAML 的求解都采用 GN 算法, 逼近多项式的阶数取为 30。

图 1 和图 2 分别是初始时刻位置和速度估计误差的标准差, 其中 CRLB 是估计误差标准差的理论下界^[3], 可见 PAML 算法的估计精度与 MLE 的精度相当, 位置估计误差最多相差 361m, 速度估计误差最多相差 1.7m/s, PAML 算法和 MLE 的估计误差随观测时长的增加都接近 CRLB, 表明两者都是渐近有效估计。EKF 和 UKF 估计精度相对较差, 需要较长时间才能达到 CRLB。

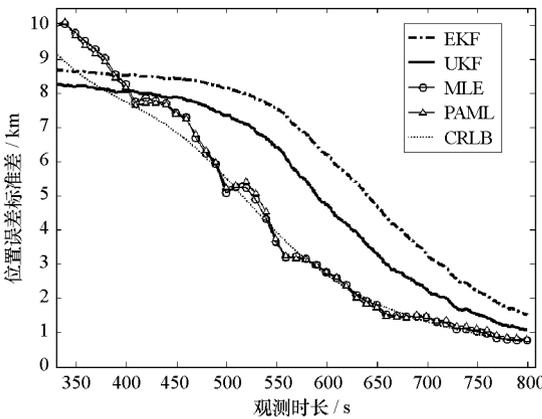


图 1 位置估计误差的标准差
Fig. 1 Std error of position

图 3 是相同计算环境下 MLE 与 PAML 算法的计算时间对比, 可见 PAML 算法的计算量随观测数据量的增加变化不大, 这是因为求逼近多项式的部分计算可以离线完成, 同时重采样点及其方差的计算与原观测数据无关。MLE 的计算量随观测数据量的增加几乎成线性增长, 计算时间最大是 PAML 算法的 28 倍, 表明 PAML 算法具有良好的计算复杂性。

4 结束语

本文针对低轨单星视线测量条件下的自由段

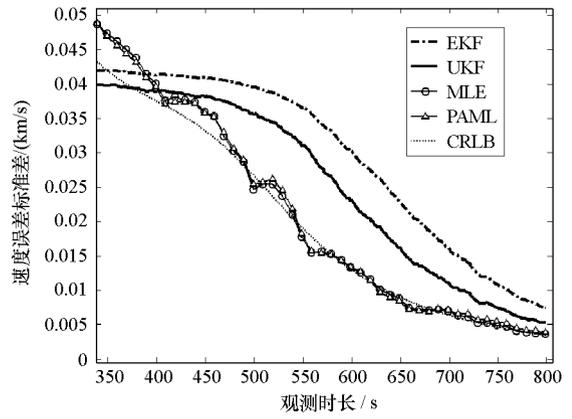


图 2 速度估计误差的标准差
Fig. 2 Std error of velocity

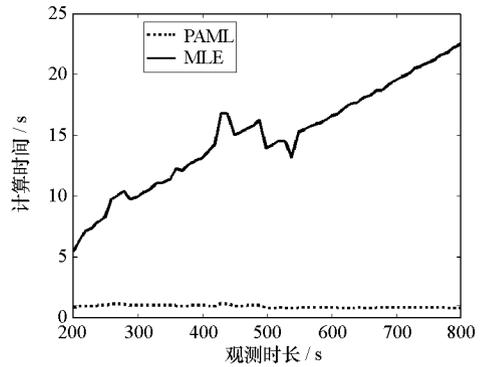


图 3 MLE 与 PAML 算法的计算时间对比
Fig. 3 Execution times of PAML and MLE

弹道的估计问题, 建立了自由段弹道导弹的运动模型和预警卫星的观测模型, 给出一种基于 MLE 弹道估计的多项式逼近算法, 该算法在保证 MLE 估计精度的同时, 显著降低了运算量, 适用于天基红外低轨预警系统。

参考文献:

- [1] Watson J, Zondervan K. The Missile Defense Agency's Space Tracking and Surveillance System[C]//Proc. of Sensors, Systems, and Next-Generation Satellites XII, Cardiff, Welsh, 2008.
- [2] Farina A, Ristic B, Benvenuti D. Tracking a Ballistic Target: Comparison of Several Nonlinear Filters [J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(3): 854 - 867.
- [3] Yeddanapudi M, Bar-Shalom Y, Pattipati K R, et al. Ballistic Missile Track Initiation from Satellite Observations [J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1995, 31(3): 1054 - 1071.
- [4] Villien C, Ostertag E P. A Polynomial Approximation Algorithm for Real-time Maximum-likelihood Estimation [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2009, 57(6): 2085 - 2095.
- [5] 谢恺, 周一宇, 薛模根, 等. 基于平方根 UKF 的自由段目标跟踪算法[J]. 国防科技大学学报, 2007, 29(2): 97 - 100.
- [6] 谢恺, 薛模根, 周一宇, 等. 天基红外低轨星座对目标的跟踪算法研究[J]. 宇航学报, 2007, 28(3): 694 - 701.
- [7] 李贞杰, 易东云, 吴翊. 中低轨红外预警弹道估计及精度分析[J]. 弹道学报, 2006, 18(1): 35 - 37.
- [8] Golub G H, Welsch J H. Calculation of Gauss Quadrature Rules[J]. Mathematics of Computation, 1969, 23: 221 - 230.