

## 基于近似策略的联合优化方法\*

魏月兴, 陈小前, 颜力

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:**针对优化中收敛速度和优化解全局性的问题,提出了一种联合优化方法:构造原问题的近似模型,使用全局优化方法对近似函数进行优化,得到优化点作为初值,再使用局部优化方法对原问题进行优化。为了获得对原问题更好的近似,改进了径向基插值方法,以优化误差的方法来选择参数。利用临近空间机翼模型的优化对算法进行了测试,结果表明,优化参数的径向基插值方法提高了高维问题的近似能力,联合优化能够得到较好的优解,并提高了收敛速度。

**关键词:**径向基插值;近似方法;联合优化;机翼优化

**中图分类号:**TP391.9 **文献标识码:**A

## Approximation Based Combined Optimization Methodology

Wei Yue-xing, Chen Xiao-qian, Yan li

(College of Aerospace and Material Engineering National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Aimed at solving the problem of optimization convergence and the global optimization, this research proposes a Combined Optimization Methodology, which combines the global and local optimization methods. The former one can obtain global optimum solution but converge slowly, while the latter one can converge fast and obtain a local optimum solution and can be sensitive to initial value. Firstly, the approximation function of the original problem was built. Then the approximate optimum solution was obtained by the global optimization method. The approximate optimum was taken as the initial value, and the real optimum solution is obtained by the local method optimizing the original problem directly. In order to achieve better approximation, the RBF was improved and Shape Parameter Optimization Radius Basis Function was developed by using the surrogate model. Both of the methods were used in the near space aircraft wing optimization. Results show that the modified interpolation method is more accurate than the Kriging model, and the Combined Optimization can obtain the optimum and improve the convergence speed.

**Keywords:** radius basis function interpolation; approximation method; combined optimization; wing optimization

对于单纯的一类优化方法,如遗传算法,收敛速度和优化解的全局性往往难以协调,或者牺牲优化的速度,或者牺牲解的全局性(当然这是一种可能)。针对这样的矛盾,一般采取近似优化的策略,即构造原问题的响应面模型来得到低精度的优化解。这样的做法虽然提高了收敛速度,但在多学科设计中容易违反约束条件,解的可行性无法保证。本文提出了一种联合优化的策略,在近似优化的基础上再对原问题进行局部的直接优化,确保可行解。

近似方法中较为通用的是构造全局近似模型,但是一般适应能力有限,本文通过对径向基插

值的改进,提出了优化参数径向基方法(Shape parameter Optimization Radius Basis Function, SORBF),提高近似的适应能力,从而使近似解接近优化解,提高优化的效率。

利用对高精度问题的近似,联合优化方法对近似模型进行大范围的全局搜索,并以寻优的值作为局部优化的初值,避免确定局部优化初值的困难;局部优化高精度模型可以确保可行解,并获得具有近似全局性的局部最优解。

### 1 SORBF 方法

在通用的函数近似方法中,主要有多项式拟

\* 收稿日期:2011-03-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50975280; 61004094);教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-08-0149);国防科技大学科研计划资助项目(JC-08-01-07)

作者简介:魏月兴(1985—),男,博士生。

合(或插值)、Kriging 模型、神经网络和径向基函数(Radius Basis Function, RBF)等方法,而 RBF 由于各向同性、应用简单的优点<sup>[1]</sup>,受到了广泛的关注。径向基函数的形式可以表示为

$$\tilde{f} = \sum_{k=1}^N w_k \phi_k(\|x_i - x_k\|) \quad (1)$$

其中,  $w_k$  为每个样本点的权系数,  $N$  为采样点个数,  $\phi_k(r_{ik})$  为基函数常用的基函数形式<sup>[1]</sup>, 主要有线性 ( $\phi(r) = cr$ ), 高斯 ( $\phi(r) = e^{-\alpha r^2}$ ), Multiquadric ( $\phi(r) = \sqrt{(r^2 + c^2)}$ ) 等等。权系数的获得通过求解线性方程组得到。

基函数中的  $c$  决定了基函数的形状, 所以也称为形状参数。文献[2]分析了  $c$  对插值精度和基函数矩阵  $\Phi$  的条件数的影响,  $\Phi$  的条件数随  $c$  的增大而增大; 对插值精度而言,  $c$  存在临界值, 在临界值以前, 近似的误差是递减的。当选择的  $c$  超过这个临界值以后, 误差剧烈振荡, 文献[2]认为, 这是由于条件数过大, 求解权系数不稳定造成的。

根据这些结论, 可以将  $c$  的选择看作一个优化问题。使用均方根误差 RMSE 作为误差的评价, 表示如下:

$$R_{mse} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (f_i - \tilde{f}_i)^2}{N}} \quad (2)$$

其中,  $N$  为采样点个数,  $f_i$  和  $\tilde{f}_i$  分别为真值函数值和近似函数值。

在获得采样点和其上的函数值后, 只要确定  $c$ , 就可以求得权重  $\mathbf{W}$ , 代入式(1)即可求出点  $x$  处的近似值。所以, 近似函数可以看成是  $c$  的函数:

$$R_{mse} \sim R_{mse}(c) \quad (3)$$

为了使  $c$  的值不致过大, 需要对  $\Phi$  的条件数进行限制, 得到优化的形式如下:

$$\begin{cases} \text{Find } c \\ \min R_{mse}(c) \\ \text{s. t. } C_\phi < \theta \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $\theta$  是基函数矩阵  $\Phi$  的条件数的一个阈值。 $\theta$  的大小取决于求解病态矩阵的能力, 本文建议  $\theta$  取为  $10^{15}$ 。

为以示区分, 本文将优化 RMSE 所使用的采样点称之为评价点。评价点可以另外单独采样, 也可以利用交叉验证方法<sup>[3]</sup>以节省样本点。采样点和评价点的获取应该以尽量包含全空间的信息为原则, 本文采用拉丁超立方<sup>[4]</sup>进行采样。

## 2 联合优化方法

联合优化方法综合全局优化方法的全局搜索能力和局部优化方法的收敛特性, 在近似能力较强的条件下, 近似优化的变量接近问题的最优解, 为局部优化提供了一个较好的初值, 可以提高收敛速度; 局部优化直接应用原问题的约束条件以及优化目标, 这样就保证优化解落在可行域内。

联合优化过程:

Step 1 选取采样点, 进行高精度模型计算;

Step 2 利用 SORBF 方法建立近似模型;

Step 3 全局优化方法(如遗传算法)优化近似模型, 得到设计变量的初值;

Step 4 以 Step 3 得到的初值作为局部优化的初值, 利用局部优化方法(如单纯形法)对高精度模型进行优化, 得到原问题的最优解, 如图 1 所示。

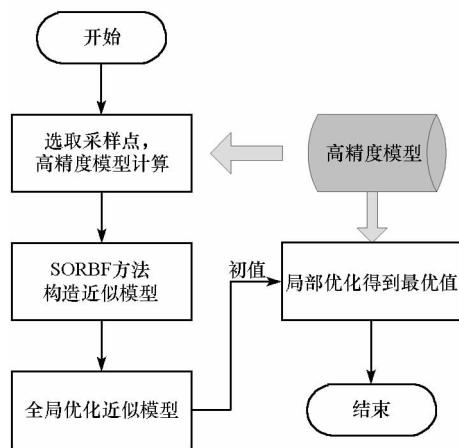


图 1 联合优化流程

Fig. 1 Flow chat of combined optimization

联合优化利用了 SORBF 的近似能力, SORBF 对高精度模型的有效近似可以保证全局优化的结果接近于直接优化高精度模型的结果; 全局优化方法的搜索能力保证了优化解的全局性, 而局部优化高精度模型保证了优化结果落在可行域内。在联合优化过程中, 并没有导出新的优化方法, 其收敛性是由全局优化方法和局部优化方法决定的, 由于使用近似模型进行预先的优化, 联合优化提高了整个过程的效率。

## 3 临近空间机翼近似模型与优化

该机翼结构以亚声速临近空间飞行器的机翼<sup>[5]</sup>为对象, 在机翼对称轴上选取 3 个点, 加上机翼前缘和后缘共 5 个点, 用三次样条插值函数来构造机翼截面曲线, 作为机翼横截面的简化模型。

简化的模型如图 2 所示。

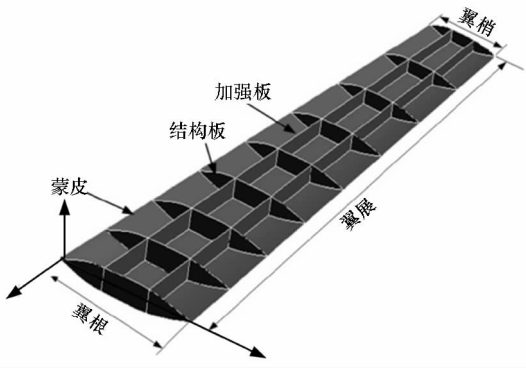


图 2 机翼简化模型

Fig. 2 Simplified model of the wing

两个控制点位于前缘和后缘,另外三个控制点的横坐标分别取在与弦长成比例的  $y_1 = 0.2C$ ,  $y_2 = 0.4C$ ,  $y_3 = 0.6C$  处,其中  $C$  为弦长,机翼的结构参数如表 1 所示。

表 1 机翼的结构参数

Tab. 1 Structure parameters of the wing

变量(符号)	范围(m)	变量(符号)	范围(m)
翼展( $x_1$ )	[2,6]	蒙皮厚度( $x_4$ )	[0.002,0.006]
翼梢( $x_2$ )	[0.5,1.5]	结构板厚度( $x_5$ )	[0.002,0.01]
翼根( $x_3$ )	[1,2]	加强板厚度( $x_6$ )	[0.002,0.01]
控制点 $i$ ( $y_i$ )	[0.02,0.1]	$i = 1, 2, 3$	

机翼的优化目标是在给定的压强条件下,寻求机翼质量最小,同时满足约束条件。约束主要包括两部分,一个是蒙皮上的应力要小于材料规定的应力值,另外是机翼的扭转角度要满足气动学科的要求。根据学科约束的要求,确定约束最大应力  $F \leq 274\text{MPa}$ ,扭转角  $|\theta| \leq 5^\circ$ 。该问题的数学描述如下:

$$\begin{cases} \text{Find } \mathbf{x} \in (x_1, x_2, \dots, x_6), i \\ \min m = f(\mathbf{x}, i) \\ \text{s. t. } F \leq 274\text{MPa} \\ |\theta| \leq 5^\circ \end{cases} \quad (5)$$

利用 MSC. Patran 支持的 PCL 语言进行参数化建模。为了验证 SORBF 的近似效果,对试验设计的计算结果,即质量 (Mass)、扭转角 (Angle)、蒙皮上的最大应力 (Stress) 和机翼前缘位移 (Displacement) 分别利用 SORBF 和 Kriging 模型<sup>[6]</sup> 做近似进行比较,并给出了相对误差  $R^2$  的值<sup>[7]</sup>。

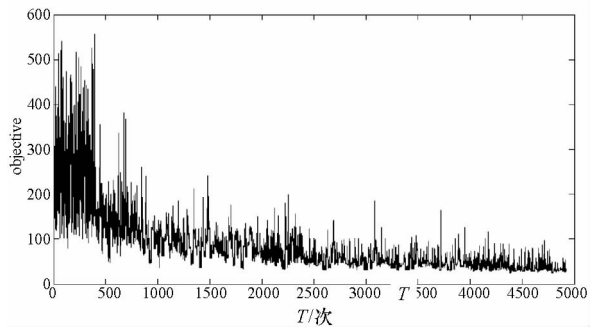
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (f_i - \tilde{f}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2} \quad (6)$$

由表 2 所示的结果可以看出,在使用相同的采样点 ( $N$ ) 情况下, SORBF 的近似效果明显优于 Kriging 方法,而在文献[1] 的测试中, Kriging 的近似效果相对较好,说明本文的改进提高了 RBF 的近似能力。

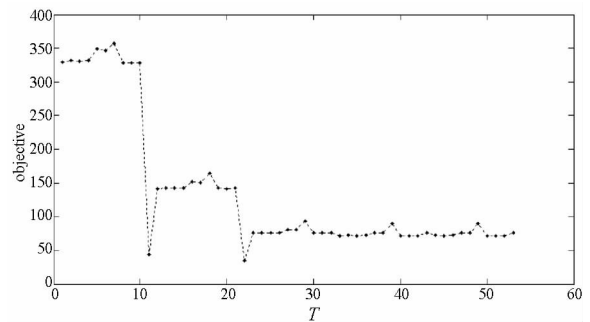
表 2 近似结果比较

Tab. 2 Comparisons of the approximation results

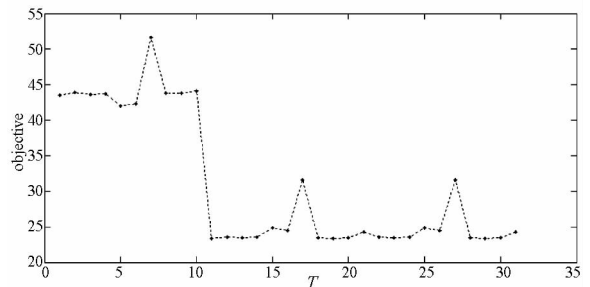
Object	Method	RMSE	$R^2$	$N$
Mass	SORBF	15.45	0.9981	58
	Kriging	42.34	0.9854	58
Angle	SORBF	0.0295	0.7333	450
	Kriging	0.0387	0.5404	450
Stress	SORBF	7.3121e6	0.9640	288
	Kriging	7.7104e6	0.9600	288
Displacement	SORBF	0.0080	0.6640	288
	Kriging	0.0106	0.4053	288



(a) MIGA



(b) SLP



(c) C - Opt

图 3 优化方法收敛性比较

Fig. 3 Comparisons in convergence of the optimization methods

选用多岛遗传算法 (Multi-Island Genetic

Algorithm, MIGA) 对高精度模型进行优化, 作为参考最优值, 同时选用 SLP(Sequential Linear Programming) 方法做局部优化, 这种方法搜索给定初值附近的最优值, 收敛速度快, 对初值敏感。最后, 使用基于多岛遗传算法和 SLP 方法的联合优化方法(C-Opt) 优化该问题。比较优化的目标值( $f$ ) 和调用高精度模型的次数( $N_i$ ), 从而确定算法的优化能力和优化效率, 优化方法收敛性比

较见图 3。

各方法优化效果如表 3 所示。MIGA 经过 4925 次计算, 给出了一个相对最优值, 而联合优化方法经过 231 次高精度模型计算, 得到了一个较优的值。而 SLP 在不好的初值条件下得到的值最差。联合优化方法运行较少的高精度模型, 得到了较优的结果。

表 3 优化效果比较

Tab. 3 Comparison of the effective of the optimization

Method	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$f$	$N_i$
MIGA	2.06	1.005	0.51	0.0020	0.0022	0.0022	0.0020	0.024	0.042	24.5	4925
SLP	3.2	1.13	0.80	0.0028	0.0028	0.0028	0.040	0.04	0.041	76.2	53
C-Opt	2.0	1.003	0.51	0.0030	0.0021	0.0030	0.021	0.021	0.021	31.5	231

## 4 结论

本文提出了基于近似策略的联合优化方法, 并利用机翼模型的近似和优化, 分别测试了 SORBF 的近似能力和联合优化方法的优化效率和结果。

SORBF 考虑了矩阵病态的影响, 通过对径向基中形状参数的优化, 来确定近似模型, 测试结果表明, SORBF 近似效果优于在文献测试中表现优秀的 Kriging 模型, 提高了对高维问题的近似能力, 为近似高精度模型提供了有效的手段。

针对优化的效率和结果的准确性的矛盾, 本文提出了基于近似的联合优化的策略, 利用全局优化方法的搜索能力和局部优化算法的收敛速度, 在保证优化解的同时, 大幅度提高优化效率。本文的方法应用于临近空间机翼优化问题中, 结果表明, 联合优化方法调用较少次数的高精度模型, 获得了较好的优化效果。

联合优化方法可以应用于复杂高精度模型的优化, 特别是在多学科设计优化中, 对于需要多次调用高精度模型的分层优化过程, 联合优化能够大幅度提高优化效率。

## 参考文献:

[1] Krishnamurthy T. Comparison of Response Surface Construction

Methods for Derivative Estimation Using Moving Least Squares, Kriging and Radial Basis Functions [C]//46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Confer, AIAA 2005 - 1821, Austin, Texas; AIAA, 2005.

[2] Wei Y X, Xu L, Chen X Q. The Radial Basis Function Shape Parameter Chosen and Its Application in Engineering [C]//IEEE International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems, 2009.

[3] Genzi L, Shapour A. Maximum Accumulative Error Sampling Strategy for Approximation of Deterministic Engineering Simulations [C]//11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, AIAA 2006 - 7051, Portsmouth, Virginia; AIAA, 2006.

[4] 方开泰. 均匀试验设计的理论、方法和应用——历史回顾 [J]. 数理统计与管理, 2004, 23(3).

[5] Marcel M J, Baker J. Interdisciplinary Design of a Near Space Vehicle [C]//Proceedings of IEEE Southeast Con. Richmond, VA, 22 - 25 March, 2007: 421 - 426.

[6] Timothy W S, Timothy M M. Comparison of Response Surface and Kriging Models for Multidisciplinary Design Optimization [R]. AIAA - 98 - 4755, 1998.

[7] Anoop A, Achille M. Extended Radial Basis Functions: More Flexible and Effective Metamodeling [C]//10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference 30 August - 1 September AIAA 2004 - 4573, Albany, New York; AIAA, 2004.