

考虑有损伤测量条件下的设备剩余寿命的建模分析*

王小林,郭波,程志君,齐建军

(国防科技大学 信息系统与管理学院,湖南 长沙 410073)

摘要:在有损测量的情况下,仅从退化数据本身出发所建的模型不能反映设备的真实退化过程。尤其在测量导致的设备性能退化量不可忽略时,不考虑测量耗损量将不能有效进行预测和评估。为解决这个问题,首先基于维纳过程建立有损测量的设备退化过程,进一步给出了相应模型的参数估计方法和基于贝叶斯理论的设备剩余寿命的实时更新方法,最后通过一个仿真示例表明了研究这个问题的意义和模型的有效性。

关键词:有损测量;维纳过程;剩余寿命;贝叶斯方法;实时更新;

中图分类号:TB 114.3 **文献标识码:**A

Modeling and Analysis of Equipment's Residual Life Considering the Condition of Damaging Measuring

Wang Xiao-lin, Guo Bo, Cheng Zhi-jun, Qi Jian-jun

(College of Information System and Management, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: In the case of equipments' performance degradation which partially results from measuring, the model which is only based on the degradation data itself cannot reflect the true degradation process, and it is unable to forecast and evaluate effectively, especially when the degradation quantity caused by measures cannot be ignored. In order to solve this problem, firstly, the equipment's degradation process model which contains the damaging quantity induced by measuring was established on the basis of Wiener process; then the method of parameters estimation and real-time updating method for equipment's residual life based on Bayesian theory were presented. Finally, a simulation example was presented to testify the significance of this research and the validity of models.

Key words: damaging measuring; Wiener process; residual life; Bayes method; real-time updating

近年来,对于高可靠、长寿命产品的退化试验及其可靠性分析方法,受到众多国内外学者的关注,并在这方面做了大量的研究,取得了很多成果。其中 Crk 给出了基于性能退化数据的可靠性分析算法与步骤^[1], Lu 和 Meeker^[2] 利用一组随机样本的性能退化数据研究了设备的寿命分布,其中假设误差独立同分布于正态分布。Yang^[3] 利用少量的失效数据和退化数据,采用一种随机系数模型对设备的寿命分布进行建模。文献[4]基于加速退化试验数据研究了二极管的寿命分布。国内学者在这方面也做了一些研究,如张永强等^[5]基于 Poisson-Normal 过程建立性能退化模型,并给出了相应的可靠性分析方法。文献[6-7]给出了基于性能退化数据对电容器可靠性的评估方法。上述方法虽然最终都给出了可靠性的评估结果,然而都不是实时的,文献[8]则针

对这个问题进行了研究。在可靠性分析领域,一个重要的分支是对设备的剩余寿命预测。设备剩余寿命预测在视情维修等现代维修决策领域是非常重要的。文献[9]基于轴承的退化数据,利用神经网络对轴承的剩余寿命分布进行了研究。文献[10]利用指数模型描述轴承的退化轨迹,考虑了两类不同的误差模型,并给出了相应的剩余寿命分布。Elwany 等^[11]分别利用线性模型和指数模型描述轴承的退化轨迹,进一步确定了轴承的剩余寿命分布。文献[12]给出了在先验退化信息缺失的情况下设备剩余寿命的计算方法。

在退化数据的建模方面,大多存在这样一个假设:对性能退化数据的测量本身不会对设备的性能产生影响。这个假设在一定条件下是不成立的,如在高温下对设备进行试验,对性能退化量的测量需要在常温下才能进行,这样从高温冷却,再

* 收稿日期:2011-03-18

基金项目:国家青年自然科学基金资助项目(60904002)

作者简介:王小林(1985—),男,博士生。

从低温加热的过程将会导致设备的退化^[13]。当测量导致的设备性能退化量不可忽略时,仅从退化数据本身出发所建的模型不能反映设备的真实退化过程,从而不能有效进行预测。鉴于此,并考虑到剩余寿命的重要意义,本文对这个问题进行研究。

1 有损测量退化模型

1.1 模型相关假设

现在通过下述假定来研究有损测量条件下设备的剩余寿命的预测模型。

假定 1 设备的真实退化过程为维纳过程。设 t 时刻设备的退化量为 $X(t)$, 表示为

$$X(t) = rt + \sigma w(t) \quad (1)$$

其中, r 为漂移系数, σ 为扩散系数, $w(t)$ 为布朗运动, 满足 $w(t) \sim N(0, t)$ 。考虑到设备的差异, 令 $\tau = 1/\sigma^2$, 参考文献[14]假设 $\tau \sim \text{Gam}(\alpha, \beta)$, 同时假定漂移系数服从正态分布, 即 $r \sim N(\mu_r, \sigma_r^2)$ 。

假定 2 若 $X(t) \leq d$, 则设备正常, 反之设备失效, 其中 d 为失效阈值。

假定 3 每一次测量都是有损测量, 考虑以下两种情况:

(1) 每一次测量导致设备性能的耗损量为一个非负定值 D ;

(2) 每一次测量导致设备性能的耗损量是一个非负随机值 D_i , 其中 $D_i \sim N(\mu_d, \sigma_d^2)$, $X(t)$ 与 D_i 独立;

假定 4 可以对设备进行多次测量, 测量误差可以忽略。

1.2 有损测量退化模型的建立

在上述假定的基础上, 可得到设备 i 在 t_{ik} 时刻的性能退化量为

$$y_i(t_{ik}) = r_i t_{ik} + \sigma_i w(t_{ik}) + \sum_{j=1}^k D_{ij} \quad (2)$$

其中, D_{ij} 为第 j 次测量过程中对设备 i 所造成的性能耗损量, $\sum_{j=1}^k D_{ij}$ 为由测量所导致的累积耗损量。根据式(2)可以得到假定 3 两种情况下的有损测量退化模型, 即当 D 为定值时, $y_i(t_{ik})$ 为

$$y_i(t_{ik}) = r_i t_{ik} + \sigma_i w(t_{ik}) + \sum_{j=1}^k D \quad (3)$$

当 D 为随机变量时, $y_i(t_{ik})$ 为

$$y_i(t_{ik}) = r_i t_{ik} + \sigma_i w(t_{ik}) + \sum_{j=1}^k D_{ij} \quad (4)$$

为了有效地对设备的剩余寿命进行预测, 需

要首先根据测量数据对模型中的参数进行估计。下一节将根据测量过程中的性能退化数据对有损测量模型中的参数进行估计。

2 退化模型的参数估计

因式(3)是式(4)的特殊情况, 这里只考虑退化模型(4)的参数估计方法。假设对 n 个设备进行性能退化试验, 在实验结束时, 没有一个设备失效。所获得性能退化数据的形式为

$$\begin{cases} y_1(t_{11}), y_1(t_{12}) \cdots y_1(t_{1m_1}) \\ \vdots \\ y_n(t_{n1}), y_n(t_{n2}) \cdots y_n(t_{nm_n}) \end{cases}$$

其中, m_i 为对设备 i 所测量的次数。

为方便进行参数估计, 对上述数据做如下的转化, 即

$$\begin{cases} y_i(t_{i1}) = r_i t_{i1} + \sigma_i w(t_{i1}) + D_{i1} \\ y_i(t_{i2}) - y_i(t_{i1}) = r_i(t_{i2} - t_{i1}) + \sigma_i(w(t_{i2}) - w(t_{i1})) + D_{i2} \\ \vdots \\ y_i(t_{im_i}) - y_i(t_{im_i-1}) = r_i(t_{im_i} - t_{im_i-1}) + \sigma_i(w(t_{im_i}) - w(t_{im_i-1})) + D_{im_i} \end{cases} \quad (5)$$

其中, $(y_i(t_{ik+1}) - y_i(t_{ik}) | r_i, \sigma_i)$ 服从正态分布 $N(r_i(t_{ik+1} - t_{ik}) + \mu_d, \sigma_i^2(t_{ik+1} - t_{ik}) + \sigma_d^2)$ 。

令 $\Delta t_{ij} = t_{ij} - t_{ij-1}$, $\Delta y_{ij} = y(t_{ij}) - y(t_{ij-1})$, $\Delta Y_i = (\Delta y_{i1}, \Delta y_{i2} \cdots \Delta y_{im_i})'$, $\Delta t_i = (\Delta t_{i1}, \Delta t_{i2} \cdots \Delta t_{im_i})'$, 则 ΔY_i 的均值与协方差矩阵为

$$\begin{cases} \mu_{\Delta Y_i} = r_i \Delta t_i + \mu_d \mathbf{1}_{m_i} \\ \Sigma_{\Delta Y_i} = \sigma_i^2 \text{diag}(\Delta t_{ij}) + \sigma_d^2 I \end{cases} \quad (6)$$

根据式(6)可以得到设备 i 性能退化数据的似然函数为

$$L(r_i, \sigma_i^2, \mu_d, \sigma_d^2; Y_i) = (2\pi)^{-\frac{m_i}{2}} |\Sigma_{\Delta Y_i}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(\Delta Y_i - \mu_{\Delta Y_i})' \Sigma_{\Delta Y_i}^{-1} (\Delta Y_i - \mu_{\Delta Y_i})}{2}\right) \quad (7)$$

参考文献[15]的思想, 令 $\varphi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_d^2}$, 则有 $\Sigma_{\Delta Y_i} = \sigma_d^2 \Sigma_{\varphi_i}$, $\Sigma_{\varphi_i} = \varphi_i \text{diag}(\Delta t_{ij}) + I$, 式(7)可变为

$$L(r_i, \varphi_i, \mu_d, \sigma_d^2; Y_i) = (2\pi \sigma_d^2)^{-\frac{m_i}{2}} |\Sigma_{\varphi_i}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(\Delta Y_i - \mu_{\Delta Y_i})' \Sigma_{\varphi_i}^{-1} (\Delta Y_i - \mu_{\Delta Y_i})}{2\sigma_d^2}\right) \quad (8)$$

其次把 φ_i 当成已知量, 根据式(8)求得其它参数的似然估计, 即

$$\hat{r}_i(\varphi_i) = \frac{Ac - aC}{cB - bC} \quad (9)$$

$$\hat{\mu}_d(\varphi_i) = \frac{aB - Ab}{cB - bC} \quad (10)$$

$$\hat{\sigma}_d^2(\varphi_i) = \frac{(\Delta Y_i - \hat{\mu}_{\Delta Y_i})' \Sigma_{\varphi_i}^{-1} (\Delta Y_i - \hat{\mu}_{\Delta Y_i})}{m_i} \quad (11)$$

其中, $a = \Delta t' \Sigma_{\varphi_i}^{-1} \Delta Y_i$, $A = 1' m_i \Sigma_{\varphi_i}^{-1} \Delta Y_i$, $b = \Delta t' \Sigma_{\varphi_i}^{-1} \Delta t_i$, $B = 1' m_i \Sigma_{\varphi_i}^{-1} \Delta t_i$, $c = \Delta t' \Sigma_{\varphi_i}^{-1} 1_{m_i}$, $C = 1' m_i \Sigma_{\varphi_i}^{-1} 1_{m_i}$, $\hat{\mu}_{\Delta Y_i} = \hat{r}_i(\varphi) \Delta t_i + \hat{\mu}_d(\varphi)$, 另外对 σ_d^2 的估计可以采用其无偏估计值, 即

$$\hat{\sigma}_d^2(\varphi_i) = \frac{(\Delta Y_i - \hat{\mu}_{\Delta Y_i})' \Sigma_{\varphi_i}^{-1} (\Delta Y_i - \hat{\mu}_{\Delta Y_i})}{m_i - 1} \quad (12)$$

将 $\hat{r}_i(\varphi_i)$, $\hat{\mu}_d(\varphi_i)$, $\hat{\sigma}_d^2(\varphi_i)$ 的表达式代入式(8), 可得关于 φ_i 的似然函数 $L(\varphi_i; Y_i)$, 极大化 $L(\varphi_i; Y_i)$ 可得 φ_i 的极大似然估计值 $\hat{\varphi}_i$, 最后把 $\hat{\varphi}_i$ 代入式(9)~(11)中可获得参数的估计值。

按上述方法对 n 个设备的数据进行处理, 可以得到 n 个 $\hat{\mu}_d(\hat{\varphi}_i)$, $\hat{\sigma}_d^2(\hat{\varphi}_i)$, 对它们进行综合作为 μ_d, σ_d^2 的最终估计值, 即

$$\begin{cases} \hat{\mu}_d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\mu}_d(\hat{\varphi}_i) \\ \hat{\sigma}_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - 1) \hat{\sigma}_d^2(\hat{\varphi}_i)}{\sum_{i=1}^n (m_i - 1)} \end{cases} \quad (13)$$

另外, σ_r^2 的估计值可根据 $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\varphi}_i \hat{\sigma}_d^2$ 得到。进一步由 $\hat{r}_i(\hat{\varphi}_i)$ 和 $\hat{\sigma}_i^2$ 根据矩估计方法或似然方法可以得到 $\mu_r, \sigma_r^2, \gamma, \delta$ 的估计值。

3 剩余寿命分布的确定与更新

剩余寿命的预测应具体到某个设备, 并且需要根据测量数据对预测值进行实时的修正, 这样才更有指导意义。为此, 本文首先根据有损退化模型得到设备的剩余寿命分布函数, 然后利用 Bayes 方法对相关的参数进行实时更新, 最后对设备的剩余寿命进行实时更新。

3.1 设备剩余寿命的确定

由式(4)知, 设备 i 在未来 $t_{im_i} + t$ 时刻的性能退化量为

$$y_i(t_{im_i} + t) = r_i(t_{im_i} + t) + \sigma_i w(t_{im_i} + t) + \sum_{j=1}^{m_i} D_{ij} \quad (14)$$

此时设备 i 的剩余寿命为

$$T = \inf(t, y_i(t_{im_i} + t) \geq d) \quad (15)$$

在已知 r_i, σ_i 条件下, T 服从逆高斯分布^[15], 即

$$F_i(t | r_i, \sigma_i, Y_i)$$

$$= \Phi\left(\frac{r_i t - d + y_i(t_{im_i})}{\sigma_i \sqrt{t}}\right) + \exp\left(\frac{2r_i(d - y_i(t_{im_i}))}{\sigma_i^2}\right) \Phi\left(\frac{-d + y_i(t_{im_i}) - r_i t}{\sigma_i \sqrt{t}}\right)$$

其期望 $\frac{d - y_i(t_{im_i})}{r_i}$ 可以作为设备 i 的剩余寿命的预测值。

3.2 剩余寿命分布函数中参数的实时更新

通常情况下, 设备之间的性能以及它们的工作环境都具有随机性, 需要在建模过程中考虑随机性才能有效预测设备的剩余寿命。本文以 r_i, τ_i 的随机性来表示上述的随机性, 即把 r_i, τ_i 看成随机变量, 它们的先验分布分别为 $\pi(r_i)$ 和 $\pi(\tau_i)$, 其中的参数值可以按照第2节的方法进行估计^[10-11]。

得到 $\pi(r_i), \pi(\tau_i)$ 后, 根据贝叶斯方法, 可以得到 r_i, τ_i 的联合后验分布为

$$\begin{aligned} \pi(r_i, \tau_i | Y_i) &= \frac{L(Y_i | r_i, \tau_i, \mu_d, \sigma_d) \pi(r_i | \tau_i) \pi(\tau_i)}{\iint_U L(Y_i | r_i, \tau_i, \mu_d, \sigma_d) \pi(r_i | \tau_i) \pi(\tau_i) dr_i d\tau_i} \end{aligned} \quad (16)$$

则 r_i, τ_i 的边际后验分布为

$$\begin{cases} \pi(r_i | Y_i) = \int_U \pi(r_i, \tau_i | Y_i) d\tau_i \\ \pi(\tau_i | Y_i) = \int_U \pi(r_i, \tau_i | Y_i) dr_i \end{cases} \quad (17)$$

3.3 剩余寿命的实时更新

得到参数的后验分布后, 可以对设备 i 的剩余寿命分布函数进行更新, 即

$$F(t | Y_i) = \iint_U F(t | r_i, \tau_i, Y_i) \pi(r_i, \tau_i | Y_i) dr_i d\tau_i \quad (18)$$

同时剩余寿命的期望可更新为

$$E(T) = \iint_U \frac{d - y_i(t_{im_i})}{r_i} \pi(r_i, \tau_i | Y_i) dr_i d\tau_i \quad (19)$$

因为 $L(Y_i | r_i, \tau_i, \mu_d, \sigma_d)$ 结构的复杂性, 要得到式(18)、式(19)的解析表达式是很困难的。本文借助 MCMC (Markov Chain Monte Carlo) 方法^[16], 解决多维条件下的贝叶斯积分问题。应用 MCMC^[16] 抽样中较为广泛的 Gibbs 抽样方法, 并用 Monte Carlo 积分进行近似, 即

$$F(t | Y_i) \approx \frac{1}{(N - k_1)(M - k_2)} \sum_{k=k_1}^N \sum_{j=k_2}^M F(t | r_{ik}, \tau_{ij}, Y_i) \quad (20)$$

$$E(T) = \frac{1}{N - k_1} \sum_{k=k_1}^N \frac{d - y_i(t_{im_i})}{r_{ik}} \quad (21)$$

其中, k_1, k_2 可以根据 Markov 链的收敛性进行确定, r_{ik} 与 τ_{ij} 可以利用 Gibbs 抽样方法从参数的满条件分布中抽样得到。同样剩余寿命的密度函数可更新为

$$f(t | Y_i) \approx \frac{1}{(N - k_1)(M - k_2)} \sum_{k=k_1}^N \sum_{j=k_2}^M f(t | r_{ik}, \tau_{ij}, Y_i) \quad (22)$$

4 仿真示例

4.1 退化数据的获取

为了得到模拟的有损测量退化数据, 需要根据模型假设设置相应的参数。本文中所用到的相关参数为: $n = 10, m = 12, r \sim N(1.5, 0.1^2), \tau \sim Gam(4, 1), D_i \sim N(0.2, 0.012^2), d = 6$ 。

基于以上的参数设置, 获取退化数据的模拟过程为:

- (1) 首先分别基于 $r \sim N(1.5, 0.1^2), \tau \sim Gam(4, 1)$ 抽取 10 个随机数 r_i 和 τ_i ;
- (2) 依据 r_i, τ_i 与 D_i 对第 i 个设备在所规定测量时刻的性能测量值进行抽样, 其中涉及维纳过程的抽样与有损测量的抽样。
- (3) 重复第 (2) 步获得 10 个设备的仿真数据。

根据以上模拟过程, 可得一次仿真的结果如图 1 所示, 从图 1 中可以看出, 退化轨迹的开口随着时间的增加逐渐扩大, 符合维纳过程的性质。如果忽视设备退化的真实退化过程, 仅从图形或者数据上可以检验设备的退化过程服从维纳过程, 然而设备真实退化过程为维纳过程加上测量所造成的累积损伤。下面将基于这些模拟数据来预测设备的剩余寿命。

4.2 剩余寿命分布的确定

为了便于比较, 下面分别给出基于经典方法和贝叶斯方法所确定的剩余寿命分布。基于经典方法所确定的剩余寿命分布的步骤为, 首先计算 \hat{r}_i 和 $\hat{\sigma}_i^2$, 然后将其代入逆高斯分布密度函数中, 可以得到相应剩余寿命分布密度。在忽视和考虑测量造成的损伤情况下, 根据经典方法, 所得到的

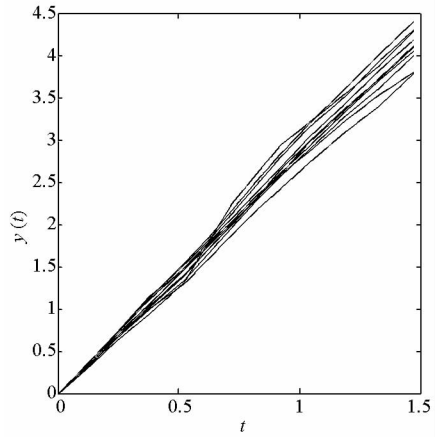


图 1 设备的退化轨迹

Fig. 1 Degradation trajectories of equipments

模拟设备 7 的剩余寿命密度函数如图 2 所示 (忽视表示直接利用维纳过程对设备的退化过程进行建模)。图 2 中的实线表示真值 (漂移系数为 1.5123, 扩散系数为 0.5746), 虚线是在建模时不考虑测量造成的损伤而得到的设备 7 的剩余寿命密度函数, 点实线则是考虑了设备退化的真实过程, 即退化过程为维纳过程加上测量导致的累积耗损量。从图中可以看出, 与真值相比, 两者的差异是很明显的, 基于虚线预测不能反映设备的真实情况, 不能有效地利用设备。

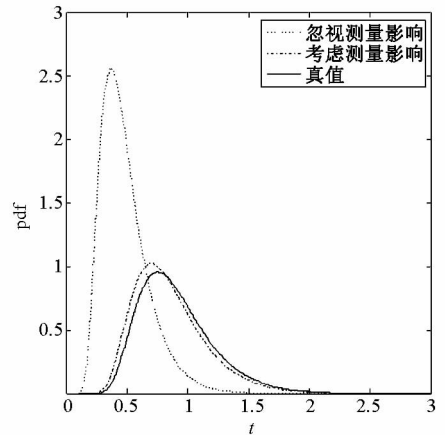


图 2 设备 7 (经典方法) 的剩余寿命分布密度函数

Fig. 2 Residual-life density functions for equipment 7 (using classical method)

基于贝叶斯方法确定设备剩余寿命分布的步骤为: 首先利用除设备 i 以外的退化数据按照第 2 节的方法计算 \hat{r}_i 和 $\hat{\sigma}_i^2$, 其中 $i^- = \{j | j \neq i, j = 1 \dots n\}$; 然后基于这些数据计算 $\pi(r_i, \tau_i)$ [10-11]; 最后实时更新参数分布以及剩余寿命分布。按上述步骤可以得到模拟设备 7 在两种情况下的剩余寿命密度函数, 如图 3 所示。

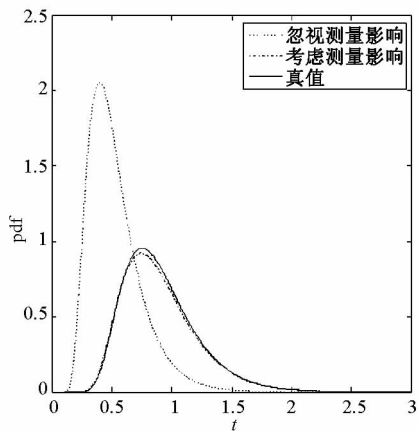


图3 设备7(贝叶斯方法)的剩余寿命分布密度函数
Fig.3 Residual-life density functions for equipment 7 (using Bayesian method)

从图3中可以看出,两种建模的差异是很明显的,和图2相比图形曲线整体向右移动,且考虑测量影响时给出的预测结果与真值的差异减少。这也可以从表1中看出,其中忽视表示建模的时候不考虑测量损伤(其中第4栏表示后验均值)。

表1 参数估计比较表

Tab.1 Comparing of parameters evaluation

	真值	经典	贝叶斯
r_7 (忽视)	1.5123	2.6659	2.3421
r_7 (考虑)	1.5123	1.5562	1.5149

从以上的分析可知,基于同样的数据,两种建模方式所导致的差异是明显的。另外作者通过改变参数和多次模拟,对比两种情况下的差异,得出了相同的结论。

5 结束语

测量损伤设备性能的情况是存在的^[13],当测量导致的设备性能退化量不可忽略时,仅从退化数据本身出发所建的模型不能反映设备的真实退化过程,预测的结果也不能有效地指导决策。本文对该问题进行了研究,假设设备退化服从维纳过程,并在建模时把测量导致的损伤引入到模型中,进一步给出了基于 Bayes 方法实时更新设备的剩余寿命分布的方法;最后通过仿真实例表明了基于性能退化数据建模的过程中,需要了解设备退化的真实过程,不能仅仅从数据上进行表面的分析。另外,本文还有待进行深入的研究,如在建模的过程中考虑误差项,当退化是单调演进时,可以考虑 Gamma 过程等。

参考文献:

- [1] Crk V. Reliability Assessment from Degradation Data [C]// Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, 2000: 155 - 161.
- [2] Lu C, Meeker W. Using Degradation Measures to Estimate a Time-to-failure Distribution [J]. Techno Metrics, 1993, 35: 161 - 174.
- [3] Yang K, Yang G. Degradation Reliability Assessment Using Severe Critical Values [J]. International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, 1998, 5: 85 - 95.
- [4] Tseng S T, Peng C Y. Stochastic Diffusion Modeling of Degradation Data [J]. Journal of Data Science, 2007, 5: 315 - 333.
- [5] 张永强, 刘琦, 周经伦. 小子样条件下基于 Norm-Poisson 过程的性能可靠性评定 [J]. 国防科技大学学报, 2006, 28 (3): 128 - 132.
- [6] 赵建印, 彭宝华, 孙权, 等. 金属化膜脉冲电容器退化失效分析 [J]. 高电压技术, 2006, 32(3): 62 - 64.
- [7] Zhao J Y, Liu F. Reliability Assessment of the Metallized Film Capacitors From Degradation Data [J]. Microelectronics Reliability, 2007, 47: 434 - 436.
- [8] 赵韶, 董豆豆, 周经伦, 等. 基于贝叶斯方法的退化失效型产品实时可靠性评估 [J]. 国防科技大学学报, 2007, 29 (6): 115 - 120.
- [9] Gebraeel N Z, Lawley M, Liu R, et al. Residual Life Predictions from Vibration-based Degradation Signals: A Neural Network Approach [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2004, 51(3): 694 - 700.
- [10] Gebraeel N Z, Lawley M A, Li R, et al. Residual-life Distributions from Component Degradation Signals: A Bayesian Approach [J]. IIE Transactions, 2005, 37: 543 - 557.
- [11] Elwany M A, Gebraeel N Z. Real-Time Estimation of Mean Remaining Life Using Sensor-Based Degradation Models [J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2009: 131 - 139.
- [12] Gebraeel N Z, Elwany M A, Pan J. Residual Life Predictions in the Absence of Prior Degradation Knowledge [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2009, 58(1): 106 - 117.
- [13] Whitmore G A. Estimating Degradation by a Wiener Diffusion Process Subject to Measurement Error [J]. Life Time Data Analysis, 1995, 1: 307 - 319.
- [14] Wang X. Wiener Processes with Random Effects for Degradation Data [J]. Journal of Multivariate Analysis, 2010, 101: 340 - 351.
- [15] Sheldon M R. Stochastic Processes [M]. New York: John Wiley, Sons, 1993.
- [16] Robinson M E, Crowder M J. Bayesian Methods for a Growth-Curve Degradation Model with Repeated Measures [J]. Lifetime Data Analysis, 2000, 6: 357 - 374.