

l 阶链式积分器型多智能体实现平均一致的时延相关 LMI 判据*

张庆杰,李 远,朱华勇,沈林成

(国防科技大学 机电工程与自动化学院,湖南 长沙 410073)

摘要:针对 l 阶链式积分器型多智能体平均一致性问题,给出联合连通拓扑条件下 LMI 表示的时延相关稳定判据。利用状态分解思想,将收敛条件转化为判断不一致系统零平衡点的稳定性;考虑存在多个时变通信时延的情况,采用构造公共的 Lyapunov-Krasovskii 泛函的方式来分析系统稳定性,为获得较低保守性判据,在主要结论中引入了自由权矩阵思想;最后,经过降阶处理并判断相应的 LMIs 可行解的存在性,可获得多智能体实现平均一致所允许的最大通信时延。数值实例和仿真实验表明方法的有效性。与已有文献相比,该稳定判据具有保守性低、求解形式简单、适用更广的时变时延范围等特点,对于分析和讨论复杂网络条件下多智能体平均一致性问题具有一定的指导意义。

关键词:平均一致性;Lyapunov-Krasovskii 泛函;线性矩阵不等式;自由权矩阵;联合连通;时延相关稳定判据

中图分类号:TP13 文献标识码:A

LMI-based Delay-dependent Stability Criterion for Average Consensus of Multi-agent Systems with l -th-order Chain Integrator Dynamics

ZHANG Qing-jie, LI Yuan, ZHU Hua-yong, SHEN Lin-cheng

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: For the average consensus of multi-agent systems with l -th-order chain integrator dynamics, it is important to build the LMI-based delay-dependent stability criterion with jointly-connected topologies. Using the idea of state decomposition, the condition was converted into verifying the stability of zero equilibrium of disagreement system. Considering multiple time-varying communication delays, common Lyapunov-Krasovskii functional was employed to analyze the stability of zero equilibrium. In order to relax the conservativeness, Free-weighting Matrices method was employed in the main results. After matrix order-reduced treatment, the tolerant upper bounds on communication delays were obtained through solving feasible linear matrix inequalities (LMIs). Numerical examples and simulations were presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method. Different from the existing literature, the proposed stability criterion was characterized by lower conservativeness, simple formation of the solution, and wide range of time-varying delays. It can be applied to instruct the analysis and discussion of the average consensus of multi-agent systems with complicated communication conditions.

Key words: average consensus; Lyapunov-Krasovskii function; Linear Matrix Inequalities (LMI); free-weighting matrices; jointly-connected; delay-dependent stability criterion

近年来,多智能体一致性理论已逐渐成为多机器人系统协调领域中的研究热点之一,其基本任务是基于多个智能体可能相冲突的输入信息,采用一致性协议协调多智能体系统产生一致的公共输出,并且在理论上证明达到一致所需协调次数的上界和下界相同。由于一致性理论具有无中心控制、局部信息交换的特点,多智能体系统可通过简单的行为协调即可涌现出整体的自治行为,因此受到了学术界的极大关注。目前为止,一致

性理论已在多机器人系统编队控制^[1]、蜂拥^[2]和聚集^[3]、信息融合^[4]、协同决策^[5]以及耦合振荡器同步^[6]等领域得到了广泛应用。

但在很多应用中,由于智能体移动、通信拥塞或传输距离受限等因素的存在,研究一致性问题时不得不考虑时延对系统收敛性能的影响。目前已有大量文献^[7-15]研究具有通信时延的多智能体系统实现一致的收敛条件,大体分为频域和时域两种分析方法。在频率分析方法中,Saber 和

* 收稿日期:2011-03-02

基金项目:国家省部资助项目(A2820080247,6138101001)

作者简介:张庆杰(1981—),男,博士生。

Murray 讨论了含有对称、常数时延情况下无向多智能体网络的平均一致性问题^[7], 并利用 Gersgorin 圆盘定理给出系统实现一致的充要条件。进一步, 文献[8]将这一结果作了推广, 研究了对称时变时延和非对称时变时延情况下多智能体一致收敛的稳定判据。尽管上述频域方法能够给出系统实现一致所允许通信时延上界的解析表达, 但该方法通常仅适用于固定拓扑结构, 这是因为分析动态拓扑结构需要寻找公共的/多个 Lyapunov 函数, 而事实上这是十分困难的^[14]; 在时域分析方面, Wang 和 Slotine 基于压缩理论和波形变量设计方法构造了 Lyapunov-Krasovskii 函数, 并以此给出了对称加权无向连通网络的稳定判据^[10]。由于 Matlab 等数学工具在求解 Lyapunov-Krasovskii 函数存在性条件的优势, 文献[11, 13]采用 LMI 方法分别讨论了无向和有向多智能体网络所允许的最大通信时延上界, 由于这一类方法给出的稳定判据都是充分条件, 因此在判据的保守性方面仍存在进一步改善的可能。此外, 还有一些文献探讨了含有时延情况下一致性的相关问题, 如输入时延^[14]、离散系统^[15-16]以及联合连通拓扑^[17]等等。总的来说, 现有方法主要围绕一阶和二阶模型展开讨论, 只有少量文献涉及无通信时延条件下的高阶模型^[18-19], 而对具有通信时延条件下的高阶链式积分器模型目前还未进行讨论。在实际应用中, 多种类型的机器人平台^[20]均可描述为高阶链式积分器型模型, 因此, 该问题的研究使得多智能体一致性协调方法逐渐走向实际应用, 并对网络约束条件下的多机器人系统协调问题具有一定的指导意义。

本文针对一类具有 l 阶链式积分器型的多智能体系统, 讨论具有多个通信时延情况下实现平均一致的 LMI 稳定判据。与已有文献相比较, 本文重点探索了弱连通(联合连通)情况下的多智能体平均一致性, 并且在构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函中引入了自由权矩阵^[21]思想, 所得稳定判据具有保守性低、求解形式简单、适用更广的时变时延范围等特点。另外, 本文主要结论同样适用于低阶积分器型多智能体模型。

为研究方便, 文中的符号 \star 表示对称矩阵中的对称部分, $D > 0$ 表示矩阵 D 是正定的, $\mathbf{1}$ 表示适当维向量 $[1, 1, \dots, 1]^T$, 符号 \otimes 为 Kronecker 乘积。

1 数学基础

1.1 图论

通常, 多智能体间的交互关系可以由一个加权的有向图 $G = (\gamma, \epsilon, A)$ 来描述。其中, $\gamma = \{v_1, \dots, v_n\}$ 为图的节点集, 且节点序号属于有限集合 $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, n\}$, $\epsilon \subset \gamma \times \gamma$ 为图的边集, (v_i, v_j) 表示图的边。受通信距离限制, 节点 v_i 只能与其紧邻节点进行交互, 其紧邻节点的集合定义为 $\mathcal{N}_i = \{v_j \in \gamma : (v_i, v_j) \in \epsilon\}$ 。这种通信拓扑关系可由邻接矩阵 $A = [a_{ij}]$ 描述, 其非负元素 a_{ij} 的取值与图中的边相对应。例如, $(v_i, v_j) \in \gamma \Leftrightarrow a_{ij} > 0$ 。假定, $\forall i \in \mathcal{T}, a_{ii} = 0$ 。若对于任意 $i, j \in \mathcal{T}$ 且 $i \neq j$, 有 $a_{ij} = a_{ji}$ 成立, 则有向图转变为无向图。可见, 无向图为有向图的一种特例情况。令 $x_i \in \mathbf{R}$ 为节点 v_i 的状态值(如位置或温度等信息), 那么, 节点 v_i 和 v_j 状态达成一致当且仅当 $x_i = x_j$ 。多智能体所有节点实现一致当且仅当对于所有 $i, j \in \mathcal{T}, i \neq j, x_i = x_j$ 成立。此时, 该一致值称为群决策值^[7]。

1.2 相关定义和引理

下面, 在给出主要结论前, 介绍几个相关定义和引理。

定义 1 强连通 (Strongly-connected)^[7] 如果图 $G = (\gamma, \epsilon, A)$ 中每个节点与其它任意节点间存在一个有向路径, 则该图是强连通的。

定义 2 联合连通 (Jointly-connected)^[17] 考虑一组子图集合 $\{G_1, G_2, \dots, G_{N_s}\}$ 且每个子图均具有相同的节点集 γ , 那么它们可以等价的看作为一个具有节点集 γ 和边集为所有子图边集之和的联合图 G_{union} 。如果联合图 G_{union} 是强连通的(无向图是连通的), 那么称这组子图 $\{G_1, G_2, \dots, G_{N_s}\}$ 则是联合连通的。

定义 3 平衡图 (Balanced Graph)^[7] 有向图 $G = (\gamma, \epsilon, A)$ 中的节点 v_i 是平衡的, 当且仅当它的入度和出度相等, 如 $deg_{out}(v_i) = deg_{in}(v_i)$ 。如果图 $G = (\gamma, \epsilon, A)$ 是平衡的, 当且仅当它的所有节点是平衡的, 或者满足 $\sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji}, \forall i \in \mathcal{T}$ 。

引理 1^[7] 如果多智能体系统的通信拓扑结构是强连通的, 则它的 Laplacian 矩阵满足: (1) $rank(L) = n - 1$; (2) 0 为其中一个特征值, 且 $\mathbf{1}_n$ 是相应特征向量; (3) 其余 $n - 1$ 个特征值都具有正实部。如果通信拓扑结构为无向图, 则它们为

正实数。

引理 2 针对完全连通图的 Laplacian 矩阵

$$\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

若定义 E_{κ} 为 $\kappa (\leq n-1)$ 个非零特征值所对应特征向量所组成的矩阵。那么,对于给定任意半正定矩阵 $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$,则有 $E_{\kappa}^T F E_{\kappa} = \tilde{F}$ 成立。其中, $\tilde{F} \geq 0$ 且 $\tilde{F} \in \mathbf{R}^{\kappa \times \kappa}$ 。

2 问题描述

本文将讨论连续时间域下 l 阶链式积分器型的多智能体系统在通信时延情况下平均一致性问题,选择智能体模型为^[18]

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^{(0)}(t) &= x_i^{(1)}(t), \dots, \dot{x}_i^{(l-2)}(t) = x_i^{(l-1)}(t), \\ \dot{x}_i^{(l-1)}(t) &= u_i(t), i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x_i^{(k)}(t)$ 为智能体的第 k 阶状态, $u_i(t)$ 为一致性协议。

考虑存在多个通信时延,多智能体系统采用如下 consistency 协议

$$\begin{aligned} u_i(t) &= - \sum_{p=1}^{l-1} \beta_p x_i^{(p)} - \sum_{q=1}^m \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(t) \beta_0 [x_j^{(0)}(t - \tau_q(t)) - x_i^{(0)}(t - \tau_q(t))] \end{aligned} \quad (2)$$

其中,一致性协议系数项 $\beta_p, p = 0, 1, \dots, l-1$ 为正常数, $\tau_q(t)$ 为第 q 个通信时延, $q \in \{1, 2, \dots, m\}$ 。为方便讨论,将式(2)代入式(1),则多智能体系统可描述为如下系统方程形式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{x}(t) + \sum_{q=1}^m (\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{L}_{\sigma_q}) \mathbf{x}(t - \tau_q(t)) \quad (3)$$

其中,状态向量为 $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1^T(t), \dots, \mathbf{x}_n^T(t)]^T$, $\mathbf{x}_i(t) = [x_i^{(0)}(t), \dots, x_i^{(l-1)}(t)]^T, i \in \mathbf{I}$; \mathbf{L}_{σ_q} 为连续切换信号 $\sigma(t) : [0, \infty] \rightarrow \{1, 2, \dots, N_{ss}\}$ 所决定的具有第 q 个时延的通信拓扑所对应的 Laplacian 矩阵(若定义 Laplacian 矩阵为 $\mathbf{L} = [l_{ij}]$, 则 $l_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij}, l_{ij} = -a_{ij}, i \neq j$)。系数项矩阵分别为 $\mathbf{H} =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{l-1} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}_{l \times l}, \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\beta}_0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{l \times l}, \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_{l-1}]。$$

如果多智能体系统实现平均一致,当且仅当式(4)和(5)同时成立。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i^{(k)}(t) - x_j^{(k)}(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x_i^{(0)}(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{(0)}(0), \lim_{t \rightarrow \infty} x_i^{(k)}(t) = 0, \\ \forall i \in \mathcal{I}, \quad k &= 1, \dots, l-1 \end{aligned} \quad (4)$$

3 时延相关稳定判据

本节将讨论多智能体系统(3)渐近实现平均一致时系统所允许的最大时延上界。假定 m 个通信时延满足 $0 \leq \tau_i(t) \leq \bar{\tau}_i$ 及其变化率 $0 \leq \mu_i \leq \bar{\mu}_i, i = 1, 2, \dots, m$ 。

定理 1 对于存在 m 个通信时延的 l 阶链式积分器型多智能体系统(3),假定切换信号 $\sigma(t)$ 所指定的所有拓扑结构是联合连通的平衡有向图,且每个拓扑结构的驻留时间 $T_{dell} > 0$ 。给定 m 个通信时延上界 $\bar{\tau}_i$ 和时延变换率上界 $\bar{\mu}_i, i = 1, 2, \dots, m$,如果存在合适维公共矩阵 $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > 0, \tilde{\mathbf{Q}}_i^{(1)} = [\tilde{\mathbf{Q}}_i^{(1)}]^T \geq 0, \tilde{\mathbf{Q}}_i^{(2)} = [\tilde{\mathbf{Q}}_i^{(2)}]^T \geq 0, \tilde{\mathbf{R}}_i^{(1)} = [\tilde{\mathbf{R}}_i^{(1)}]^T \geq 0, \tilde{\mathbf{R}}_i^{(2)} = [\tilde{\mathbf{R}}_i^{(2)}]^T \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ 以及公共自由权矩阵 $\tilde{\mathbf{N}}_i = [\tilde{\mathbf{N}}_i^{(1)} \quad \tilde{\mathbf{N}}_i^{(2)} \quad \tilde{\mathbf{N}}_i^{(3)}]^T, \tilde{\mathbf{M}}_i = [\tilde{\mathbf{M}}_i^{(1)} \quad \tilde{\mathbf{M}}_i^{(2)} \quad \tilde{\mathbf{M}}_i^{(3)}]^T$ 和 $\tilde{\mathbf{S}}_i = [\tilde{\mathbf{S}}_i^{(1)} \quad \tilde{\mathbf{S}}_i^{(2)} \quad \tilde{\mathbf{S}}_i^{(3)}]^T, i = 1, 2, \dots, m$,使得如下 LMI 成立:

$$\sum_{i=1}^m \tilde{\Theta}_{\sigma_i} < 0, \quad \forall \sigma : [0, \infty] \rightarrow \{1, 2, \dots, N_{ss}\} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_{\sigma_i} &= \tilde{\Theta}_{\sigma_i}^{(1)} + \tilde{\Theta}_{\sigma_i}^{(2)} + \tilde{\Theta}_{\sigma_i}^{(3)} + \tilde{\Theta}_{\sigma_i}^{(4)}, \\ \tilde{\Theta}_{\sigma_i}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{H}}^T\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{Q}}_i^{(1)} + \tilde{\mathbf{Q}}_i^{(2)} & \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{\sigma_i} & \mathbf{0} \\ \star & -(1 - \bar{\mu}_i)\tilde{\mathbf{Q}}_i^{(1)} & \mathbf{0} \\ \star & \star & -\tilde{\mathbf{Q}}_i^{(2)} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Theta}_{\sigma_i}^{(2)} &= \bar{\tau}_i [\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{\sigma_i}, \mathbf{0}]^T (\tilde{\mathbf{R}}_i^{(1)} + \tilde{\mathbf{R}}_i^{(2)}) [\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{\sigma_i}, \mathbf{0}], \\ \tilde{\Theta}_{\sigma_i}^{(3)} &= [\tilde{\mathbf{N}}_i + \tilde{\mathbf{M}}_i, -\tilde{\mathbf{N}}_i + \tilde{\mathbf{S}}_i, -\tilde{\mathbf{S}}_i - \tilde{\mathbf{M}}_i] + [\tilde{\mathbf{N}}_i + \tilde{\mathbf{M}}_i, -\tilde{\mathbf{N}}_i + \tilde{\mathbf{S}}_i, -\tilde{\mathbf{S}}_i - \tilde{\mathbf{M}}_i]^T, \\ \tilde{\Theta}_{\sigma_i}^{(4)} &= \bar{\tau}_i \tilde{\mathbf{N}}_i [\tilde{\mathbf{R}}_i^{(1)}]^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_i^T + \bar{\tau}_i \tilde{\mathbf{S}}_i [\tilde{\mathbf{R}}_i^{(1)}]^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_i^T + \bar{\tau}_i \tilde{\mathbf{M}}_i [\tilde{\mathbf{R}}_i^{(2)}]^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_i^T, \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = E_{\kappa}^T (\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) E_{\kappa},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{\sigma_i} = E_{\kappa}^T (\boldsymbol{\Gamma} \otimes \mathbf{L}_{\sigma_i}) E_{\kappa}$$

E_{κ} 为 $l_n \times l_n$ 维完全图 Laplacian 阵的 κ 个非零特

征值对应的特征向量矩阵,则多智能体系统(3)能够渐近实现平均一致。

证明 根据多智能体实现平均一致的条件

(5) 可知, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{(k)}, k = 0, 1, \dots, l - 1$ 为不变向量。因此,借助系统分解思想^[7], 状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 可以分解为如下两个解耦部分

$$\mathbf{x}(t) = \text{Ave}(\mathbf{x}) \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_l^T + \boldsymbol{\delta}(t) \quad (7)$$

其中, $\text{Ave}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \boldsymbol{\delta}(t)$ 可描述多智能体状态不一致部分。显然, $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{0}$ 时, 多智能体实现平均一致。也就是说多智能体系统(3)能否实现平均一致的收敛条件可以转化为判断系统(8)是否具有稳定的零平衡点。

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}(t) = (\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_n) \boldsymbol{\delta}(t) + \sum_{q=1}^m (\boldsymbol{\Gamma} \otimes \mathbf{L}_{\sigma_q}) \boldsymbol{\delta}(t - \tau_q) \quad (8)$$

对于所有 $\sigma: [0, \infty] \rightarrow \{1, 2, \dots, N_{ss}\}$ 所决定的不一致向量系统(8), 构造如下公共 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\sum_{i=1}^m 2\xi_i^T(t) N_i [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau_i(t)) - \int_{t-\tau_i(t)}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds] = 0 \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^m 2\xi_i^T(t) M_i [\mathbf{x}(t - \tau_i(t)) - \mathbf{x}(t - \bar{\tau}_i) - \int_{t-\bar{\tau}_i}^{t-\tau_i(t)} \dot{\mathbf{x}}(s) ds] = 0 \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^m 2\xi_i^T(t) S_i [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \bar{\tau}_i) - \int_{t-\bar{\tau}_i}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds] = 0 \quad (13)$$

这里, $\xi_i(t) = [\boldsymbol{\delta}^T(t), \boldsymbol{\delta}^T(t - \tau_i(t)), \boldsymbol{\delta}^T(t - \bar{\tau}_i)]^T$ 。

接下来,计算泛函 $V(t, \boldsymbol{\delta}(t))$ 的导数

$$\begin{aligned} V(t, \boldsymbol{\delta}(t)) &= 2\boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) + \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{Q}_i^{(1)} \boldsymbol{\delta}(t) - \sum_{i=1}^m (1 - \dot{\tau}_i(t)) \boldsymbol{\delta}^T(t - \tau_i(t)) \mathbf{Q}_i^{(1)} \boldsymbol{\delta}(t - \tau_i(t)) \\ &+ \sum_{i=1}^m [\boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{Q}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}(t) - \boldsymbol{\delta}^T(t - \bar{\tau}_i) \mathbf{Q}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}(t - \bar{\tau}_i)] + \sum_{i=1}^m \bar{\tau}_i \dot{\boldsymbol{\delta}}^T(t) (\mathbf{R}_i^{(1)} + \mathbf{R}_i^{(2)}) \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) \\ &- \sum_{i=1}^m \int_{t-\bar{\tau}_i}^t \boldsymbol{\delta}^T(s) (\mathbf{R}_i^{(1)} + \mathbf{R}_i^{(2)}) \dot{\boldsymbol{\delta}}(s) ds \end{aligned} \quad (14)$$

由于 $\dot{\tau}_i(t) \leq \bar{\mu}_i$ 以及式(11) ~ (13) 成立, 可得

$$\begin{aligned} V(t, \boldsymbol{\delta}(t)) &\leq 2\boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) + \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\delta}^T(t) (\mathbf{Q}_i^{(1)} + \mathbf{Q}_i^{(2)}) \boldsymbol{\delta}(t) - \sum_{i=1}^m (1 - \bar{\mu}_i) \boldsymbol{\delta}^T(t - \tau_i(t)) \mathbf{Q}_i^{(1)} \boldsymbol{\delta}(t - \tau_i(t)) \\ &- \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\delta}^T(t - \bar{\tau}_i) \mathbf{Q}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}(t - \bar{\tau}_i) + \sum_{i=1}^m \bar{\tau}_i \dot{\boldsymbol{\delta}}^T(t) (\mathbf{R}_i^{(1)} + \mathbf{R}_i^{(2)}) \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) - \sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i(t)}^t \boldsymbol{\delta}^T(s) \mathbf{R}_i^{(1)} \dot{\boldsymbol{\delta}}(s) ds \\ &- \sum_{i=1}^m \int_{t-\bar{\tau}_i}^{t-\tau_i(t)} \boldsymbol{\delta}^T(s) \mathbf{R}_i^{(1)} \dot{\boldsymbol{\delta}}(s) ds - \sum_{i=1}^m \int_{t-\bar{\tau}_i}^t \boldsymbol{\delta}^T(s) \mathbf{R}_i^{(2)} \dot{\boldsymbol{\delta}}(s) ds + \sum_{i=1}^m 2\xi_i^T(t) N_i [\boldsymbol{\delta}(t) - \boldsymbol{\delta}(t - \tau_i(t)) \\ &- \int_{t-\tau_i(t)}^t \dot{\boldsymbol{\delta}}(s) ds] + \sum_{i=1}^m 2\xi_i^T(t) M_i [\boldsymbol{\delta}(t - \tau_i(t)) - \boldsymbol{\delta}(t - \bar{\tau}_i) - \int_{t-\bar{\tau}_i}^{t-\tau_i(t)} \dot{\boldsymbol{\delta}}(s) ds] \\ &+ \sum_{i=1}^m 2\xi_i^T(t) S_i [\boldsymbol{\delta}(t) - \boldsymbol{\delta}(t - \bar{\tau}_i) - \int_{t-\bar{\tau}_i}^t \dot{\boldsymbol{\delta}}(s) ds] \end{aligned} \quad (15)$$

代入式(8), 上式可进一步整理为

$$\begin{aligned} V(t, \boldsymbol{\delta}(t)) &= \boldsymbol{\delta}^T(t) \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i(t)}^t \boldsymbol{\delta}^T(s) \mathbf{Q}_i^{(1)} \boldsymbol{\delta}(s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_{t-\bar{\tau}_i}^t \boldsymbol{\delta}^T(s) \mathbf{Q}_i^{(2)} \boldsymbol{\delta}(s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_{-\bar{\tau}_i}^0 \int_{t+\theta}^t \boldsymbol{\delta}^T(s) (\mathbf{R}_i^{(1)} \\ &+ \mathbf{R}_i^{(2)}) \dot{\boldsymbol{\delta}}(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}, \mathbf{Q}_i^{(1)} = [\mathbf{Q}_i^{(1)}]^T \geq \mathbf{0}, \mathbf{Q}_i^{(2)} = [\mathbf{Q}_i^{(2)}]^T \geq \mathbf{0}, \mathbf{R}_i^{(1)} = [\mathbf{R}_i^{(1)}]^T \geq \mathbf{0}, \mathbf{R}_i^{(2)} = [\mathbf{R}_i^{(2)}]^T \geq \mathbf{0}, i = 1, 2, \dots, m$ 均为待定合适维矩阵。

根据牛顿莱布尼兹公式,有

$$f(t) - f(t - r) = \int_{t-r}^t \dot{f}(s) ds \quad (10)$$

对于公共合适维自由权矩阵 $N_i = [N_i^{(1)} N_i^{(2)} N_i^{(3)}]^T, M_i = [M_i^{(1)} M_i^{(2)} M_i^{(3)}]^T$ 和 $S_i = [S_i^{(1)} S_i^{(2)} S_i^{(3)}]^T, i = 1, 2, \dots, m$, 有下面等式成立

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t, \delta(t)) \leq & \sum_{i=1}^m \xi_i^T(t) \Theta_i \xi_i(t) - \sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i(t)}^t [\xi_i^T(t) N_i + \delta^T(s) R_i^{(1)}] [R_i^{(1)}]^{-1} [N_i^T \xi_i(t) + R_i^{(1)} \dot{\delta}(s)] ds \\
 & - \sum_{i=1}^m \int_{t-\bar{\tau}_i}^{t-\tau_i(t)} [\xi_i^T(t) S_i + \delta^T(s) R_i^{(1)}] [R_i^{(1)}]^{-1} [S_i^T \xi_i(t) + R_i^{(1)} \dot{\delta}(s)] ds \\
 & - \sum_{i=1}^m \int_{t-\bar{\tau}_i}^t [\xi_i^T(t) M_i + \delta^T(s) R_i^{(2)}] [R_i^{(2)}]^{-1} [M_i^T \xi_i(t) + R_i^{(2)} \dot{\delta}(s)] ds
 \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Theta_i &= \Theta_i^{(1)} + \Theta_i^{(2)} + \Theta_i^{(3)} + \Theta_i^{(4)} \\
 \Theta_i^{(1)} &= \begin{bmatrix} P(H \otimes I_n) + (H \otimes I_n)^T P + Q_i^{(1)} + Q_i^{(2)} & P(\Gamma \otimes L_{\sigma i}) & 0 \\ \star & -(1 - \bar{\mu}_i) Q_i^{(1)} & 0 \\ \star & \star & -Q_i^{(2)} \end{bmatrix} \\
 \Theta_i^{(2)} &= \bar{\tau}_i [H \otimes I_n, \Gamma \otimes L_{\sigma i}, 0]^T (R_i^{(1)} + R_i^{(2)}) [H \otimes I_n, \Gamma \otimes L_{\sigma i}, 0] \\
 \Theta_i^{(3)} &= [N_i + M_i, -N_i + S_i, -S_i - M_i] + [N_i + M_i, -N_i + S_i, -S_i - M_i]^T \\
 \Theta_i^{(4)} &= \bar{\tau}_i N_i [R_i^{(1)}]^{-1} N_i^T + \bar{\tau}_i S_i [R_i^{(1)}]^{-1} S_i^T + \bar{\tau}_i M_i [R_i^{(2)}]^{-1} M_i^T
 \end{aligned}$$

显然,不等式(15)右边的最后三项均小于 0, 如果 $\sum_{i=1}^m \xi_i^T(t) \Theta_i \xi_i(t) < 0$ 或 $\sum_{i=1}^m \Theta_i < 0$ 成立, 则系统(8)的零平衡点是稳定的。但由引理 1 可知,强连通条件下多智能体系统的通信拓扑结构所对应的 Laplacian 矩阵是奇异的。因此,在联合连通条件下系统(8)的系数矩阵为奇异阵,正因为如此,通常无法正确判断 Lyapunov-Krasovskii 泛函中的系数矩阵 $P = P^T > 0$ 以及 $Q_i^{(1)} = [Q_i^{(1)}]^T \geq 0, Q_i^{(2)} = [Q_i^{(2)}]^T \geq 0, R_i^{(1)} = [R_i^{(1)}]^T \geq 0, R_i^{(2)} = [R_i^{(2)}]^T \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ 的存在性。为此,对上述矩阵作如下降维处理:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P} &= E_{ck}^T P E_{ck}, \tilde{H} = E_{ck}^T (H \otimes I_n) E_{ck} \\
 \text{对于所有 } i &= 1, 2, \dots, m \\
 \tilde{R}_i^{(1)} &= E_{ck}^T R_i^{(1)} E_{ck} \\
 \tilde{R}_i^{(2)} &= E_{ck}^T R_i^{(2)} E_{ck} \\
 \tilde{Q}_i^{(1)} &= E_{ck}^T Q_i^{(1)} E_{ck}, \tilde{Q}_i^{(2)} = E_{ck}^T Q_i^{(2)} E_{ck} \\
 \tilde{M}_i &= E_{ck}^T M_i E_{ck}, \tilde{N}_i = E_{ck}^T N_i E_{ck}, \tilde{S}_i = E_{ck}^T S_i E_{ck}
 \end{aligned}$$

这里, $E_{ck} \in \mathbf{R}^{l_n \times (l_n - \kappa)}$ 为 $l_n \times l_n$ 维完全图 Laplacian 阵的 κ 个非零特征值对应的特征向量矩阵。

类似前述过程,可构造新的公共 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}(t, \tilde{\delta}(t)) &= \tilde{\delta}^T(t) \tilde{P} \tilde{\delta}(t) + \sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i(t)}^t \tilde{\delta}^T(s) \tilde{Q}_i^{(1)} \tilde{\delta}(s) ds \\
 &+ \sum_{i=1}^m \int_{t-\bar{\tau}_i}^t \tilde{\delta}^T(s) \tilde{Q}_i^{(2)} \tilde{\delta}(s) ds
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^m \int_{-\tau_i}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\tilde{\delta}}^T(s) (\tilde{R}_i^{(1)} + \tilde{R}_i^{(2)}) \dot{\tilde{\delta}}(s) ds d\theta \tag{17}$$

以及 $\dot{\tilde{V}}(t, \tilde{\delta}(t)) \leq \sum_{i=1}^m \tilde{\xi}_i^T(t) \tilde{\Theta}_i \tilde{\xi}_i(t)$ 。这里, $\tilde{\delta}(t) = E_{ck}^T \delta(t)$ 。同理有 $\tilde{\xi}_i(t) = E_{ck}^T \xi_i(t)$ 成立。系数矩阵 $\tilde{\Theta}_i$ 与不等式(6)中的定义相同。也就是说,如果存在合适维公共矩阵 $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0, \tilde{Q}_i^{(1)} = [\tilde{Q}_i^{(1)}]^T \geq 0, \tilde{Q}_i^{(2)} = [\tilde{Q}_i^{(2)}]^T \geq 0, \tilde{R}_i^{(1)} = [\tilde{R}_i^{(1)}]^T \geq 0, \tilde{R}_i^{(2)} = [\tilde{R}_i^{(2)}]^T \geq 0$ 以及合适维公共自由权矩阵 $\tilde{N}_i = [\tilde{N}_i^{(1)} \quad \tilde{N}_i^{(2)} \quad \tilde{N}_i^{(3)}]^T, \tilde{M}_i = [\tilde{M}_i^{(1)} \quad \tilde{M}_i^{(2)} \quad \tilde{M}_i^{(3)}]^T$ 和 $\tilde{S}_i = [\tilde{S}_i^{(1)} \quad \tilde{S}_i^{(2)} \quad \tilde{S}_i^{(3)}]^T, i = 1, 2, \dots, m$,使得不等式(6)成立,那么存在一个充分小的 $\varepsilon > 0$,满足 $\dot{\tilde{V}}(t, \tilde{\delta}(t)) \leq -\varepsilon \|\tilde{\delta}(t)\|^2$ 。

另一方面,由于 $E_c^T (I_l \otimes F_{n \times n}) E_c = \text{diag}(E_{ck}^T (I_l \otimes F_{n \times n}) E_{ck}, 0) = \text{diag}(\tilde{F}_{(l_n - \kappa) \times (l_n - \kappa)}, 0)$ 成立,所以有 $(I_l \otimes F_{n \times n}) > 0$ 等价于 $\tilde{F}_{(l_n - \kappa) \times (l_n - \kappa)} > 0$ 。依此类推,可以证明 $\tilde{V}(t, \tilde{\delta}(t)) \leq -\varepsilon \|\tilde{\delta}(t)\|^2$ 成立,即零为系统(8)的稳定平衡点,则多智能体系统(3)可以渐近实现平均一致性。

注 1:在定理 1 的证明过程中,引入了自由权矩阵 $\tilde{N}_i, \tilde{M}_i, \tilde{S}_i, i = 1, 2, \dots, m$,放宽了对 Lyapunov-Krasovskii 泛函求导后的缩放程度,因此可得到保守性更低的时延相关稳定性判据。

注 2:与已有文献结论相比,定理 1 假设条件中未对通信时延变化率上界进行限制,实现了适

用于 $0 \leq \mu_i < 1$ 和 $\mu_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, m$ 两种情况的统一表达形式。

注 3: 借助 Matlab LMI 工具箱等数学软件包可直接计算获得联合连通条件下多智能体实现平均一致所允许的最大通信时延, 而对于传统频率分析方法, 要判断公共 Lyapunov-Krasovskii 泛函的存在性是十分困难的。

注 4: 特别地, 当 $l = 1$ 或 $l = 2$ 时, 定理 1 适用于单/双积分器型多智能体实现平均一致所允许的最大通信时延。从这个意义上说, 文献 [17] 可以作为本文所得结论在 $l = 1$ 时的一种特例情况。

4 数值实例与数值仿真

4.1 判据保守性比较

为体现本文提出的稳定判据在保守性方面的优势, 考虑图 1 中两个联合连通平衡图 $\{G_a, G_b\}$, 讨论通信时延条件下单积分器型 ($l = 1$) 多智能体系统实现平均一致性所允许的最大通信时延。为了讨论方便, 令 $m = 1$ 且假定联合连通图 $\{G_a, G_b\}$ 的邻接矩阵中只含 0、1 元素。

表 1 不同时延变化率条件下所允许通信时延上界比较 ($\beta_0 = 1$)

	$\bar{\mu} = 0$	$\bar{\mu} = 0.5$	$\bar{\mu} = 0.9$	任意 $\bar{\mu}$
文献 [17] 方法	0.500	0.334	0.091	-
本文方法	0.558	0.538	0.538	0.538

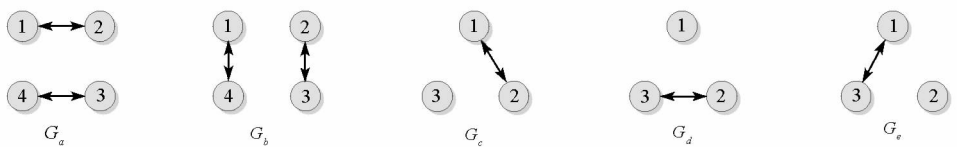


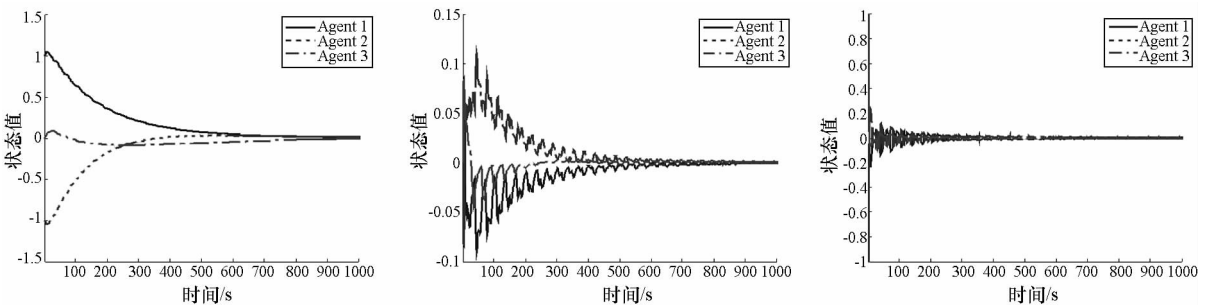
图 1 联合连通拓扑图 $\{G_a, G_b\}$ 和 $\{G_c, G_d, G_e\}$

Fig. 1 Jointly-connected topologies graphs $\{G_a, G_b\}$ and $\{G_c, G_d, G_e\}$

从表 1 的结果来看, 本文所给出的判据在保守性方面较已有文献 [17] 具有较大的改善, 主要表现为: 随着时延变化率的增加, 时延上界并未呈现像文献 [17] 方法所得结果所体现出的迅速衰减特性, 表明本文方法对时延变化率依赖程度较小。若构造新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函 (只包含式 (9) 中的 1、3 和 4 项), 则可得到时延相关/时延变化率无关的稳定判据。由于本文中定理 1 未对时延变换率的上界做出任何假设, 因此可得到任意 $\bar{\mu}$ 条件下多智能体实现平均一致所允许的通信时延上界, 而文献 [17] 所得结论只适用于 $0 \leq \bar{\mu} < 1$ 情况。

4.2 数值仿真

以图 1 中另外三个联合连通平衡图 $\{G_c, G_d, G_e\}$ 为例, 同样假定联合连通图的邻接矩阵中只含 0、1 元素。下面将分别讨论三阶链式积分器型多智能体在通信时延条件下实现平均一致所允许的最大通信时延上界。如前所述, 本文提出的稳定判据对时延变化率灵敏度较低, 因此这里只讨论通信时延变化率为 0 情况下的计算结果和数值仿真。令 $\tau = \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{23} = \tau_{32} = \tau_{13} = \tau_{31}$, 当 $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 10$, 由定理 1 计算可得多智能体实现平均一致的最大时延上界为 $\bar{\tau} = 0.351$ 。图 2 ~ 图 4 给出联合连通拓扑图驻留时间分别为 1s, 2s 和 3s 时的系统状态演化曲线 (拓扑切换顺序为 $G_c \rightarrow G_d \rightarrow G_e \rightarrow G_c \rightarrow \dots$)。



(a) 零阶状态演化曲线

(b) 一阶状态演化曲线

(c) 二阶状态演化曲线

图 2 驻留时间为 1s 时三阶链式积分器型多智能体系统状态演化过程

Fig. 2 State evolution of multi-agent systems with third-order chain integrator dynamics when dwell time is 1s

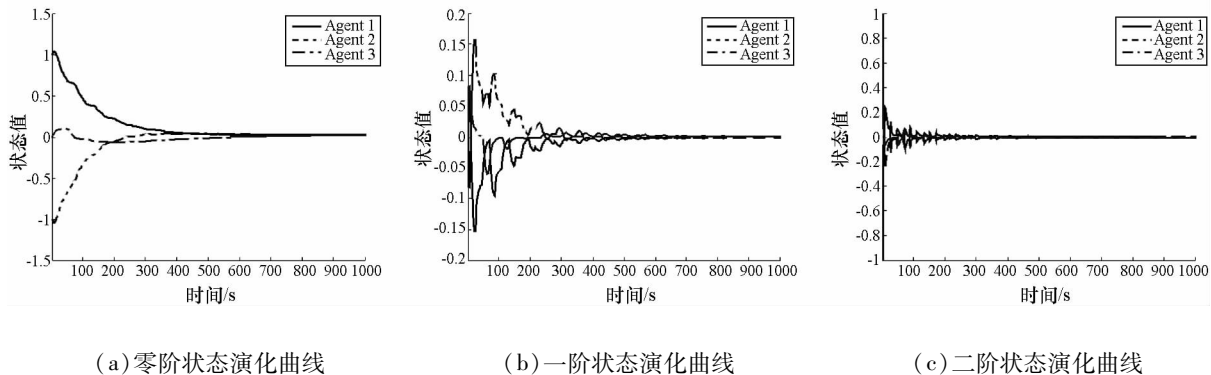


图3 驻留时间为2s时三阶链式积分器型多智能体系统状态演化过程

Fig. 3 State evolution of multi-agent systems with third-order chain integrator dynamics when dwell time is 2s

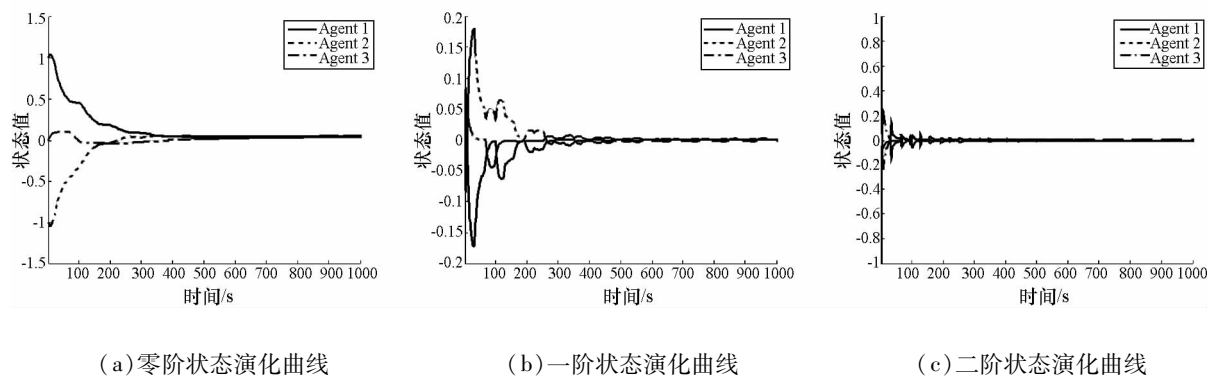


图4 驻留时间为3s时三阶链式积分器型多智能体系统状态演化过程

Fig. 4 State evolution of multi-agent systems with third-order chain integrator dynamics when dwell time is 3s

从图2~图4的仿真曲线来看,三阶链式积分器型多智能体在满足定理1所得最大通信时延情况下均实现了平均一致,从而验证了定理1的有效性。同时,从数值仿真结果可知,系统时延与联合连通拓扑图驻留时间之间的比值越大,系统实现平均一致的收敛时间越长,演化过程中高阶状态值震荡越明显;反之,系统实现平均一致的收敛时间越短,演化过程中高阶状态值震荡明显减弱。

5 结论

本文采用时域分析方法研究并得到了联合连通条件下的 l 阶链式积分器型多智能体实现平均一致的时延相关 LMI 稳定判据,主要结论有:(1) 针对联合连通(弱连通)条件下的多智能体平均一致性问题,通过构造公共 Lyapunov-Krasovskii 泛函的方法可以得到基于 LMI 表达的稳定性判据,不同于频域方法在构造公共/多 Lyapunov 函数所表现出的难度,它可借助数学软件包直接获得最大通信时延的数值解;(2) 在对公共 Lyapunov-Krasovskii 泛函求导的过程中引入了自由权矩阵思想,时延相关稳定判据在保守性方面得到了较大改善。自由权矩阵的引入,虽然在判

断矩阵存在性方面增加了判据的计算复杂度,但它同样可以借助数学软件包进行计算,继而得到存在性结论;(3) 与已有文献[17]结论相比,本文所得结论未对通信时延变化率上界进行限制,实现了适用于 $0 \leq \mu_i < 1$ 和 $\mu_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, m$ 两种情况的统一表达形式;(4) 本文所得结论适用于判断时延条件下单积分器($l = 1$)和双积分器($l = 2$)型多智能体系统平均一致性问题。此外,它还可作为不同通信时延情况下多智能体系统一致性协议中的比例项系数选择以及拓扑结构设计的依据。

接下来可以继续讨论如何更为合理地构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函,如考虑多个通信时延之间的相互关系,以便进一步降低充分条件的保守性。

参考文献:

[1] Porfiri M, Roberson D G, Stilwell D J. Tracking and Formation Control of Multiple Autonomous Agents: A Two-level Consensus Approach[J]. Automatica, 2007, 43(8):1318 - 1328.
 [2] Su H S, Wang X F, Lin Z L. Flocking of Multi-Agents With a Virtual Leader[J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 2009, 54(2):293 - 307.
 [3] Lin J, Morse A S, Anderson B D O. The Multi-agent

- Rendezvous Problem. Part 1: The Synchronous Case [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2007, 46(6): 2096–2119.
- [4] Saber R O. Distributed Kalman Filter with Embedded Consensus Filters [C]//44th IEEE Conf. on Decision and Control & European Control Conf., 2005: 8179–8184.
- [5] Bauso D, Giarre L, Pesenti R. Distributed Consensus Protocols for Coordinating Buyers [C]//42nd IEEE Conf. on Decision and Control, 2003: 588–592.
- [6] Jadbabaie A, Motee N, Barahona M. On the Stability of the Kuramoto Model of Coupled Nonlinear Oscillators [C]//Proc. of the 2004 American Control Conf., 2004: 4296–4301.
- [7] Saber R O, Murray R. Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-delays [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2004, 49(9):1520–1533.
- [8] Bliman P A, Trecate G F. Average Consensus Problems in Networks of Agents with Delayed Communications [J]. *Automatica*, 2008, 44(8):1985–1995.
- [9] Moreau L. Stability of Continuous-time Distributed Consensus Algorithms [C]//43rd IEEE Conf. on Decision and Control, 2004: 3998–4003.
- [10] Wang W, Slotine J. Contraction Analysis of Time-delayed Communications and Group Cooperation [J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2006, 51(4): 712–717.
- [11] Sun Y G, Wang L, Xie G M. Average Consensus in Networks of Dynamic Agents with Switching Topologies and Multiple Time-varying Delays [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(2):175–183.
- [12] Münz U, Papachristodoulou A, Allgower F. Nonlinear Multi-Agent System Consensus with Time-varying Delays [C]//Proc. 17th IFAC World Congress, 2008: 1522–1527.
- [13] Lin P, Jia Y M. Average Consensus in Networks of Multi-agents with Both Switching Topology and Coupling Time-delay [J]. *Physica A-Statistical Mechanics and Its Application*, 2008, 387(1):303–313.
- [14] Tian Y P, Liu C L. Robust Consensus of Multi-agent Systems with Diverse Input Delays and Asymmetric Interconnection Perturbations [J]. *Automatica*, 2009, 45(5):1347–1353.
- [15] Xiao F, Wang L. Consensus Protocols for Discrete-time Multi-agent Systems with Time-varying Delays [J]. *Automatica*, 2008, 44(10):2577–2582.
- [16] Lin P, Jia Y M. Consensus of Second-order Discrete-time Multi-agent Systems with Nonuniform Time-varying Delays and Dynamically Changing Topologies [J]. *Automatica*, 2009, 45(9):2154–2158.
- [17] Lin P, Jia Y M, Du J P, et al. Average Consensus for Networks of Continuous-time Agents with Delayed Information and Jointly-connected Topologies [C]//Proc. of the 2009 American Control Conf., 2009: 3884–3889.
- [18] Ren W, Moore K L, Chen Y Q. High-order and Model Reference Consensus Algorithms in Cooperative Control of Multivehicle Systems [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Trans. of the ASME*, 2007, 129: 678–688.
- [19] Jiang F C, Wang L. Consensus Seeking of High-order Dynamic Multi-agent Systems with Fixed and Switching Topologies [J]. *International Journal of Control*, 2010, 83: 404–420.
- [20] 祝晓才,董国华,胡德文. 轮式移动机器人有限时间镇定控制器设计 [J]. *国防科技大学学报*, 2006, 28(2):121–127.
- [21] Wu M, He Y, She J H, et al. Delay-dependent Criteria for Fobust Stability of Time-varying Delay Systems [J]. *Automatica*, 2004, 40(8):1435–1439.