

文章编号:1001-2486(2011)05-0161-06

一种改进的指纹图像局部方向场匹配方法*

陈 晖¹,舒 欣²,殷建平¹,祝 恩¹

(1. 国防科技大学 计算机学院,湖南 长沙 410073; 2. 军事经济学院 襄樊分院,湖北 襄阳 441118)

摘要:指纹方向场真实地反映了指纹图像中本质的纹理特征,包括了指纹的基本形状、结构和走势。定义了局部方向场图像的描述方法,可以根据纹理信息有效地描述并区分不同的细节点。在低质量指纹图像,特别是存在较严重非线性形变的指纹图像中,细节点方向属性不够可靠,使得以细节点对作为参考对齐局部方向场图像的方法效果不佳。提出一种改进的局部方向场图像对齐和匹配方法,能够明显改善局部对齐效果,提高局部匹配的准确性,从而更加有效地区分对应和不对应细节点。实验结果验证了提出方法的有效性。

关键词:指纹识别;指纹方向场;局部对齐;局部匹配;指纹识别竞赛

中图分类号:TP391 **文献标识码:**A

An Improved Local Orientation Field Matching Method on Fingerprint Images

CHEN Hui¹, SHU Xin², YIN Jian-ping¹, ZHU En¹

(1. College of Computer, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Xiangfan College, The Military Economics Academy, Xiangyang 441118, China)

Abstract: Fingerprint orientation field describes the essential texture features in a fingerprint impression, including shape, structure and direction. A representation scheme is introduced to describe the local orientation field around a minutia, so as to describe and discriminate different minutiae based on the neighbor texture information. On poor-quality fingerprint images, especially when heavy nonlinear distortion exists, minutia direction is no longer reliable enough. As a result, it is not effective to align two local orientation field images with a minutiae pair as the reference. An improved alignment and matching method of local orientation field images is proposed, which can achieve much better performance and improve the matching accuracy more clearly. Experimental results show that the proposed method can evaluate the resemblance between two minutiae more effectively.

Key words: fingerprint identification; fingerprint orientation field; local alignment; local matching; fingerprint verification competition

指纹识别作为一项方便、可靠、快捷的身份验证手段,正在被越来越多的人了解并接受。在过去的30多年里,基于计算机的自动指纹识别系统已经成功地应用于机场、海关、银行等重要场所。但是随着应用的日益普及,人们对系统的识别性能提出了更高的要求。如何提高低质量指纹图像,特别是存在严重非线性形变的指纹图像的识别性能,是研究人员面临的重大挑战之一^[1-2]。

指纹包含若干交错分布的脊线和谷线,相邻脊线之间的交叉点和脊线的端点统称为细节点。基于细节点特征的指纹图像匹配方法,是目前自动指纹识别系统中最基础、应用最广泛的匹配方法。但是如果指纹图像质量比较低,获取的细节

点集合中往往会包含一定数量的伪细节点,同时还会丢失许多真实的细节点,即使是正确提取的真实细节点,其类型、位置和方向值也会存在一定的误差。这些因素使得仅仅基于细节点特征匹配指纹图像效果并不理想。为了提高识别的准确性,人们在细节点之外,不断尝试引入其它更加鲁棒的特征。

指纹方向场包含了指纹图像最基本的方向和结构信息,是对指纹纹线形状的一种抽象描述,在宏观上反映了指纹图像的几何拓扑结构,可以作为细节点特征的有效补充。结合细节点特征与方向场特征的指纹图像匹配方法具有模板体积小、实现容易、计算量低等诸多优点。一方面,目前针

* 收稿日期:2011-03-02

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60603015,60970034);高等学校全国优秀博士学位论文作者资助项目(2007B4);湖南省教育厅资助科研项目

作者简介:陈晖(1983—),男,博士生。

对指纹方向场特征提取方法的研究已经相对成熟,即使对质量较差的指纹图像,根据现有算法提取的方向场图像质量也能够令人满意;另一方面,由于自动指纹识别系统一般需要首先增强指纹图像,而其中包含了方向场的计算,因此在匹配过程中引入方向场特征,无需额外提取特征。

Tico^[3]定义了一种方向场描述结构,以描述细节点所在区域的局部方向场,实验验证了其描述方法对细节点良好的区分能力,为基于局部纹理信息的细节点匹配方法的研究提供了新的思路。Qi 等^[4]和 Zhu 等^[5]采用了类似的细节点描述思路,只是定义的采样点分布结构有所差异;Wang 等^[6]提出用采样点附近方向场块的平均方向作为采样点的方向,提高了描述的鲁棒性;Feng^[7]在细节点邻域局部方向场的基础上,补充了对频率场的采样描述,增加了描述子包含的信息量;He^[8]等则附加了图像的局部灰度方差信息;Tong^[9]则采用脊线间距、相对角度、脊线条数等度量值来描述各个采样点。

我们在实验中发现,Tico^[3]在匹配两个细节点邻域局部方向场时,间接实现了以两个细节点为参考的局部方向场图像对齐,并在此基础上计算两个局部方向场相似度。如果指纹图像质量较低,使得提取的细节点方向存在的误差较大,或者图像中存在较严重的非线性形变,以细节点对为参考对齐两个局部方向场图像并非最佳方案。因此,本文提出结合部分特定采样点与细节点对齐并匹配局部方向场。

1 局部方向场描述

以细节点为中心描述局部方向场是一种很自然的方法,因为细节点可以作为局部匹配的参考点。在描述细节点局部方向场时,我们采用与 Tico^[3]一致的采样点分布结构。Tico 定义了一组均匀分布在以细节点为圆心的 L 个圆周上的采样点。假设第 l 个圆周半径为 r_l ,上面均匀分布了 K_l 个采样点,采样点的分布结构如图 1 所示。按照这种采样方法,任何两个相邻采样点之间的距离均近似等于两个指纹图像脊线周期值。在我们的实验中采用了 Tico^[3]建议的参数:(($r_0 = 27$, $K_0 = 10$), ($r_1 = 45$, $K_1 = 16$), ($r_2 = 63$, $K_2 = 22$), ($r_3 = 81$, $K_3 = 28$))。

假设细节点方向为 α ($-\pi \leq \alpha < \pi$),细节点外围第 l 个圆周上的第 k 个采样点所在方向场块方向为 $\alpha_{l,k}$ ($-\pi/2 \leq \alpha_{l,k} < \pi/2$), $\alpha_{l,k}$ 相对于 α 的方向 $\beta_{l,k}$ 可以计算如下:

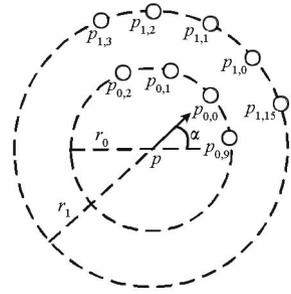


图 1 细节点方向场描述子采样点的分布结构
Fig. 1 Sample points of orientation field distributed around a minutia p

$$\beta_{l,k} = \lambda(\alpha_{l,k} - \alpha) \tag{1}$$

$$\lambda(\theta) = \begin{cases} \theta - \pi & (\theta \geq \pi/2) \\ \theta + \pi & (\theta < -\pi/2) \\ \theta & \text{其他} \end{cases} \tag{2}$$

这样,每一个细节点的邻域局部方向场,可以用其周围若干采样点的相对方向值描述如下

$$D_o(p) = \{\beta_{l,k}\}, (k=0, \dots, K_l - 1, l=0, \dots, L - 1) \tag{3}$$

如果采样点位于图像背景场,则视为无效采样点;如果一个细节点周围的有效采样点数小于采样点总数的 1/4 (19 个),则认为该细节点邻域局部方向场信息过于贫乏,不足以描述细节点邻域纹理,即其邻域局部方向场与它任何局部方向场的相似度为 0。

2 局部方向场对齐

假设查询指纹图像为 Q ,模板指纹图像为 T ,指纹图像对齐过程是为了找到一个 Q 到 T 的平移和旋转参数 ($\Delta x, \Delta y, \Delta \theta$),使得两幅图像能够最佳地叠合在一起。同样,在匹配细节点邻域局部方向场时,需要首先找到合适的局部图像对齐参数,以最佳地叠合两个局部方向场。

2.1 结合采样点的局部对齐思想

Tico^[3]在计算局部方向场相似度时,以细节点方向为初始方向对采样点编号,并且在每个采样点记录该位置方向场方向值与细节点方向的相对值,从而间接起到以细节点对为参考对齐局部方向场的效果。然而事实上,自动提取的细节点方向值会受到很多因素的干扰,比如指纹图像质量过低,图像中存在较严重的非线性形变,或者细节点提取算法设计不够完善等原因,往往会导致提取的细节点方向值存在一定的误差。这样,以细节点对为参考对齐局部方向场图像并不一定是最佳方案。

以图 2 为例,假设两幅指纹图像 Q 和 T 来自

同一手指,某细节点在 Q 和 T 中分别对应为 p 和 q 。 p 和 q 的外围圆周上各自均匀分布着 4 个采样点: $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ 和 $\{s'_1, s'_2, s'_3, s'_4\}$ (为便于理解,这里对真实场景进行了简化处理)。理想情况下,假设 Q 和 T 间只有图像旋转和平移发生,即只存在图像的仿射变换,在适当的仿射参数下 Q 和 T 可以完全叠合。按照 Tico^[3] 定义的方法, p 用其外围四个采样点描述为 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$, q 描述为 $\{\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \beta'_4\}$ 。如果提取的 p 和 q 方向值没有误差,那么 β_i 和 β'_i 恒等,细节点 p 和 q 的邻域局部方向场能够完全匹配,对应于图 2(c), 这时局部方向场基于细节点 p 和 q 对齐,能够完全叠合。

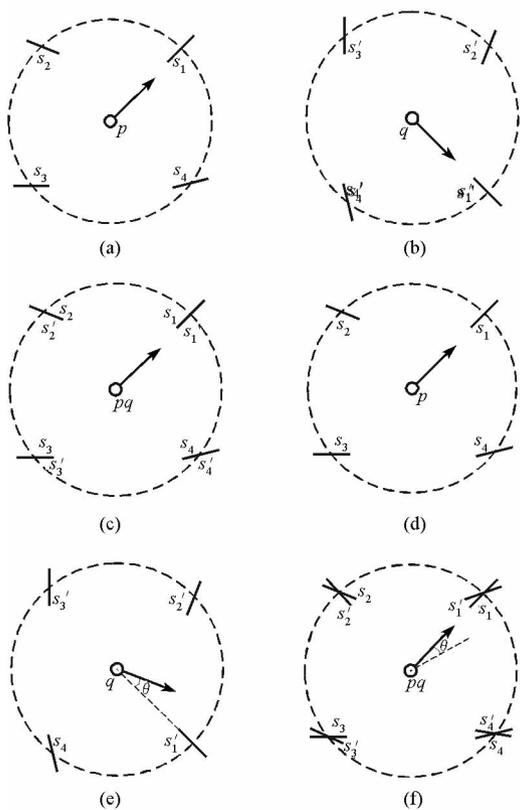


图 2 以细节点对为参考的局部方向场图像对齐过程

Fig. 2 Process of aligning two local orientation field images referred by a pair of minutiae

但是,如果因为某种原因导致提取的细节点方向值存在偏差,如图 2(e) 所示,假设提取的细节点 q 方向值存在偏差 θ (图中虚线表示正确的方向),在以 p 和 q 为参考细节点对对齐局部方向场时,便会如图 2(f) 所示存在较大的偏差,而事实上 p 和 q 的邻域方向场图像是可以完全叠合的。按照 Tico^[3] 定义的描述结构, q 外围的每一个采样点方向场方向与 q 方向的相对值都会存在偏差 θ (由于方向场以块为单位,较小的角度偏差所引起的采样点位置偏差也比较小,不会使采样

点落到另一个方向场块中,即不会改变采样点的方向场方向值),即每一个 β_i 和 β'_i 间差值均为 θ ,从而细节点 p 和 q 的邻域局部方向场相似度不再为 1。这时,以细节点对为参考对齐局部方向场图像便会引入误差,使得局部方向场对齐效果并非最佳,而应该代之以结合细节点方向与邻域采样点方向的整体对齐方案,这就是本文的局部方向场对齐主要思想。

2.2 对齐效果度量

由于目前人们主要采用接触式手段采集指纹图像,而人的手指是富有弹性的肌肉组织,在采集指纹时需要压印到二维的传感器表面或者纸面,而且人们往往还会有意无意地施加分布不均的外力,各种外力的综合作用直接导致了指纹图像中存在非线性形变。而非线性形变的存在,使得距离细节点越远的采样点,方向值越不可信。因此,我们在引入邻域采样点对齐局部方向场图像时,只考虑细节点外围第 1 层和第 2 层圆周上的采样点。根据本文第 1 节中定义的采样点分布结构,在细节点外第 1 层圆周上分布了 10 个采样点,第 2 层圆周上分布了 16 个采样点。第 2 层圆周采样点参与对齐,可以提高对齐的准确性,但计算代价相应增加,可以根据实际需求选择是否将其纳入考虑。

在对齐局部方向场图像时,为了发现最佳的对齐方案,首先需要确定度量函数 φ ,以评价某次对齐的效果。由于方向场图像离散表示成若干个采样点,度量函数的自变量为各个采样点位置的方向差异值。综合考虑,我们选择度量函数 $\varphi(X) = \sum X_i^2$,也可以选择 $\varphi(X) = \sum |X_i|$,对齐效果影响不大。

2.3 对齐过程

假设存在查询图像 Q 中某细节点 p 和模板图像 T 中某细节点 q ,对应邻域局部方向场图像分别为 Q_p 和 T_q 。以采用细节点外围第 1 层采样点参与对齐为例, Q_p 和 T_q 对齐过程遵循以下步骤:

1) 按照第 1 节中定义的采样点分布结构,记录 p 外围各采样点方向场方向与 p 方向的相对值 $\langle \beta_{0,0}, \beta_{0,1}, \dots, \beta_{0,9} \rangle$, 和 q 外围各采样点与 q 方向的相对值 $\langle \beta'_{0,0}, \beta'_{0,1}, \dots, \beta'_{0,9} \rangle$ 。以 p 和 q 为参考细节点对对齐 Q_p 和 T_q 时,根据式(4)计算各采样点位置的方向值之间的差异 $\Delta_{i,j}$,代入函数 φ 计算效果度量函数值。

$$\Delta_{i,j} = \beta_{i,j} - \beta'_{i,j} \tag{4}$$

2) 在 $[-k\varepsilon, k\varepsilon]$ 区间内, 以步长 ε 将 p 方向值旋转角度 θ , 以方向调整后的细节点 p 和 q 为参考细节点对齐 Q_p 和 T_q , 即根据式(5)计算各采样点位置的方向值之间的差异 $\Delta_{i,j}$, 代入函数 φ 计算效果度量函数值。

$$\Delta_{i,j} = \beta_{i,j} - \beta'_{i,j} - \theta \quad (5)$$

3) 如果 p 在顺时针方向上存在较大偏差, 使得按 p 和 q 初始方向编号的采样点需要错号对齐, 即对齐时 p 外围编号为 0 的采样点对齐到 q 外围编号为 9 的采样点, 分别用式(6)代替式(4), 式(7)代替式(5), 重复步骤 1) 和步骤 2)。由于一般 p 的方向偏差值不会特别大, 这里不考虑偏差达到 72° , 即需要错两个编号对齐的情况。

$$\Delta_{i,j} = \beta_{i,(j+1)\bmod 10} - \beta'_{i,j} \quad (6)$$

$$\Delta_{i,j} = \beta_{i,(j+1)\bmod 10} - \beta'_{i,j} - \theta \quad (7)$$

4) 如果 p 在逆时针方向上存在较大偏差, 使得按 p 和 q 初始方向编号的采样点需要错号对齐, 即对齐时 p 外围编号为 0 的采样点对齐到 q 外围编号为 1 的采样点, 分别用式(8)代替式(6), 式(9)代替式(7), 重复步骤 1) 和步骤 2)。

$$\Delta_{i,j} = \beta_{i,(j-1)\bmod 10} - \beta'_{i,j} \quad (8)$$

$$\Delta_{i,j} = \beta_{i,(j-1)\bmod 10} - \beta'_{i,j} - \theta \quad (9)$$

5) 选择使得效果度量函数取最大值的对齐参数, 作为最佳对齐方案。

3 局部方向场匹配

根据本文第 2 节的方法对齐细节点 p 和 q 的邻域局部方向场图像 Q_p 和 T_q 后, 将会得到一个角度值 θ , 即认为以旋转角度 θ 后的细节点 p 与 q 作为参考细节点对齐 Q_p 和 T_q 时最佳。

细节点方向需要调整的角度 θ 值相对而言比较小, 因而对于细节点外围第 1 层采样点, 位置改变很小, 一般不会使采样点落到下一个方向场块, 但是, 对于更外围的采样点, 特别是最外层圆周上的采样点, 由于距离细节点位置比较远, 即使微小的角度调整也可能使得采样点的位置发生较大改变, 因此有必要将细节点 p 角度调整后的方向作为初始方向, 计算采样点位置和方向值。

假设 p 外围第 l 个圆周上的第 k 个采样点方向场值与调整后的细节点 p 的相对方向为 $\beta_{l,k}$, p 的邻域局部方向场可以用结构 $\{\beta_{l,k}\}$ 表示, 令 q 的邻域局部方向场表示为 $\{\beta'_{l,k}\}$, 根据式(10)计算 Q_p 和 T_q 在细节点外第 l 个圆周上第 k 个采样点位置的相似度, 再按式(11)计算 Q_p 和 T_q 间的相似度。

$$s_o(p_{l,k}, q_{l,k}) = e^{-1\lambda(\beta'_{l,k} - \beta_{l,k}) / (\pi/16)} \quad (10)$$

$$S_o(Q_p, T_q) = \text{mean}(s_o(p_{l,k}, q_{l,k})) \quad (11)$$

4 实验结果

我们设计了一组实验以评估本文提出方法的有效性。实验基于 FVC2004 DB1 数据集, 来自于 2004 年的国际指纹识别竞赛中的数据库, 在其中人为引入了较严重的非线性形变, 数据集大小为 $100 \times 8, 100$ 个手指, 每个手指采集 8 幅图像。在特征提取阶段, 采用 Bazen^[10] 提出的算法提取方向场, 采用 Naccache^[11] 提出的算法提取细化图像。

实验包括两部分内容: 首先, 选择来自两幅指纹图像的两个对应细节点, 分别采用 Tico^[3] 提出的以细节点对为参考的局部匹配方法和本文提出的方法, 计算细节点邻域局部方向场图像的相似度, 观察两种方法的匹配过程和结果; 然后, 基于 FVC2004 DB1 数据集, 分别统计了对应细节点对和不对应细节点对采用 Tico^[3] 方法和本文方法计算的局部方向场相似度分布情况; 最后, 基于 FVC2000 DB2 数据集, 分别采用本文提出的改进方法和 Tong^[7] 提出的改进方法匹配指纹图像, 再综合两种改进方法匹配指纹图像, 比较 3 次实验的结果。

首先, 选择数据集中两幅受非线性形变影响比较严重的指纹图像, 以编号为“10_3”(表示第 10 枚手指采集的第 3 幅图像, 其它依此类推) 的指纹图像为查询图像 Q , 编号为“10_4”的指纹图像为模板图像 T , 选择 Q 中编号为 35 和 T 中编号为 34 的细节点分别记为 p 和 q , 它们来自同一个手指指纹的同一细节点。图 3 给出了 Q 和 T 的细化图上的细节点分布情况, 其中 p 和 q 均用方框标注。可以看出, 由于严重的非线性形变作用, p 和 q 的局部图像表现出较明显的差异。

以细节点外围第 1 层圆周上采样点为例, p 的外围圆周第 1 层采样点与 p 的相对方向值依次为 $\langle -3, -4, 5, 12, 12, 10, 5, -1, -5, -4 \rangle$, q 的外围圆周第 1 层采样点与 q 的相对方向值依次为 $\langle -6, 1, 6, 2, 1, 2, -1, -3, -2, -12 \rangle$ 。根据 Tico 所提出的对齐方法, 计算的采样点差值为 $\langle -3, 5, 1, -10, -11, -8, -6, -2, 3, -8 \rangle$, 从而第 1 层采样点的相似度为 $(e^{-3C} + e^{-5C} + \dots + e^{-8C})/10$ (其中 C 为某固定正常数)。而根据本文提出的方法, 应该基于方向旋转角度值 4 后的 p 与 q 对齐, 即计算的采样点差值为 $\langle 1, 9, 5, -6, -7, -4, -2, 2, 7, -4 \rangle$, 从而第一层的方向场相似度可以达到 $(e^{-C} + e^{-9C} + \dots + e^{-4C})/10$ 。

其它各层采样点计算过程类似。最终 p 和 q 采用 Tico 方法计算的相似度为 0.517, 而用本文方法则为 0.683, 更加接近真实值。

然后, 分别统计了对应细节点对和不对应细节点对在采用两种方法计算时的邻域局部方向场相似度分布情况。基于数据集 FVC2004 DB1b (DB1b 是 DB1 数据集的一个子集), 手工标注了 3000 个配对细节点对, 作为对应细节点对来源; 不对应细节点对则包含两部分, 1500 个属于来自同一手指指纹的不配对细节点对, 1500 个属于来自不同手指指纹的细节点对。图 4(a) 和图 4(b) 对应 Tico 算法配对细节点对和不配对细节点对的邻域局部方向场间的相似度分布情况; 图 4(c) 和图 4(d) 对应采用本文提出方法计算的相似度分布情况。可以看出, 采用本文提出的方法计算时, 对应细节点对相似度基本分布在值 0.5 以上区域, 与 Tico 方法相比更加集中于较大值区域, 而不对应细节点对相似度分布与 Tico 方法类似, 因而更能够更好地区分对应和不对应细节点对, 能够更加准确地匹配细节点邻域的局部方向场图像。

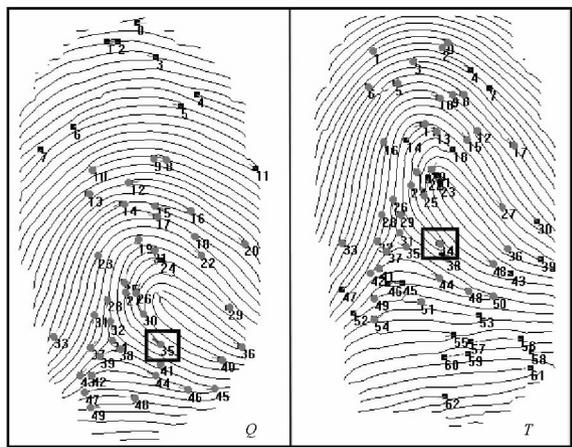
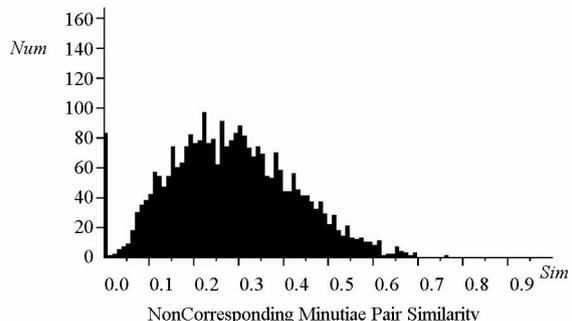
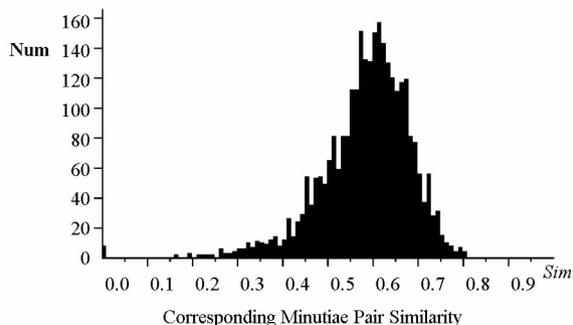


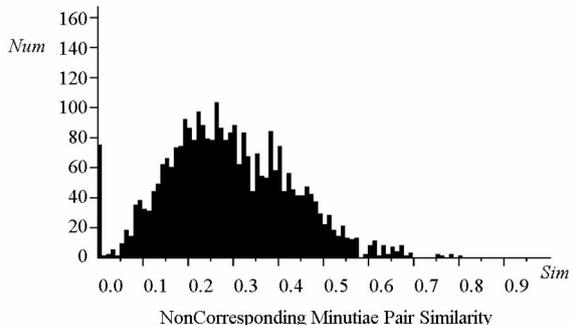
图 3 Q 和 T 细节点在细化图像上的分布图
Fig.3 Minutiae on skeleton image Q and T



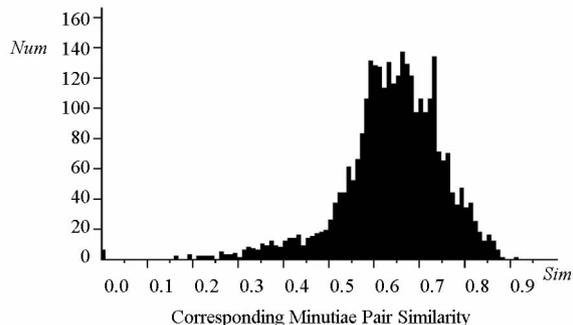
(a)



(b)



(c)



(d)

图 4 对应细节点对和不对应细节点对采用 Tico 提出的方法和本文所提出的方法匹配时的相似度分布图
Fig.4 Distribution of similarity values between corresponding and non-corresponding minutiae pairs using Tico's method and the proposed method

最后, 实验比较了 Tong^[9] 所提出方法和本文所提出的方法。Tong 在局部方向场基础上进一步加入了脊线数量等局部信息。由于这两种方法从不同的角度改进了 Tico^[9] 所提出的方法, 所以还综合了两方面的改进工作, 将综合后的改进方法与前两种方法进行比较。实验结果如表 1 所示, 其中 EER (Equal Error Rate) 表示错误接受率与错误拒绝率相等时的错误率, 一般可以认为, EER 值越小, 匹配准确率越高。可以看出, 本文的改进方法效果优于 Tong 所提出的方法, 而且由于这两种方法改进的角度不同, 所以在综合了这两种方法之后, 能进一步改善匹配性能。由于针

对 Tico 工作的改进方法很多,本文无法一一进行比较。总的说来,与前人的改进相比,本文从一个全新的角度改进了 Tico 所定义的局部描述子,与前人的改进工作存在很好的互补性。

表 1 三种改进方法的匹配结果

Tab. 1 Equal error rates of three local matching methods

| | 本文所提出的改进方法 | Tong 所提出的改进方法 | 综合两种改进后得到的方法 |
|-----|------------|---------------|--------------|
| EER | 1.6% | 2.73% | 1.54% |

5 结束语

如果指纹图像质量太低,或者图像中有效细节节点数太少,基于细节节点特征的指纹图像匹配方法效果往往不尽如人意,而细节节点邻域中丰富的图像纹理信息能够用以有效地描述并区分不同的细节节点。本文在分析一种经典的局部方向场匹配方法的基础上,提出了更加准确的局部方向场对齐和匹配算法。实验结果表明,本文方法能够更加准确有效地区分匹配细节节点对和不匹配细节节点对。

由于指纹图像中普遍存在非线性形变,因此本文方法中只采用细节节点附近的方向场描述细节节点邻域纹理信息,今后将尝试寻找更加适合的结构描述,以扩大方向场的有效描述区域,从而进一步提高局部方向场匹配方法对细节节点的区分能力。

参考文献:

- [1] 祝恩. 低质量指纹图像的特征提取与识别技术的研究[D]. 长沙:国防科技大学,2005.
- [2] Maltoni D, Maio D. Handbook of Fingerprint Recognition[M]. Springer,2009.
- [3] Tico M, Kuosmanen P. Fingerprint Matching Using An Orientation-based Minutiae Descriptor[J]. IEEE Transactions on PAMI, 2003, 25(8): 1009 - 1014.
- [4] Qi J, Wang Y S. A Robust Fingerprint Matching Method[J]. Pattern Recognition, 2005, 38(10): 1665 - 1671.
- [5] Zhu E, Yin J P, Zhang G M. Fingerprint Matching Based on Global Alignment of Multiple Reference Minutiae[J]. Pattern Recognition, 2005, 38(10): 1685 - 1694.
- [6] Wang X C, Li J W, Niu Y M. Fingerprint Matching Using OrientationCodes and PolyLines [J]. Pattern Recognition, 2007, 40(11): 3164 - 3177.
- [7] Feng J J. Combining Minutiae Descriptors for Fingerprint Matching[J]. Pattern Recognition, 2008, 41(1): 342 - 352.
- [8] He Y L, Tian J, Li L, et al. Fingerprint Matching Based on Global Comprehensive Similarity [J]. IEEE Transactions on PAMI, 2006, 28(6): 850 - 862.
- [9] Tong X F, Huang J H, Tang X L, et al. Fingerprint Minutiae Matching Using the Adjacent Feature Vector [J]. Pattern Recognition Letters, 2005, 26(9): 1337 - 1345.
- [10] Bazen A M, Gerez S H. Systematic Methods for the Computation of the Directional Fields and Singular Points of Fingerprints[J]. IEEE Transactions on PAMI, 2002, 24(7): 905 - 919.
- [11] Naccache N J, Shinghal R. An Investigation into the Skeletonization Approach of Hilditch [J]. Pattern Recognition, 1984, 17(3): 279 - 284.