

文章编号:1001-2486(2011)06-0095-05

基于 Gauss 伪谱法的航天器气动力辅助平面变轨问题研究*

符俊, 蔡洪, 李安梁

(国防科技大学 航天与材料工程学院, 湖南 长沙 410073)

摘要:气动力辅助变轨技术可以有效地节约燃料,是未来航天器新型变轨技术的发展方向之一。该文采用 Gauss 伪谱法对航天器从高轨道向低轨道共面轨道转移问题进行了研究。在考虑热流限制、控制约束的条件下,得到了航天器大气飞行段的次优轨迹,并对轨迹特性进行了分析,证明优化结果满足一阶最优性必要条件。同时采用间接法处理该问题,对两种方法的计算结果进行了比较。仿真分析表明:Gauss 伪谱法处理约束方法简单,解的精度高,且克服了间接法对初值敏感、鲁棒性差的缺点,适合应用于航天器大气内轨迹优化问题。

关键词:轨迹优化;升力系数;Gauss 伪谱法;打靶法;轨道转移

中图分类号:V448 文献标识码:A

Study of Spacecraft Aeroassisted Coplanar Orbital Transfer Based on Gauss Pseudospectral Method

FU Jun, CAI Hong, LI An-liang

(College of Aerospace and Material Engineering, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: It is well known that the use of aeroassisted orbital transfer can save fuel efficiently, thus representing one of development trends of new orbital transfer technology. This paper is concerned with the problem of coplanar orbital transfer of spacecraft from high earth orbit to low earth orbit based on Gauss pseudospectral method (GPM). With the consideration of heating rate limit and control constraints, sub-optimal trajectory of spacecraft's flight in atmosphere was obtained. On the analysis of trajectory characteristic the first-order necessary optimality conditions of optimized results was demonstrated. Indirect method was also adopted to solve the problem, then the calculation results of the two methods were compared. Simulation results show that it is a simple way to handle constraints with GPM, and it has high precision solutions and can overcome the disadvantages of the indirect method, such as initial value sensitivity and poor robustness. Therefore, GPM is suitable to be applied in the problem of atmospheric spacecraft trajectory optimization.

Key words: trajectory optimization; lift coefficient; Gauss pseudospectral method; shooting; orbital transfer

在航天任务中,燃料直接决定了航天器的性能和寿命,因此如何有效地节省燃料往往是进行航天任务设计时首先需要考虑的问题之一。对于航天器轨道转移任务而言,利用气动力辅助技术可以节约大量的燃料,在未来具有很大的应用潜力。

自20世纪60年代 London 首次在关于变轨问题的论文中提出气动力辅助变轨概念以来^[1],该问题吸引了众多学者的兴趣,涌现出了大量的文献,涵盖了航天器气动外形设计、行星大气捕获、推力协同轨道面改变和轨道转移等方面内容^[2]。其中在轨道转移方面,主要是考虑航天器

从高轨道向低轨道进行共面/异面轨道转移的问题。为解决此类问题,绝大部分文献都是首先根据庞特李亚金极大值原理将最优控制问题转化为两点边值问题(Boundary Value Problem, BVP),然后利用打靶法求解^[3-5]。这种方法求解过程比较复杂,而且对初值非常敏感,由于协态变量没有明确的物理含义,因此初值难以猜测,这给该类方法的应用带来了很大的困难。Gauss 伪谱法作为求解最优控制问题的直接法,无需求解繁琐的最优性必要条件,而且具有鲁棒性好、精度高的特点,因此适于解决航天器大气内轨迹优化这类复杂的问题。

* 收稿日期:2010-11-29

基金项目:国家“863”高技术计划基金资助项目

作者简介:符俊(1986—),男,博士生。

本文采用 Gauss 伪谱法对航天器气动力辅助平面变轨问题进行了研究, 得出了热流限制下航天器的次优大气飞行轨迹, 验证了优化结果满足一阶最优性必要条件。将其与间接法的计算结果进行对比, 表明 Gauss 伪谱法在计算效率上更好, 且优化轨迹更能满足热流限制的约束条件。

1 最优气动力辅助平面变轨过程描述

如图 1 所示, 航天器气动力辅助轨道转移包括两个大气层外和一个大气层内的飞行阶段:

1) 初始转移轨道 $\widehat{12}$ 。在初始轨道施加一个反向的速度冲量 Δv_1 后, 航天器进入初始转移轨道, 该轨道的远地点为变轨点 1, 近地点在大气层内。

2) 大气内飞行段 $\widehat{23}$ 。航天器自 2 点进入大气层, 然后在空气动力和地心引力的作用下飞行, 直至在 3 点离开大气层。

3) 最终转移轨道 $\widehat{34}$, 该轨道的远地点为 4 点。最后在 4 点施加一次速度冲量 Δv_2 使, 航天器进入目标轨道。4 点为远地点的原因将在后文给出。

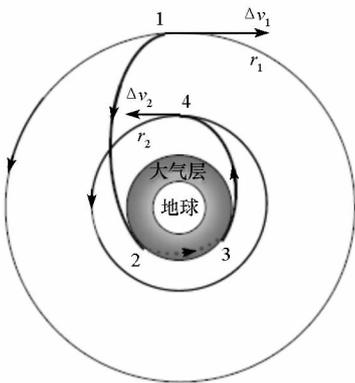


图 1 气动力辅助变轨示意图

Fig. 1 Schematic of aeroassisted orbital transfer

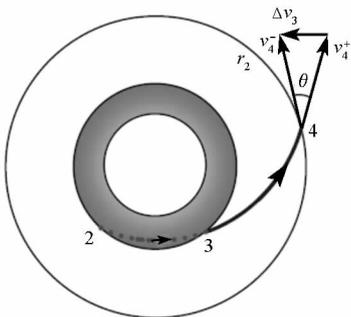


图 2 转移轨道 $\widehat{34}$ 与目标轨道不相切情况

Fig. 2 Situation of transfer orbit $\widehat{34}$ intersecting target orbit

可以发现, 整个变轨过程中航天器只在 1 点和 4 点受到两次速度冲量的作用, 分别称为离轨

脉冲 Δv_1 和入轨脉冲 Δv_2 。记 (v_1^-, v_1^+) 和 (v_4^-, v_4^+) 分别表示航天器在 1 点和 4 点速度冲量施加前后的速度, 有

$$\Delta v_1 = v_1^- - v_1^+, \Delta v_2 = v_4^+ - v_4^- \quad (1)$$

而

$$v_1^- = \sqrt{\frac{\mu_e}{r_1}}, v_4^+ = \sqrt{\frac{\mu_e}{r_2}} \quad (2)$$

其中 μ_e 为地球引力常数, r_1 为初始轨道地心距, r_2 为目标轨道地心距。总的速度冲量

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 \quad (3)$$

如果知道初始转移轨道 $\widehat{12}$ 的近地点高度 r_{pe} , 那么可以得到航天器远地点速度

$$v_1^+ = \sqrt{\frac{2\mu_e r_{pe}}{r_1(r_1 + r_{pe})}} \quad (4)$$

根据动量矩和能量守恒定理, 航天器在 2 点进入大气层时的速度和速度倾角分别为

$$v_2 = \sqrt{2\mu_e \frac{r_1 + r_{pe} - r_a}{r_a(r_1 + r_{pe})}} \quad (5)$$

$$\gamma_2 = -\cos^{-1} \sqrt{\frac{r_1 r_{pe}}{r_a(r_1 + r_{pe} - r_a)}} \quad (6)$$

其中 r_a 为大气层上边界地心距。

从上面的分析可以看到, 航天器完成轨道转移所需的速度冲量 Δv 是与 r_{pe} 有关的。因此我们自然地联想到这样一个问题: 是否存在一个最优的 r_{pe} 使得所需的速度冲量最小呢? 答案是否定的。文献[6]指出, 若 r_{pe} 任意变化, 将不存在最优解。因此这里的讨论认为 r_{pe} 固定。

航天器进入大气层后, 仅受到空气动力和地心引力作用, 航天器主要靠改变姿态来获得不同大小和方向的气动力以完成大气层内的飞行, 最后在 3 点以合适的飞行状态 (v_3, γ_3) 进入最终转移轨道 $\widehat{34}$ 。由于目标轨道为圆轨道, 所以 4 点应为转移轨道 $\widehat{34}$ 的远地点, 这样才能保证冲量变轨所需的速度冲量最小。具体原因如下:

如图 2 示, 如果 4 点不是转移轨道 $\widehat{34}$ 的远地点, 那么航天器进入目标轨道所需的速度冲量为

$$\Delta v_3 = \sqrt{(v_4^+)^2 + (v_4^-)^2 - 2v_4^+ v_4^- \cos\theta} \quad (7)$$

其中 θ 为 v_4^+ 和 v_4^- 的夹角。而在 4 点为转移轨道 $\widehat{34}$ 远地点的情况下, 所需的速度增量为

$$\Delta v_2 = v_4^+ - v_4^- = \sqrt{(v_4^+)^2 + (v_4^-)^2 - 2v_4^+ v_4^-} \quad (8)$$

由航天器飞出大气层的条件可知 $0 < \theta < \pi/2$, 故 $\Delta v_2 < \Delta v_3$, 因此应该选择 4 点为转移轨道 $\widehat{34}$ 的远地点, 同时得到 (v_3, γ_3) 的一个方程

$$r_2^2(v_3^2 r_a - 2\mu_e) + 2\mu_e r_2 r_a - v_3^2 \cos^2 \gamma_3 r_a^3 = 0 \quad (9)$$

根据动量矩守恒定理, v_4^- 可以表示为

$$v_4^- = \frac{r_a}{r_2} v_3 \cos \gamma_3 \quad (10)$$

优化的目的是使 Δv 最小, 得到性能指标函数

$$\min: J = \sqrt{\frac{\mu_e}{r_1}} + \sqrt{\frac{\mu_e}{r_2}} - \sqrt{\frac{2\mu_e r_{pe}}{r_1(r_1 + r_{pe})}} - \frac{r_a}{r_2} v_3 \cos \gamma_3 \quad (11)$$

容易看出, 式(11)前三项均为常数, 故性能指标函数可以简化为

$$\min: J = -\frac{r_a}{r_2} v_3 \cos \gamma_3 \quad (12)$$

在航天器气动力辅助轨道转移过程中, 初始转移轨道和最终转移轨道均为冲量变轨模式, 所以优化的过程主要是航天器的大气飞行段。根据上面的分析可以看出, 这是一个终端时刻自由、迈耶尔型性能指标的最优控制问题, 具体要求是通过调整航天器的姿态让其得以在大气中最优飞行, 使得性能指标函数最小。

2 优化模型

2.1 动力学模型

航天器在大气内飞行仅受气动力和地心引力作用, 其在地固系中无动力飞行的平面运动方程为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \sin \gamma \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{D}{m} - \frac{\mu_e}{r^2} \sin \gamma \\ \frac{d\gamma}{dt} = \frac{L}{mv} + \left(\frac{v}{r} - \frac{\mu_e}{r^2 v} \right) \cos \gamma \end{cases} \quad (13)$$

式中, r 表示航天器的地心距, v 表示速度, γ 表示航迹角, m 为航天器的常质量。 D 和 L 分别表示气动阻力和升力

$$D = 0.5 \rho v^2 S C_D, L = 0.5 \rho v^2 S C_L \quad (14)$$

其中 S 为航天器的特征面积, ρ 为大气密度, 服从指数变化规律。定义 ρ_0 为海平面大气密度, β 为指数因子, 则高度 H 处的大气密度为

$$\rho = \rho_0 \exp(-\beta H) \quad (15)$$

C_D 和 C_L 分别为航天器的阻力系数和升力系数, 假定它们服从二次极线规律

$$C_D = C_{D0} + K C_L^2 \quad (16)$$

其中

$$C_L = C_{L,\alpha} \alpha \quad (17)$$

式中 C_{D0} 为零升阻力系数, K 为诱导阻力因子, $C_{L,\alpha}$ 为升力斜率, α 为攻角。

由航天器平面运动方程式(13)和式(17)可以发现, 攻角 α 为惟一控制量。

2.2 无量纲化

采用数值方法进行优化时, 一般须对物理量进行无量纲化, 选取的无量纲化参数如下

$$\begin{aligned} r_c &= r_a, t_c = \sqrt{r_c^3 / \mu_e}, v_c = r_c / t_c, \\ a_c &= \mu_e / r_c^2, \rho_c = \frac{m}{S r_c} \end{aligned}$$

采用上面的无量纲化参数后, μ_e 的无量纲量为 1。

2.3 约束条件

(1) 边界条件

初始时刻 t_0 航天器在 2 点进入大气层, 此时航天器的状态量为

$$r(t_0) = r_a, v(t_0) = v_2, \gamma(t_0) = \gamma_2$$

(2) 终端约束

末态时刻 t_f 航天器在 3 点离开大气层时运动状态应满足的约束为

$$r(t_f) = r_a, v(t_f) = v_3, \gamma(t_f) = \gamma_3$$

其中 (v_3, γ_3) 应满足约束式(9)。

(3) 过程约束

航天器通过大气层时, 速度一般可达到 20 多个马赫数, 会产生严重的气动加热, 因此必须对航天器的受热情况进行分析。在研究航天器轨迹优化问题时, 通常以驻点热流密度作为约束条件, 因为驻点是航天器加热较严重的区域。驻点热流的计算公式为^[7]

$$\dot{Q} = \dot{Q}(v/v_c)^{3.15} \sqrt{\rho/\rho_0} \quad (18)$$

其中 \dot{Q} 为驻点热流密度常数。驻点热流密度应小于最大热流密度

$$\dot{Q} < \dot{Q}_{\max} \quad (19)$$

(4) 控制量约束

控制量为升力系数, 它受到约束

$$|C_L| < C_{L\max} \quad (20)$$

3 Gauss 伪谱法简介

Gauss 伪谱法属于直接法中的一种全局优化方法, 也称为正交配点方法(Orthogonal Collocation)。其基本原理为将状态变量和控制变量在一系列 LGL (Legendre-Gauss-Lobatto) 点上离散, 并以离散点为节点构造 Lagrange 插值多项式来逼近状态变量和控制变量。对全局插值多项式求导来近似状态变量对时间的导数, 从而将微分方程约束转换为一组代数约束, 这些约束条件加上问题本身的约束条件, 如边界条件、路径约束等, 共同构成非线性规划问题的约束条件。Bolza 型性能指标

中的积分项由 Gauss 积分计算,终端状态由初始状态加右函数在整个过程的积分获得。经过上述变换,便将动态最优控制问题转为静态参数优化问题,最后采用适当的非线性规划算法求解,如序列二次规划算法(Sequential Quadratic Programming, SQP)等^[8]。

Gauss 伪谱法与一般直接法相比,有一个最大的优点,那就是它证明了非线性规划的 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件与离散哈密顿边值问题(Hamilton Boundary Value Problem, HBVP)的一阶最优性条件具有一致性^[9],因此该方法使非

线性规划问题的解满足传统间接法的一阶最优性必要条件。在实际的计算过程中,Gauss 伪谱法能得到协态变量在 LGL 点上的信息,从而可以通过求解哈密顿函数的值来判断优化结果是否满足最优性必要条件。

4 优化结果及分析

这里以经典的航天器从高轨道向低轨道共面转移的例子来研究 Gauss 伪谱法在气动力辅助变轨问题中的应用,仿真中用到的参数及前面提到的物理量的数值可参见表 1。

表 1 仿真参数

Tab. 1 Parameters of simulation

$\mu_e = 3.98600436 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$	$C_{L\max} = 0.9$	$r_2 = 6558 \text{ km}$
$r_e = 6378 \text{ km}$	$C_{L,\alpha} = 0.5699$	$r_{pe} = 6400 \text{ km}$
$v_e = \sqrt{\mu_e/r_e}$	$\beta = 1/7100 \text{ m}$	$m/S = 300 \text{ kg/m}^2$
$C_{D0} = 0.1$	$\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$	$\dot{Q} = 11.357 \text{ kW/m}^2$
$K = 1.11$	$r_1 = 42164 \text{ km}$	$\dot{Q}_{\max} = 2500 \text{ kW/m}^2$

根据给定的仿真条件,计算得到航天器进入大气层的无量纲状态量为 $\bar{r}(t_0) = 1$, $\bar{v}(t_0) = 1.3162$, $\bar{\gamma}(t_0) = -0.1133$ 。为了研究 Gauss 伪谱法在气动力辅助变轨问题中的应用,这里将其计算结果与采用打靶法解哈密顿边值问题的间接法进行了比较。

仿真中取 60 个 LGL 点,图 3(a)~(b)为优化得到的航天器大气飞行中的速度、航迹角和高度的变化曲线,其中实线为 Gauss 伪谱法的优化结果,虚线表示打靶法。从图中看到,初始时刻航天器以一个负的速度倾角进入大气层,然后迅速地下降至最低高度,最后缓慢地上升,上升过程中速度及航迹角均趋向于常值。航天器在大气飞行的绝大部分时间内,其航迹角都处于零附近,即几乎贴着当地水平面飞行,直至飞出大气层。在这个过程中,它的速度不断减小,这正是气动力辅助变轨节省燃料的原因所在:航天器在从高轨道向低轨道转移的大气飞行段,其能量在大气阻力的作用下不断耗散,而不需要消耗额外的燃料。比较打靶法和 Gauss 伪谱法的优化结果可以发现,航天器各状态量的变化趋势基本相同,且达到几乎一致的终端状态。

图 4(a)~(c)分别为优化过程中航天器升力系数、升阻比和驻点热流密度的变化曲线。从图 4(a)、(b)中看到,航天器上升段其升力系数一直位于负的最小值,即最大负升力,这样航天器便不会过早地逸出大气层,从而能够充分利用空气阻力达到减速的目的。

比较打靶法和 Gauss 伪谱法下升力系数的变化规律可以发现,利用打靶法和 Gauss 伪谱法获得的控制 C_L 有一定的差别。这是由于航天器大气内飞行经历的过程比较复杂,采用不同优化方法得到的最优控制并不一定是严格意义上的最优,而有可能仅仅是“次优”,故导致它们获得的“次优控制”会有所不同。表 2 为两种方法的详细计算结果,从表 2 中也可以看出,两种方法下的性能指标函数值虽然一样,但是优化得到的飞行轨迹是不同的:Gauss 伪谱法以延长飞行时间为代价,使得峰值热流较打靶法更低。在考虑性能指标因素的前提下,两种方法均符合要求。但是在实际工程应用中,存在诸如飞行环境、飞行器性能参数的不确定性等因素,为了使飞行器在极端条件下不被烧蚀,保证飞行可靠性,应尽量降低驻点热流密度峰值,从这方面来说,Gauss 伪谱法的结果较打靶法更优。

前面提到,采用 Gauss 伪谱法可以获得优化过程中各状态量的协态信息,进而计算哈密顿函数值来判断优化结果是否满足一阶最优性必要条件。图 5(a)~(c)为协态变量 λ_x 、 λ_y 和 λ_z 的变化曲线,图 5(d)反映了哈密顿函数值的变化。对于文中研究的优化模型,哈密顿函数不显含时间 t ,为自治系统,有 $H(t) = \text{constant}$,又因性能指标为迈耶尔型,故

$$H(t_f) = -\frac{\partial \bar{S}(t_f)}{\partial t_f} = 0 \quad (21)$$

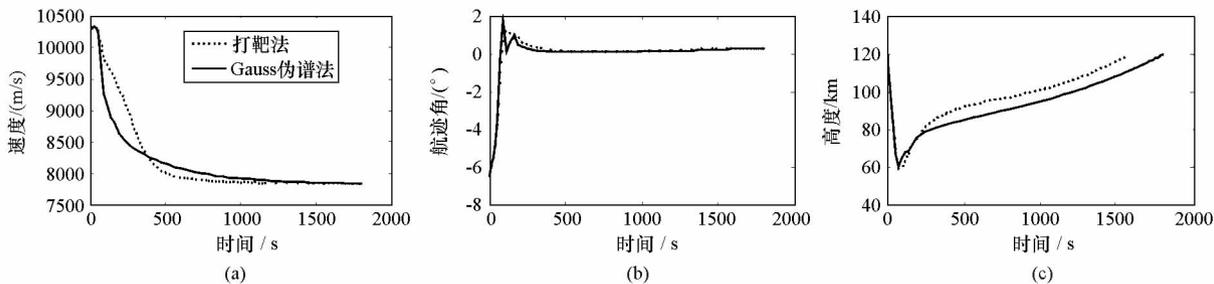


图 3 状态量变化曲线

Fig. 3 Time histories of state variables

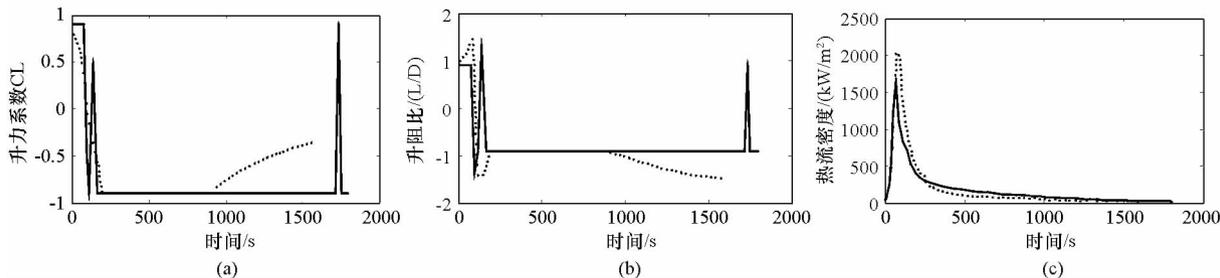


图 4 升力系数、升阻比和驻点热流密度变化曲线

Fig. 4 Time histories of lift coefficient, lift-to-drag ratio and stagnation point heating rate

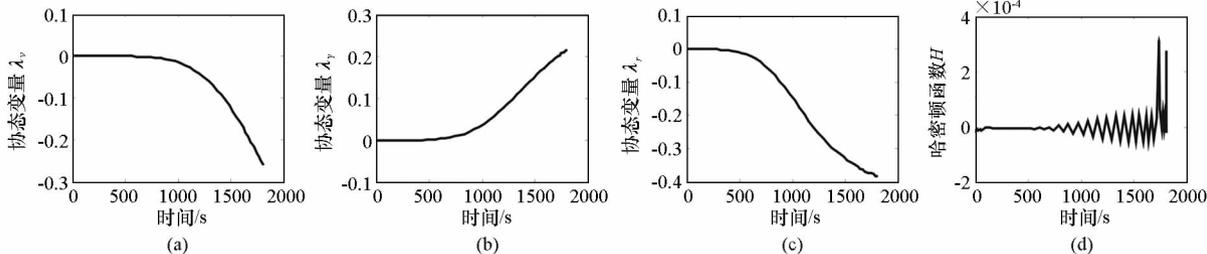


图 5 协态变量和哈密顿函数变化曲线

Fig. 5 Time histories of adjoint variables and Hamiltonian

表 2 两种优化方法下的计算结果

Tab. 2 Calculation results of two methods

	Gauss 伪谱法	打靶法
$v(t_f)/(m/s)$	7844. 03	7843. 91
$\gamma(t_f)/(^\circ)$	0. 3068	0. 3098
$\Delta v_1/(m/s)$	1496. 16	1496. 16
$\Delta v_2/(m/s)$	24. 05	24. 17
$\Delta v/(m/s)$	1520. 21	1520. 33
飞行时间/s	1806	1592
最低高度/km	60. 68	58. 37
峰值热流/(kW/m ²)	1639. 5	2072. 67
优化时间/s	283. 8	— (与初值有关)

其中

$$\bar{S}(t_f) = -\frac{r_a}{r_2} v(t_f) \cos(\gamma(t_f)) \quad (22)$$

所以有 $H(t) \equiv 0$ 。从图 5(d) 中看到, 优化过程中哈密顿函数的值一直位于零附近, 最大偏差为 0. 03%, 符合最优性必要条件。

5 结论

气动力辅助变轨技术可以有效地节省航天器的燃料, 是未来航天器新型变轨技术的发展方向之一。本文采用 Gauss 伪谱法对航天器大气层内的飞行轨迹进行了优化, 并与打靶法的结果进行了比较, 主要得到了以下几点结论:

(1) 在求解航天器大气内轨迹优化这类问题时, Gauss 伪谱法的计算结果能够满足一阶最优性必要条件。

(2) 打靶法对初值猜测非常敏感, 且协态变量的初值往往难以猜测, 这限制了打靶法的应用。而 Gauss 伪谱法作为一种直接法, 对初值猜测的准确性要求不高, 且鲁棒性好, 解的精度高。

(3) 与打靶法相比, 尽管两种方法能达到一致的性能指标, 但是优化轨迹却不相同。这说明 Gauss 伪谱法的计算结果并不是严格的最优, 而是“次优”, 但这种“次优控制”也能满足工程需要。

(下转第 110 页)

参考文献:

[1] Poulsen A J, Ianniello J P. Bearing Stabilization and Tracking for an AUV with an Acoustic Line Array[J]. IEEE, 2006.

[2] Holmes J D, Lynch J F. An Autonomous Underwater Vehicle Towed Array for Ocean Acoustic Measurements and Inversions[J]. IEEE, 2005:1058 - 1061.

[3] Tichavsky P, Wong K T, Zoltowski M D. Near-field/far-field Azimuth & Elevation Angle Estimation Using a Single Vector-hydrophone[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2001, 49 (11):2498 - 2510.

[4] 杨秀庭,孙贵青,陈新华,等. 一种改进的 WSF 算法在单矢量水听器多目标方位估计中的应用[J]. 声学技术,2007,

26(2):165 - 168.

[5] Nehorai A, Pald E. Acoustic Vector Sensor Array Processing[J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1994, 42(9):2481 - 2491.

[6] 姚直象,惠俊英,蔡平,等. 单矢量水听器方位估计的柱状图方法[J]. 应用声学,2006,25(3):161 - 167.

[7] 周江涛,倪明,朱宇正. 单矢量水听器的 MVDR 方位估计研究[J]. 声学技术,2008,27(5):476 - 477.

[8] 杨秀庭,孙贵青,陈新华. 矢量水听器阵列 MVDR 波束形成器的性能研究[J]. 应用声学,2007,26(1):8 - 15.

[9] 刘胜. 舰载捷联式猎雷声纳基阵姿态控制系统研究与实现[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学,2000.

[10] 刘德树,罗景青,张剑云. 空间谱估计及其应用[M]. 中国科学技术出版社,1997.

(上接第 99 页)

参考文献:

[1] London H S. Change of Satellite Orbit Plane by Aerodynamic Maneuvering[J]. Journal of the Aerospace Sciences, 1962 (29): 323 - 332.

[2] Walberg G D. A Survey of Aeroassisted Orbit Transfer[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1985, 22(1): 3 - 18.

[3] Zimmermann F, Calise A J. Numerical Optimization Study of Aeroassisted Orbit Transfer[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(1): 127 - 133.

[4] Mease K D, Vinh N X. Minimum Fuel Aeroassisted Coplanar Orbit Transfer Using Lift Modulation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1985, 8(1): 134 - 141.

[5] Baumann H, Oberle H J. Numerical Computation of Optimal Trajectories for Coplanar, Aeroassisted Orbital Transfer[J].

Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 107 (3): 457 - 479.

[6] 吴德隆,王小军. 航天器气动力辅助变轨动力学与最优控制[M]. 北京:中国宇航出版社, 2006: 78 - 80.

[7] Rao A V, Cox S, Mosher T. A Concept for Operationally Responsive Space Mission Planning Using Aeroassisted Orbital Transfer[C]//AIAA/6 Responsive Space Conference, 2008: 1 - 10.

[8] Huntington G T. Advancement and Analysis of a Gauss Pseudospectral Transcription for Optimal Control Problems[D]. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology, 2007: 115 - 143.

[9] Benson A, Thorvaldsen T, Rao V. Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation Via an Orthogonal Collocation Method [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29 (6): 1435 - 1440.