离散线性系统部分可观测性测试配置*

杨拥民[1],黎　湘[2]

(1. 国防科技大学 装备综合保障技术重点实验室,湖南 长沙　410073;
2. 国防科技大学 电子科学与工程学院,湖南 长沙　410073)

摘　要:不可观测系统的部分状态可观测性对于大系统故障检测具有十分重要的意义。研究了基于部分可观测性的不可观测离散线性系统测点优化配置问题,证明了采用有限次观测值构造一个矩阵,可以给出部分可观测性成立的充分必要条件,并进一步证明了部分可观测性的度量可以用一个矩阵的秩的特性来刻画。最后,给出了离散线性系统部分可观测性测试优化配置的度量指标。算例表明,提出的部分可观测性度量指标具有简单实用的特点。

关键词:离散线性系统;部分可观测性;奇异值;测试优化配置

中图分类号:TP13　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1001 - 2486(2012)01 - 0063 - 04

Measurement optimization of linear discrete systems for partial observability

YANG Yongmin[1], *LI Xiang*[2]

(1. Laboratory of Science and Technology on Integrated Logistics Support, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Observability of a part of states (partial observability) of unobservable system is very important for fault detection of large systems. Measurement points optimization of unobservable linear discrete systems based on partial observability was studied. It was proved that a sufficient and necessary condition of the partial observability can be obtained by a matrix which is formed by limited observations of the system. Then the rank characteristic of a matrix was proved to be able to be applied to express how observable those partial states are. Finally, an index of this partial observability was presented for the measurement optimization.

Key words: linear discrete system; partial observability; singular value; measurement optimization

根据系统输出对系统内部状态进行有效观测,对系统的反馈控制以及状态监控都具有十分重要的作用。随着机内测试、嵌入式诊断与预测等思想与手段的出现,人们开始关注在系统设计过程中,通过增加额外的测点,以使系统具备更好的可观测性能,以利于对系统的异常和故障行为进行有效的检测与诊断。文献[1 - 2]基于系统的可观测性,对于线性系统的测点优化配置问题进行了研究。

工程中往往仅要求部分系统状态具有可观测性,即不是要求系统状态向量 x 具有可观测性,而是要求部分状态线性组合 Tx 的可观测性,这可以用部分可观测性来表示。这在大型复杂系统关键运行状态可以用少数几个测点加以刻画时是非常有效的。文献[3 - 5]讨论了线性系统的函数观测器与估计器问题,但基于的条件是系统完全可观测。文献[6]进一步研究了线性系统未知输入条件下系统的函数观测器问题,也是基于系统完全可观测这一条件。近年来,在非线性系统观测器设计方面,通过坐标变换实现观测器估计误差线性化是一个重要的研究方向[9 - 12],但都要求原系统的全部状态是可观测的。

而开展测试优化配置时,有时并不要求系统是完全可观测的,而是部分可观测的,对于大型复杂系统来说尤为如此。文献[7]给出了几种情况下部分可观测性成立的充分必要条件,但未证明多少次观测才是充分的。另一方面,对于可观测性成立的量化描述,是目前学术界非常关心的一个问题。由于对可观测性成立的量化描述可以直观地表达一个系统可观测的程度,特别是可以精

* **收稿日期**:2011 - 09 - 09
基金项目:国家部委资助项目(513270302)
作者简介:杨拥民(1966 -),男,湖南常德人,教授,在职博士生,E-mail:yangyongmin@yahoo.com

确地刻画一个系统由可观测向不可观测“转变”的过程，使人们在工程中有依据在可观测测点配置方案集中去尽量选取可观测性“好”的方案，以获得较好的观测精度。

本文则研究了离散线性系统部分可观测性量化描述的方法。该方法可用于离散线性系统部分可观测测点配置方案的优选。

1　离散线性系统的部分可观测性

对于 n 维线性定常离散系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k\\ \boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_k\end{cases},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x}_k$ 是 n 维状态变量，$\boldsymbol{u}_k$ 是 r 维控制变量，$\boldsymbol{y}_k$ 是 p 维系统输出。在考虑机内测试时，可以认为 $\boldsymbol{y}_k$ 是系统的测试集。

在工程中，受关注的状态可能只是部分状态，或者是部分状态的线性组合，可以用 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_k$ 来表示。Yoshikawa 对离散线性系统部分可观测性进行了系统阐述[7]，主要结论如下：

考虑线性方程

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{d} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{L}:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{\Delta}$ 是线性映射，$\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{\Delta}$ 是线性空间。给定 $\boldsymbol{d}$，设(2)的解集由 $\boldsymbol{Z}_0$表示，即

$$\boldsymbol{Z}_0=\{z \mid z\in\boldsymbol{Z}\ ,\ \boldsymbol{L}z=\boldsymbol{d}\}$$

对于 $\boldsymbol{Z}$ 上的线性映射 $\boldsymbol{P}$，若对于任意 $z_1,z_2\in\boldsymbol{Z}_0$，有

$$\boldsymbol{P}z_1=\boldsymbol{P}z_2 \tag{3}$$

则称(2)的解对于 $\boldsymbol{P}$ 来说是唯一的。对于此唯一性问题，有以下引理来保证[7]：

引理 1　(2)的解对于 $\boldsymbol{P}$ 是唯一的当且仅当

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{L}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}L\\P\end{bmatrix} \tag{4}$$

下面根据引理 1 研究系统的部分可观测性问题。对于(1)式描述的系统，令

$$\boldsymbol{y}_{[0,j]}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_0\\\boldsymbol{y}_1\\\vdots\\\boldsymbol{y}_j\end{bmatrix},\boldsymbol{u}_{[0,j]}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_0\\\boldsymbol{u}_1\\\vdots\\\boldsymbol{u}_j\end{bmatrix},\boldsymbol{N}_j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\vdots\\\boldsymbol{CA}^j\end{bmatrix}$$

$$j=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

$$\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{D},\boldsymbol{M}_j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}&\boldsymbol{0}&\cdots&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{CB}&\boldsymbol{D}&\cdots&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{CAB}&\boldsymbol{CB}&\cdots&\boldsymbol{0}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{CA}^{j-1}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{CA}^{j-2}\boldsymbol{B}&\cdots&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}$$

$$j=0,1,2,\cdots \tag{6}$$

有

$$\boldsymbol{y}_{[0,j]}-\boldsymbol{M}_j\boldsymbol{u}_{[0,j]}=\boldsymbol{N}_j\boldsymbol{x}_0,$$
$$j=0,1,2,\cdots \tag{7}$$

部分可观测性的问题可以这样来表述：给定矩阵 $\boldsymbol{T}$，对于某个 j 可以根据 $\boldsymbol{y}_{[0,j]}$、$\boldsymbol{u}_{[0,j]}$唯一地确定 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0$。对此，有以下引理[7]：

引理 2　对于(1)式描述的离散线性系统和(5)式定义的 $\boldsymbol{y}_{[0,j]}$、$\boldsymbol{u}_{[0,j]}$和 $\boldsymbol{N}_j$，给定矩阵 $\boldsymbol{T}$，有某个 j 使得可以根据 $\boldsymbol{y}_{[0,j]}$、$\boldsymbol{u}_{[0,j]}$唯一地确定 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0$ 的充分必要条件是

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{N}_j=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_j\\\boldsymbol{T}\end{bmatrix} \tag{8}$$

由于引理 2 未指出 j 在实际应用中如何确定，工程应用中不易使用。本文证明的定理 1 可解决这一问题。

定理 1　对于(1)式描述的离散线性系统和(5)式定义的 $\boldsymbol{y}_{[0,j]}$、$\boldsymbol{u}_{[0,j]}$和 N_j，令 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式阶数为 m，给定矩阵 $\boldsymbol{T}$，有某个 j 使得可以根据 $\boldsymbol{y}_{[0,j]}$、$\boldsymbol{u}_{[0,j]}$唯一地确定 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0$ 的充分必要条件是：

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{N}_{m-1}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_{m-1}\\\boldsymbol{T}\end{bmatrix} \tag{9}$$

证明：由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 阵有相同的最小多项式阶数 m，故有

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{m+i}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\in span[\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\cdots(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{m-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]$$
$$i=0,1,\cdots \tag{10}$$

即

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\vdots\\\boldsymbol{CA}^{m-1}\\\boldsymbol{CA}^{m}\\\vdots\\\boldsymbol{CA}^{m+i}\end{bmatrix}=\mathrm{rank}[\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\cdots$$
$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{m-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{m}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\quad\cdots(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{m+i}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]$$
$$=\mathrm{rank}[\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\quad\cdots\quad(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{m-1}\boldsymbol{C}^{T}]$$
$$=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{CA}\\\vdots\\\boldsymbol{CA}^{m-1}\end{bmatrix} \tag{11}$$

从而有

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{N}_{m+i}=\mathrm{rank}\boldsymbol{N}_{m-1} \tag{12}$$

且

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_j\\\boldsymbol{T}\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_{m-1}\\0\\\boldsymbol{T}\end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{m-1} \\ \boldsymbol{T} \end{bmatrix} \tag{13}$$

结合(12)、(13)两式,定理得证。

2　线性系统部分可观测性的度量

由(5)、(9)式可以看到,$\boldsymbol{C}$ 阵通过影响 $\boldsymbol{N}_j$ 影响部分可观测性的成立。实际工程中希望在一组观测点配置方案中选取一个可观测性最优的或者较好的方案。直接根据(9)式计算等式两边矩阵的秩,可以直接判定部分可观测性成立与否,但无法选出最优方案,或者无法剔除一些部分可观测性几乎不成立的病态解。所以,给出一个(9)式成立程度的量化评价方法是十分必要的。下文针对这一问题开展研究,得到了一些有益的结果。

定理 2　以 $\boldsymbol{N}_j^{+}$ 表示 $\boldsymbol{N}_j$ 的伪逆矩阵。对于(1)式给定的离散线性定常系统,根据等式(5)、(6)、(7)、(9)描述的部分可观测问题,当且仅当矩阵 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{N}_m^{+}\boldsymbol{N}_m$ 为零秩矩阵时,部分可观测性成立。

证明:根据分块矩阵的秩的关系[8]:

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_m \\ \boldsymbol{T} \end{bmatrix}\right)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{N}_m)+\operatorname{rank}(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{N}_m^{+}\boldsymbol{N}_m) \tag{14}$$

当矩阵

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{N}_m^{+}\boldsymbol{N}_m \tag{15}$$

为零秩矩阵时,(9)式成立,即系统(1)是部分可观测的。

注意,实际应用中,可用系统的维数 n 代替最小多项式阶数 m。

可以看到,矩阵 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{N}_m^{+}\boldsymbol{N}_m$ 的所有奇异值接近零的程度实际上反应了(9)式成立的程度。

讨论 1　视 $\boldsymbol{N}_m\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}_{[0,m]}-\boldsymbol{M}_m\boldsymbol{u}_{[0,m]}$ 为一代数方程,可以直接解方程得到 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{T}\boldsymbol{N}_m^{+}[\boldsymbol{y}_{[0,m]}-\boldsymbol{M}_m\boldsymbol{u}_{[0,m]}]+(\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{N}_m^{+}\boldsymbol{N}_m)\boldsymbol{z}$。其中 $\boldsymbol{z}$ 为维数相容的任意向量。可以看到,$\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}$ 表示了 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0$ 的不可观测部分,要求 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0$ 可观测 $\boldsymbol{R}$ 必须为零。而定理 2 则严格证明了充分必要条件。

讨论 2　可以证明,当 $\boldsymbol{T}$ 是可逆矩阵时,运用 Cayley-Hamilton 理论,(9)式可转变成

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{N}_{n-1}=n \tag{16}$$

这个问题退化为全状态可观测性问题。

讨论 3　$\boldsymbol{R}$ 的所有奇异值的大小反映了(9)式成立的程度。设有 $\boldsymbol{C}_1\sim\boldsymbol{C}_i$ 个测试点配置方案,要从中选出部分可观测性较好的方案。可以将对应的 $\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i$ 阵进行奇异值分解:

$$\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,而 $\boldsymbol{S}=\operatorname{diag}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r]$,$\alpha_1(\boldsymbol{R}_i)\geqslant\cdots\geqslant\alpha_r(\boldsymbol{R}_i)>0$ 为 $\boldsymbol{R}_j$ 的正奇异值,$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$ 为维数合适的正交矩阵。可以看到

$$I_i=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j(R_i)\leqslant\gamma \tag{18}$$

可以作为衡量(9)式成立的度量函数。这里 $\gamma>0$ 为很小的正数,当 $I_i\leqslant\gamma$ 时可以认为(9)式已经成立。可以选择满足上述要求且 I_i 值为最小的 $\boldsymbol{C}_i$ 阵为最优的选择。当然,也可以选择其他度量函数,如 $\boldsymbol{R}_i$ 的谱半径。

3　算例研究

对于如下离散线性定常系统

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{k+1}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k \\ \boldsymbol{y}_k&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_k \\ k&=0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$C_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$C_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$C_3=\begin{bmatrix} 0.001 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

经过计算可以知道,系统 1($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}_1$)、系统 2($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}_2$)、系统 3($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}_3$)均不可观测。但是,可以考查其中的部分状态的线性组合的可观测性,考虑:

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \tag{24}$$

由于系统 1、2、3 可以按照(5)、(15)、(18)式计算得:$I_1 = 4.69 \times 10^{-30}$、$I_2 = 3.91 \times 10^{-30}$、$I_3 = 8.0 \times 10^{-25}$。可以看到,第 1、2 个测试矩阵选取方案是较好的,而相比之下第 3 个方案由于 I_3 大了 5 个数量级,将具有较差的观测精度。这和第 3 个方案对第 1 个状态的观测系数为 0.001,取值过小相吻合。

4 总 结

本文研究了离散线性定常系统的部分可观测性量化度量问题。本文证明的 2 个定理给出了工程化计算的理论基础。通过算例可以看到,本文给出的计算方法可以在工程上非常方便地编程计算观测矩阵选择的优劣,从而有效地指导以部分可观测性为目标的大系统观测矩阵的选择问题。

参考文献(References)

[1] 杨拥民, 黎湘, 庄钊文. 线性系统测试矩阵优化[J]. 国防科技大学学报, 2008,30(4):107 – 110.
YANG Yongmin, LI Xiang, ZHUANG Zhaowen. Measurement matrix optimization for linear systems[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2008,30(4):107 – 110. (in Chinese)

[2] 杨拥民,黎湘,庄钊文. 基于循环子空间理论的线性系统测试矩阵优化[J]. 国防科技大学学报,2008,30(5):114 – 119.
YANG Yongmin, LI Xiang, ZHUANG Zhaowen. Measurement matrix optimization for linear systems based on cyclic subspace theory[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2008,30(5):114 – 119. (in Chinese)

[3] Luenberger D G. Observers for multivariable systems[J]. IEEE Trans. Autom. Control, 1966, 11(2):190 – 197.

[4] Luenberger D G. An introduction to observers[J]. IEEE Trans. Autom. Control, 1971, 16(6):971 – 602.

[5] Haddad W M, Bernsteinf D S. Optimal reduced-order observer-estimators[C]//Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, 1989:2412 – 2417.

[6] Kudva P, Viswanadham N, Ramakrishna A. Observers for linear systems with unknown inputs[J]. IEEE Trans. Autom. Control, 1980, 25(1): 113 – 115.

[7] Yoshikawa T, Bhattacharyya S P. Partial uniqueness: observability and input identifiability[J]. IEEE Trans. Autom. Control, 1975, 23:713 – 714.

[8] Marsaglia G, Styan G P H. Equalities and inequalities for ranks of matrices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1974, (2): 269 – 292.

[9] Hou M, Pugh A C. Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems[J]. System Control Letter, 1999, 37:1 – 9.

[10] Giovanni S, Alexander Y P, Henk N. Application of partial observability for analysis and design of synchronized systems[J]. CHAOS, 2003, 13(1):356 – 363

[11] Lynch A F, Bortoff S A. Nonlinear observers with approximately linear error dynamics: The multivariable case[J]. IEEE Trans. Autom. Control, 2001, 46(6):927 – 932.

[12] Daejong N, Nam H J, Jin H S. Nonlinear observer design by dynamic observer error linearization[J]. IEEE Trans. Autom. Control, 2004, 49(10):1746 – 1750.